



[illegible] SAMMLUNG VON LEHRBÜCHERN
[illegible] GEBIETE DER
[illegible] WISSENSCHAFTEN
[illegible] IHRER ANWENDUNGEN
BAND XXII.

[illegible] GRUNDLAGEN
FÜR EINE
[illegible] DER LEBENDEN KÖRPER

[illegible] ANWENDUNGEN AUF DEN MENSCHEN
[illegible] BEWEGUNGSVORGÄNGE AN MASCHINEN

[illegible] MÖGLICHST ELEMENTARER UND
[illegible] WEISE DARGESTELLT VON

OTTO FISCHER
IN LEIPZIG

[illegible] IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN UND [illegible] TAFELN



LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEU
1906

B. G. TEUBNERS SAMMLUNG VON LEHRBÜCHERN
AUF DEM GEBIETE DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN
BAND XXII

THEORETISCHE GRUNDLAGEN
FÜR EINE
MECHANIK DER LEBENDEN KÖRPER

MIT SPEZIELLEN ANWENDUNGEN AUF DEN MENSCHEN
SOWIE AUF EINIGE BEWEGUNGSVORGÄNGE AN MASCHINEN

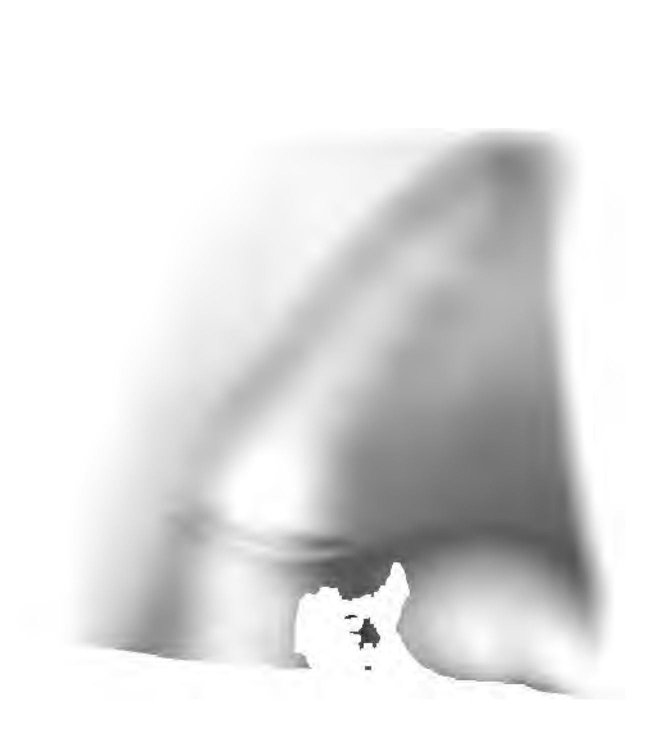
IN MÖGLICHST ELEMENTARER UND
ANSCHAULICHER WEISE DARGESTELLT VON

OTTO FISCHER
IN LEIPZIG

MIT 67 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN UND 4 TAFELN



LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1906



THE

MECHAN

MIT SPEZ

SOWIE AUF

genügt

Kritik

e Körper

nder

e Mech

derartigen

r die Kritik

konnten

erhält

n Falle

bei den

sich aber

dadurch

das ganz

ngsfrei

ilen

e sogenannten

r Regel

heit, also

meisten

dungen

Die Gesetz

ksysteme

n Gelenk

heitsgrad

nun

er die

von

ebend

kten

Lagr

er Pr

rinzips

und W

Vorwort.

Durch meine Arbeiten über die Mechanik der lebenden Körper sah ich mich seiner Zeit genötigt, unter anderen zunächst allgemeine Untersuchungen über die Kinetik solcher Systeme von Körpern anzustellen, bei welchen diese Körper in irgend einer Weise durch Gelenke beweglich unter einander verbunden sind. Denn es stellte sich heraus, daß die theoretische Mechanik bisher nur wenig Veranlassung genommen hatte, sich mit derartigen Systemen, die ich kurz als „Gelenksysteme“ bezeichne, eingehender zu beschäftigen. Die zahlreichen Untersuchungen, welche über die Kinetik der bei den Maschinen verwendeten Getriebe vorlagen, konnten der Untersuchung der allgemeinen n-gliedrigen Gelenksysteme verhältnismäßig wenig nützen, da sie sich nur mit einem ganz speziellen Falle, dem der zwangläufigen Gelenksysteme, beschäftigen. Die bei den lebenden Körpern auftretenden Gelenksysteme unterscheiden sich aber ganz wesentlich von den Getrieben der Maschinen gerade dadurch, daß ein großer Teil der Gelenke nicht zwangläufig, und das ganze System in der Regel mit sehr viel Graden von Bewegungsfreiheit versehen ist. Es kommen zwar bei den Maschinen zuweilen auch Gelenke mit größerer Bewegungsfreiheit vor, so z. B. die sogenannten Kugelgelenke. Wo dies der Fall ist, werden aber in der Regel diese Gelenke doch nur mit einem Grade von Bewegungsfreiheit, also als zwangläufige verwendet. Es ist ja eben der Zweck der meisten Maschinen, irgend einen Teil derselben durch die Gelenkverbindungen mit anderen in eine ganz bestimmte Bewegung zu zwingen. Die Getriebe der Maschinen bilden daher mit wenig Ausnahmen Gelenksysteme von nur einem Grade der Freiheit, während die organischen Gelenksysteme im allgemeinen durch eine große Anzahl von Freiheitsgraden charakterisiert sind.

Das vorliegende Buch gibt nun eine zusammenfassende Darstellung meiner Untersuchungen über die Kinetik der Gelenksysteme und zeigt an einer großen Reihe von Anwendungen auf die Bewegungs- und Gleichgewichtszustände des Menschen, daß dieselben die allgemeine Grundlage für eine Mechanik der lebenden Körper bilden können.

Während die Maschinenlehre die Untersuchung der allgemeinen

gleichungen der Bewegungen eines lebenden Körpers aufzustellen; dieselben erscheinen aber in der Regel in einer so verwickelten Form, daß hierdurch ihre Verwendung für die Lösung kinetischer Probleme der Bewegungsphysiologie nahezu illusorisch gemacht ist. Es war daher zu untersuchen, ob sich nicht eine wesentliche Vereinfachung in der Form der Bewegungsgleichungen ermöglichen läßt. Dies Ziel wird erreicht durch die Einführung gewisser Massensysteme und fester Punkte innerhalb der einzelnen Glieder, von denen namentlich die letzteren, welche ich als „Hauptpunkte der Körperteile“ bezeichne, eine ähnlich hervorragende Rolle in der Kinetik der Gelenksysteme spielen, wie der Schwerpunkt in der Kinetik eines einzelnen starren Körpers. Da diese Massensysteme und Punkte für alle Gelenksysteme Bedeutung besitzen, gleichgültig ob es sich um einen lebenden Körper oder eine Maschine handelt, und da ihre Einführung durchaus nicht willkürlich, sondern wie die im 7. Abschnitt gegebene Interpretation der Bewegungsgleichungen zeigt, im Wesen der Sache begründet ist, so glaube ich mit ihnen auch das Interesse der Vertreter der technischen Mechanik zu erregen. Die angeführten Beispiele aus der technischen Mechanik werden zeigen, daß die neuen Methoden tatsächlich für die Lösung mancher Probleme der technischen Mechanik von einigem Nutzen sein können.

Zum Schluß noch ein Wort über das bei den Anwendungen auf den lebenden Körper benutzte Maßsystem. Man ist gewöhnt, in der Physiologie und Anatomie als Einheit der Kraft nicht das Dyn, sondern das Kilogrammgewicht zu verwenden. Nimmt man als Längeneinheit das Zentimeter und als Zeiteinheit die Sekunde, so muß man als Masseneinheit die Masse von 981000 Gramm ansehen. Man erhält daher in diesem System die Massenzahl, indem man die Anzahl der Gramm eines Körpers durch 981000, oder die Anzahl seiner Kilogramm durch 981 dividiert. Wenn auch hierbei die Massen der einzelnen Abschnitte des lebenden Körpers durch verhältnismäßig sehr kleine Zahlen ausgedrückt werden, so hat man doch den Vorteil, daß alle Kräfte bei den sämtlichen Rechnungen sich gleich in Kilogramm ergeben. Auf die Bestimmung der Kräfte kommt es aber bei vielen Problemen der Bewegungsphysiologie vor allen Dingen an, während die Massen, sowie auch die Trägheitsmomente bei denselben in der Regel nur die Rolle von Hilfsgrößen spielen.

Nachdem ich seiner Zeit die Bearbeitung des Artikels über physiologische Mechanik für die Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften übernommen hatte, bin ich der Aufforderung der Firma B. G. Teubner zur Abfassung dieses Buches gern nachgekommen. Wurde ich doch hierdurch in den Stand gesetzt, die in jenem Referat naturgemäß nur kurz angedeuteten neuen Methoden der physiologischen Kinetik eingehender darzulegen und zu begründen, so wie an einer

Reihe von Beispielen zu zeigen, in welcher Weise dieselben für die Lösung bestimmter Probleme der Physiologie ebenso wie der technischen Mechanik verwertet werden können. Die dem Umfang des Buches notwendiger Weise gesetzten Grenzen brachten es jedoch mit sich, daß auch hier noch vieles nur angedeutet und in groben Umrissen dargestellt werden konnte. Es muß daher in vielen Fällen außerdem auf das Studium der Originalabhandlungen verwiesen werden. Daher findet sich am Schlusse des Buches neben den Angaben früherer Werke, welche unter anderem den gleichen Gegenstand nach dem jeweiligen Stande der Wissenschaft in zusammenfassender Weise behandeln, ein Verzeichnis derjenigen meiner Arbeiten, von deren Ergebnissen das Buch eine zusammenfassende Darstellung gibt.

Leipzig, im März 1906.

Otto Fischer.

Inhaltsverzeichnis.

II. Spezieller Teil.

Einleitung.

Wenn man die Bewegungs- und Gleichgewichtszustände des lebenden menschlichen oder tierischen Körpers der Untersuchung unterwerfen will, so ist man in mehrfacher Hinsicht genötigt, vereinfachende Annahmen über die Zusammensetzung und das mechanische Verhalten der einzelnen Körperteile und über die Gelenkverbindungen zwischen denselben zu machen, welche in der Natur nicht streng verwirklicht sind.

So muß man beispielsweise die mit der Atmung, der Zirkulation des Blutes, sowie der Kontraktion von Muskeln und passiven Anspannung von Gelenkbändern einhergehenden Deformationen und Massenverschiebungen innerhalb der einzelnen Körperteile vernachlässigen und diese selbst als starre Massen auffassen, um die sich darbietenden Probleme überhaupt der mathematischen Behandlung zugänglich zu machen.

Man kann weiterhin in vielen Fällen die Lösung eines Problems dadurch vereinfachen, daß man von der Beweglichkeit in einigen Gelenken abstrahiert und damit die Anzahl der Glieder des lebenden Körpers vermindert, welche in Anbetracht des Zieles der jeweiligen Untersuchung mit genügender Genauigkeit als starre Körper aufgefaßt werden können. So ist ohne weiteres zu erkennen, daß von der Beweglichkeit in den Fingergelenken, ja selbst im Handgelenk bei den Bewegungen des Gehens, Springens und Laufens im allgemeinen kein Gebrauch gemacht wird. Es empfiehlt sich daher, bei der Untersuchung dieser Lokomotionsbewegungen die Hand und die Finger mit dem Unterarm zusammen als einen einzigen starren Körperteil aufzufassen. Dies bedingt eine ganz wesentliche Vereinfachung der Untersuchung, ohne jedoch auf der anderen Seite die Gültigkeit und Genauigkeit der erlangten Resultate wesentlich zu beeinträchtigen. Allerdings darf man in der Reduktion der Gliederzahl nicht zu weit gehen. Mit der Feststellung der Fuß- und Kniegelenke, wie sie von den Brüdern Weber[1]) für ihre Theorien der verschiedenen Lokomotionsarten angenommen war, entfernt man sich zu sehr von den tat-

1) Vgl. W. Weber und E. Weber, Mechanik der menschlichen Gehwerkzeuge, Göttingen 1836 und W. Webers ges. Werke, Berlin 1894, Bd. 6. § 128.

sächlichen Verhältnissen, als daß den Resultaten einer unter dieser Voraussetzung angestellten theoretischen Untersuchung über das Gehen und Laufen noch mit genügender Annäherung strenge Gültigkeit zuzuschreiben wäre.

Eine weitere Vereinfachung macht sich in vielen Fällen hinsichtlich der Gelenkbewegungen erforderlich. Infolge der zum Teil recht komplizierten Formen der Gelenkflächen und in Anbetracht des Umstandes, daß bei der Deformierbarkeit des Knorpelüberzugs der Gelenkenden der Knochen diese Flächen bis zu gewissem Grade während der Bewegung mit dem stetig wechselnden Druck im Gelenk sich ändern, gestaltet sich die Gelenkbewegung am lebenden Körper viel weniger einfach, als dies bei den meisten Maschinengelenken der Fall ist. Man hat es in der Regel nicht einmal mit einem festen Gelenkmittelpunkt, geschweige denn mit einer festen Gelenkachse zu tun, sondern die Bewegung des einen Körperteils gegen den benachbarten findet meist entweder um instantane Schraubenachsen, oder doch wenigstens um instantane Drehungsachsen statt, welche gewöhnlich ihre Richtung stetig etwas ändern und dabei nicht genau, sondern vielfach nur annähernd durch ein und denselben Punkt hindurchgehen, in manchen Fällen, wie z. B. beim Kniegelenk, aber auch sehr beträchtliche Ortsänderungen erfahren. Eine spezielle Kinematik der organischen Gelenke hätte allen diesen Verhältnissen genau Rechnung zu tragen. Für eine kinetische Untersuchung der durch die Muskeln im Leben tatsächlich hervorgebrachten Gliederbewegungen des menschlichen und tierischen Körpers würde eine Berücksichtigung aller Einzelheiten der Gelenkbewegungen in vielen Fällen jedoch nur eine große Komplikation bedeuten, welche in Anbetracht der bei derartigen Untersuchungen notwendigen vereinfachenden Annahmen in gar keinem Verhältnis zu der überhaupt erreichbaren Genauigkeit stände.

Aus diesem Grunde ist es oft nicht nur erlaubt, sondern sogar direkt geboten, die Gelenkbewegungen bis zu gewissem Grade zu schematisieren. Man wird bei kinetischen Untersuchungen eine feste Gelenkachse annehmen, wenn die Lage- und Richtungsänderungen derselben im Vergleich zu dem Umfang der Relativbewegungen der beiden Körperteile nur gering sind; in anderen Fällen wird man wenigstens von einem festen Gelenkmittelpunkte reden. Die Gelenke mit fester Achse kann man dabei als einen Sonderfall der Gelenke mit festem Gelenkmittelpunkt ansehen, indem man einen mittleren Punkt der Achse als den Gelenkmittelpunkt auffaßt. Es gibt allerdings auch Fälle, in denen eine derartige Schematisierung der Gelenkbewegung zu große Abweichungen von den tatsächlichen Verhältnissen nach sich zieht; doch bilden dieselben immerhin die Ausnahme, so daß zunächst von ihnen abgesehen werden kann.

Selbst bei den angedeuteten Vereinfachungen des menschlichen

und tierischen Körpers zeigen dieselben im allgemeinen noch viel mannigfaltigere Gliederung und verwickelteren Bau als die meisten künstlichen Maschinen. Gemeinsam ist aber beiden, den lebenden Organismen wie den Maschinen, daß sie ein zusammenhängendes System von starren Körpern darstellen, welche in irgend einer Weise untereinander durch Gelenke verbunden sind. Ein solches zusammenhängendes System soll als ein „Gelenksystem" bezeichnet sein, und die einzelnen gelenkig miteinander verbundenen Teile desselben mögen die „Glieder" des Gelenksystems heißen. Über die Gelenkverbindungen soll zunächst nur die Annahme gemacht werden, daß sie einen festen Gelenkmittelpunkt besitzen; im übrigen brauchen sie aber durchaus nicht zwangläufig zu sein, wie es allerdings bei den Maschinen die Regel ist, sondern sie dürfen den benachbarten Gliedern Relativbewegungen von ein, zwei und drei Graden der Freiheit ermöglichen. Man wird sie demnach als Gelenke von ein, zwei und drei Graden der Freiheit voneinander zu unterscheiden haben.

Wenn nun ein Glied eines Gelenksystems in Bewegung gesetzt wird, so können dabei im allgemeinen die anderen Glieder nicht gleichzeitig in Ruhe bleiben, sondern diese müssen sich infolge des Gelenkzusammenhanges in irgend einer Weise an der Bewegung des einen Gliedes beteiligen und dadurch auf die letztere modifizierend einwirken. Der einfachste Fall, welcher hierbei eintreten kann, ist der, daß bei der Bewegung des einen Gliedes alle anderen Glieder nur Translationsbewegungen ausführen, d. h. also solche Bewegungen, bei denen alle Punkte derselben in jedem Augenblicke gleich große und parallele Geschwindigkeit besitzen und daher kongruente Bahnen beschreiben.

Nimmt man beispielsweise an, ein Mensch stehe auf einem Bein so, daß zunächst die ganze Fußsohle den Erdboden berührt, und erhebe sich nun auf die Zehen. Bei dieser Bewegung muß der Fuß, mit dem der Mensch allein aufsteht, eine Drehung um eine horizontale Achse ausführen, welche annähernd durch die Köpfe der Mittelfußknochen hindurchgeht. Die übrigen Körperteile können dabei im allgemeinen nicht in ihrer Lage bleiben; ihre Bewegung möge im besonderen Falle so sein, daß sie alle gleichzeitig um dieselbe Strecke gehoben werden, ohne eine Richtungsänderung ihrer Längsachsen zu erfahren. Diese Körperteile führen dann eine Translationsbewegung aus, welche durch die Bahn eines Punktes der Achse des Fußgelenks (oberen Sprunggelenks), etwa des Mittelpunktes derselben, vollständig bestimmt ist. Der ganze menschliche Körper mit Ausnahme des allein aufgesetzten Fußes verhält sich dabei wie ein einziger starrer Körper, welcher durch einen von Seiten des einen Fußes im Fußgelenk auf ihn in vertikaler Richtung von unten nach oben ausgeübten Druck gehoben werden muß und hierdurch rückwärts die

Drehung des Fußes beeinflußt. Sieht man von der Einwirkung des Luftwiderstandes und der sehr geringen Reibung im Gelenk ab, so ist für die Größe dieses Druckes, wie sich herausstellen wird, außer der Spannung der über das Fußgelenk hinwegziehenden und die Erhebung in erster Linie hervorbringenden Muskeln und Gelenkbänder nur noch das Gewicht bzw. die Masse des Körpers ohne Fuß und die Beschleunigung der Aufwärtsbewegung maßgebend. Dagegen hängt derselbe unter den gegebenen Verhältnissen in keiner Weise von der Haltung der einzelnen Glieder und der durch dieselbe bedingten Schwerpunktslage des gehobenen Abschnittes des menschlichen Körpers ab. Der Druck würde genau derselbe sein müssen, wenn zufällig der Schwerpunkt der ganzen gehobenen Masse mit dem Mittelpunkt des Fußgelenkes zusammenfiele, was sich natürlich im vorliegenden Falle nicht erreichen läßt. Aus diesem Grunde erweist es sich als besonders zweckmäßig, für die Untersuchung der Bewegung des aufgesetzten Fußes die Gesamtmasse der übrigen Körperteile im Mittelpunkte des Fußgelenkes konzentriert zu denken und den Einfluß festzustellen, welchen eine solche im Fußgelenk dem Fuß anhaftende Masse auf die Bewegungen desselben ausübt.

In der Regel werden nun beim Erheben auf die Zehen eines Fußes die übrigen Körperteile nicht nur Translationsbewegungen ausführen, sondern es werden dabei auch die Längsachsen der letzteren ihre Richtung im Raume verändern und zum Teil auch Drehungen in den übrigen Gelenken des menschlichen Körpers, z. B. im Kniegelenk und im Hüftgelenk, eintreten. Dann läßt sich aber wenigstens die Untersuchung dadurch wesentlich vereinfachen, daß man von der Bewegung eines jeden der übrigen Körperteile eine Translationsbewegung nach Maßgabe der Bewegung des Fußgelenkmittelpunktes absondert.

In einem anderen Falle möge der menschliche Körper mit dem Rücken auf dem Wasser liegen. Wenn nun das betreffende Individuum durch geeignete Kontraktion von Muskeln etwa seinem rechten Oberschenkel eine Drehung in einer zur Medianebene des Körpers parallelen Ebene erteilt, so werden wiederum die anderen Glieder seines Körpers im allgemeinen mit bewegt werden. Angenommen, diese Bewegungen aller übrigen Glieder seien reine Translationsbewegungen; dann kommen überhaupt nur zweierlei Translationsbewegungen vor. Die beiden durch das rechte Kniegelenk mit dem rechten Oberschenkel verbundenen Glieder, nämlich der rechte Unterschenkel und der rechte Fuß, werden gemeinsam mit allen ihren Punkten die gleiche Bewegung ausführen wie ein Punkt der zur Medianebene des Körpers nahezu senkrechten Knieachse, etwa der Mittelpunkt derselben. Alle noch fehlenden Körperteile, welche durch das rechte Hüftgelenk unmittelbar oder doch wenigstens mittelbar mit dem rechten Oberschenkel

in Verbindung stehen, müssen dagegen eine Translationsbewegung nach Maßgabe der Bewegung des rechten Hüftgelenkmittelpunktes ausführen. Der Oberschenkel wird nun dadurch, daß er die beiden am Kniegelenk und Hüftgelenk hängenden Abschnitte des Körpers mit bewegen muß, veranlaßt, sich ganz anders zu bewegen, als wenn er außer Zusammenhang mit denselben wäre. Für den Einfluß, welchen diese beiden Körperabschnitte allein infolge ihrer Massen auf die Drehung des Oberschenkels unter den vorausgesetzten Umständen ausüben, kommt wiederum die ursprüngliche Haltung des Körpers und die Lage der Schwerpunkte dieser beiden Abschnitte gegenüber den Gelenken gar nicht in Betracht. Die Drehung des Oberschenkels würde unter sonst gleichen Umständen genau die gleiche sein, wenn zufällig der gemeinsame Schwerpunkt des am Kniegelenk hängenden Abschnittes gerade mit dem Kniegelenkmittelpunkt, und der Schwerpunkt des am Hüftgelenk hängenden Abschnittes gerade mit dem Hüftgelenkmittelpunkt zusammenfiele. Daß dies sich beim menschlichen Körper ebensowenig verwirklichen läßt, wie überhaupt der Fall, daß bei der Drehung des Oberschenkels die beiden an ihm hängenden Abschnitte reine Translationsbewegungen ausführen, ist dabei ganz gleichgültig. Wie auch die begleitende Bewegung eines jeden der beiden Abschnitte des Körpers tatsächlich beschaffen sein möge, so kann man aber doch jedenfalls von derselben eine solche reine Translationsbewegung von der dann noch übrig bleibenden Rotationsbewegung abgesondert denken und fragen, in welcher Weise die Translationsbewegungen, und in welcher die Rotationsbewegungen der am Kniegelenk einerseits und am Hüftgelenk andererseits hängenden Körperteile auf die Drehung des rechten Oberschenkels einwirken. Der Einfluß der beiden Translationsbewegungen kann, wie sich zeigen wird, wieder in einfacher und doch zugleich erschöpfender Weise dadurch in Rechnung gezogen werden, daß man sich im Mittelpunkt des rechten Kniegelenks die Massen des rechten Unterschenkels und Fußes, und gleichzeitig im Mittelpunkt des rechten Hüftgelenks die Massen aller übrigen Körperteile, also des ganzen Rumpfes, des Kopfes, des ganzen linken Beins und der beiden Arme konzentriert denkt.

Ein solches fingiertes Massensystem, das man erhält, wenn man im Mittelpunkt eines jeden Gelenks, durch welches ein Glied des menschlichen Körpers mit anderen in Verbindung steht, die Massen derjenigen Körperteile konzentriert denkt, welche bei Durchtrennung dieser Gelenkverbindung von dem betreffenden Gliede abfallen würden, ist von mir als ein „reduziertes System“ bezeichnet worden. In diesem Sinne wird man beim ersten Beispiele auf das „reduzierte Fußsystem“ geführt, indem man im Mittelpunkt des Fußgelenks die Massen aller anderen Körperteile konzentriert denkt. Beim zweiten Beispiel erhält man durch die Konzentration des rechten Unterschenkels und

Fußes im rechten Kniegelenk einerseits, und der Massen der übrigen Körperteile im rechten Hüftgelenk andererseits das rechte „reduzierte Oberschenkelsystem“. Ferner würde man zu dem „reduzierten Rumpfsystem“ gelangen, indem man im Mittelpunkte eines jeden Hüftgelenks die Masse des an ihm hängenden Beins, im Mittelpunkte jedes Schultergelenks die Masse des an demselben befestigten Armes und endlich im Mittelpunkte des Kopfgelenks (Atlantooccipitalgelenks) die Masse des Kopfes konzentriert und dem Rumpfe hinzugefügt denkt.

Aus der Art der Zusammensetzung der reduzierten Systeme ist ohne weiteres zu erkennen, daß ein jedes die Masse des ganzen menschlichen Körpers besitzen muß. Weiterhin sieht man auch leicht ein, daß der Schwerpunkt eines reduzierten Systems in allen Fällen einen festen Punkt des dem System zugrunde liegenden Körperteils darstellt, der aber im allgemeinen von dem Schwerpunkt des betreffenden Körperteils allein weit abliegt. So wird der Schwerpunkt eines reduzierten Fußsystems infolge der großen Massenkonzentration im Fußgelenk sehr nahe am Mittelpunkte dieses Gelenks zu suchen sein. Auch der Schwerpunkt eines reduzierten Oberschenkelsystems wird viel näher dem Hüftgelenkmittelpunkte als dem Einzelschwerpunkte des Oberschenkels liegen. Nur beim reduzierten Rumpfsystem wird sich der Schwerpunkt nicht gar zu weit vom Einzelschwerpunkte des Rumpfes entfernen. Immerhin wird er auch hier nicht mit dem letzteren zusammenfallen können, sondern unterhalb desselben zu suchen sein, weil die Massen der beiden Beine die Massen der Arme und des Kopfes beträchtlich an Größe übertreffen.

Der Schwerpunkt eines reduzierten Systems ist von mir als der „Hauptpunkt des Gliedes“, welches dem reduzierten System zugrunde liegt, und dieses Glied selbst als das „Kernglied des reduzierten Systems“ bezeichnet worden. Demnach stellt also der Hauptpunkt des Fußes den Schwerpunkt des reduzierten Fußsystems, der Hauptpunkt des Rumpfes den Schwerpunkt des reduzierten Rumpfsystems dar, usw.

Es wird sich im Laufe der weiteren Untersuchung zeigen, daß die Einführung der reduzierten Systeme und Hauptpunkte der Glieder eines Gelenksystems keineswegs willkürlich, sondern im Wesen der Sache begründet ist. Es wird sich weiterhin herausstellen, daß der Hauptpunkt eines Gliedes, solange dasselbe im Zusammenhang mit den übrigen ist, für die Kinetik desselben eine ähnliche fundamentale Rolle spielt, wie der Schwerpunkt eines einzigen starren Körpers bei der Untersuchung der durch äußere Kräfte hervorgebrachten Bewegung. Dagegen verliert der Hauptpunkt eines Gliedes sofort seine Bedeutung, wenn auch nur eins von den übrigen Gliedern aus dem Zusammenhang mit dem Körper gelöst wird, wie es beim Menschen zuweilen auf dem Wege der Amputation geschehen muß; es über-

nimmt dann aber ein anderer Punkt des betreffenden Gliedes die Rolle des Hauptpunktes.

Wie die Schwerpunkte der reduzierten Systeme eine wichtige Rolle in der Kinetik der Gelenksysteme spielen, so besitzen auch, wie sich weiter zeigen wird, die Trägheitsmomente und die sie veranschaulichenden Trägheitsellipsoide der reduzierten Systeme große Bedeutung für die kinetischen Untersuchungen.

Eine Mechanik des menschlichen und tierischen Körpers hat daher außer den Massen, Schwerpunkten und Trägheitsmomenten der einzelnen Körperteile vor allen Dingen die Hauptpunkte der Glieder und die Trägheitsmomente der verschiedenen reduzierten Systeme festzustellen und sich eine eingehende Kenntnis von den Eigenschaften der reduzierten Systeme und ihrer Schwerpunkte, d. h. also der Hauptpunkte der einzelnen Glieder, zu verschaffen, bevor sie die sich darbietenden speziellen kinetischen Probleme in Angriff nehmen kann.

Es liegt in der Natur der Sache, daß die reduzierten Systeme und die Hauptpunkte auch für die Kinetik der künstlichen Maschinen Bedeutung haben. Während es bei den Bewegungen des menschlichen Körpers nur selten vorkommt, daß die an einem Glied hängenden anderen Glieder bei der Drehung des ersteren nur Translationsbewegungen ausführen, findet sich dieser Fall bei Maschinen öfter verwirklicht. So ist beispielsweise beim Schubkurbelgetriebe die Bewegung des aus Kreuzkopf, Kolbenstange und Kolben bestehenden Gleitstücks eine reine Translationsbewegung. Daher wird hier der Einfluß derselben auf die Bewegung der Schubstange vollständig dadurch dargestellt, daß man die Masse des ganzen Gleitstücks im Mittelpunkte der Achse des Kreuzkopfs konzentriert und der Schubstange hinzugefügt denkt. (Vgl. die spätere Figur 65, in welcher $G_{2,3}$ diesen Gelenkmittelpunkt darstellt.) Um das „reduzierte Schubstangensystem" zu erhalten, hat man dann außerdem noch im Mittelpunkte des Kurbelzapfens ($G_{1,2}$ in Fig. 65) die Massen des Schwungrades, der Welle, der Kurbel und des Kurbelzapfens vereinigt anzunehmen.

Ein anderes Beispiel, in welchem die an einem Glied hängenden Teile nur Translationsbewegungen ausführen, stellt ein aus Stange und Linse bestehendes physisches Pendel dar, wenn man die Linse nicht fest, sondern um eine zur Schwingungsachse des Pendels parallele Achse durch ihren Mittelpunkt, der zugleich ihr Schwerpunkt ist, drehbar an der Stange anbringt. Wenn dabei die Reibung verschwindend klein ist, und auf das zusammengesetzte Pendel nur die Schwere einwirkt, so wird die Linse, falls ihr nicht von vornherein eine Anfangsrotation um ihre Achse erteilt worden ist, während der Schwingung des Pendels nur Translationsbewegung ausführen; ihr vertikaler Durchmesser wird in allen Stellungen des Pendels vertikal und ihr horizontaler Durchmesser horizontal gerichtet bleiben. Hier

handelt es sich dann gleichzeitig um den Fall, daß der Schwerpunkt der Linse mit dem Mittelpunkt des Gelenks, durch welches dieselbe an der Stange befestigt ist, zusammenfällt. Der Einfluß, welchen die Linse auf die Schwingungen der Pendelstange ausübt, wird infolgedessen vollkommen dadurch in Rechnung gezogen, daß man die ganze Masse der Linse im Mittelpunkt des Verbindungsgelenks konzentriert denkt und damit an Stelle des zweigliedrigen Pendels das „reduzierte Pendelstangensystem" in Betracht zieht. Die Dauer und überhaupt der ganze Verlauf der Schwingung des letzteren sind dann genau die gleichen wie beim zweigliedrigen Pendel. Insbesondere geht hieraus auch hervor, daß die Schwingungsdauer in diesem Falle geringer ausfallen muß, als wenn man die Linse fest mit der Stange verbunden hat; denn es ist nicht schwer einzusehen, daß das Trägheitsmoment des ganzen Pendels sich um das Trägheitsmoment der Linse in bezug auf die Achse des Verbindungsgelenks verringert, wenn man die vorher an der Stange fixierte Linse drehbar an der Stange anbringt.

Durch die Einführung der reduzierten Systeme und Hauptpunkte wird nun nicht nur eine wesentliche Vereinfachung, sondern auch größere Anschaulichkeit der kinetischen Untersuchungen von Gelenksystemen erzielt. Insbesondere leisten dieselben wertvolle Dienste sowohl bei der Aufstellung der Bewegungsgleichungen, als auch bei der Deutung derselben. Dies soll zunächst an einem einfachen ebenen Gelenksystem dargelegt werden. Das einfachste Gelenksystem wäre zwar ein nur aus zwei Gliedern bestehendes. Den folgenden Betungen soll jedoch gleich ein aus drei Gliedern zusammengesetztes Gelenksystem zugrunde gelegt werden, weil die hierbei erzielten Resultate sich besser für ein beliebiges n-gliedriges Gelenksystem verallgemeinern lassen. Andererseits kann man auch leicht von dem dreigliedrigen System auf das zweigliedrige zurückgehen. Zunächst sollen die ebenen Gelenksysteme eingehend untersucht werden. Die hierbei gewonnenen Methoden und Gesichtspunkte lassen sich dann auch für die Untersuchung der räumlichen Gelenksysteme verwerten, wie sich deutlich bei der weiteren Betrachtung des räumlichen zweigliedrigen Gelenksystems zeigen wird. Zuletzt werden dann die für das allgemeine ebene und für das eine spezielle räumliche Gelenksystem abgeleiteten Resultate auf das allgemeine räumliche Gelenksystem übertragen.

Diese zunächst ganz allgemein, aber trotzdem wohl ausreichend elementar gehaltenen Untersuchungen über die verschiedenen Arten von Gelenksystemen bilden den ersten Teil des vorliegenden Buches. In einem zweiten speziellen Teil soll dann gezeigt werden, in welcher Weise sich die allgemeinen Gesichtspunkte und Methoden für eine Kinetik des menschlichen und tierischen Körpers und der Maschinen verwerten lassen.

I. Allgemeiner Teil.

A. Das dreigliedrige ebene Gelenksystem.

1. Über die Lage der Hauptpunkte der Glieder und die Größe der Trägheitsmomente der reduzierten Systeme.

Von drei Körpern seien sowohl der erste und zweite, als auch der zweite und dritte durch je ein Scharniergelenk miteinander verbunden. Die beiden Gelenkachsen seien parallel, und der Schwerpunkt des mittleren Körpers liege mit denselben in einer Ebene. Ferner möge die Ebene, welche in irgend einer Stellung der drei Glieder des Systems die Schwerpunkte derselben verbindet, auf den beiden parallelen Gelenkachsen senkrecht stehen; dann wird dies in allen anderen Stellungen der drei Glieder zueinander auch der Fall sein. Macht man noch die Voraussetzung, daß die durch die drei Schwerpunkte bestimmte Ebene im Raume fest bleibt, so vermag das dreigliedrige System nur ebene Bewegungen auszuführen, so daß es also ein ebenes Gelenksystem darstellt. Es genügt daher in diesem Falle, die Projektion der Bewegung auf die feste Ebene zu untersuchen.

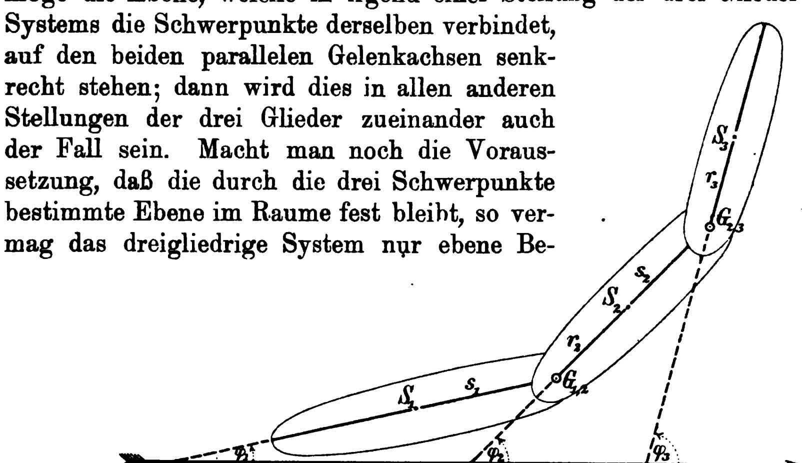


Fig. 1.

Es sollen nun folgende Bezeichnungen eingeführt werden. Die Massen der drei Glieder seien m_1, m_2, m_3 und die Schwerpunkte derselben S_1, S_2, S_3. Die Durchschnittspunkte der beiden Gelenkachsen mit der festen Ebene mögen die Mittelpunkte der beiden Gelenke heißen und mit $G_{1,2}$ bzw. $G_{2,3}$ bezeichnet sein (vgl. Fig. 1). Die Ver-

bindungslinien $\overline{S_1 G_{1,2}}$, $\overline{G_{1,2} G_{2,3}}$ und $\overline{G_{2,3} S_3}$, bezüglich deren Verlängerungen, welche nach der gemachten Voraussetzung immer in die feste Ebene hineinfallen, sollen die Längsachsen der drei Glieder genannt sein; die Längsachse des zweiten Gliedes wird dann gleichzeitig den Schwerpunkt S_2 enthalten. Es ist nun noch nötig, auf jeder der drei Längsachsen eine positive und eine negative Richtung zu unterscheiden. Die positive Richtung soll diejenige sein, in welcher die Längsachse durchlaufen wird, wenn man von S_1 aus den gebrochenen Linienzug $S_1 G_{1,2} G_{2,3} S_3$ beschreibt. Endlich soll vorausgesetzt werden, daß die Längsachse eines jeden der drei Glieder eine Hauptträgheitsachse für seinen Schwerpunkt darstellt, und daß die Trägheitsmomente für alle zur Längsachse senkrechten Achsen durch einen Schwerpunkt gleich groß sind. Dann stellt auch die zu den Gelenkachsen parallele Schwerpunktsachse eines jeden der drei Körper eine Hauptträgheitsachse dar; der zu der letzteren gehörige Trägheitsradius, welcher zunächst allein in Frage kommt, sei für die drei Glieder des Systems bezüglich mit $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ bezeichnet.

Das Gelenksystem besitzt nun im allgemeinsten Falle ebener Bewegung fünf Grade der Freiheit; seine Lage im Raume muß daher durch fünf allgemeine Koordinaten eindeutig bestimmt werden können. Ist insbesondere die ebene Bewegung noch in der Weise beschränkt, daß dabei ein Punkt des Gelenksystems in der festen Ebene seine Lage beibehält, so bleiben dem Gelenksystem nur drei Grade von Bewegungsfreiheit, so daß also die Anzahl der allgemeinen Koordinaten sich noch um zwei verringert. In diesem speziellen Falle, der z. B. vielfach in der Technik vorkommt, wählt man als allgemeine Koordinaten zweckmäßigerweise die Winkel φ_1, φ_2, φ_3 (vgl. Figur 1), welche die positiven Richtungen der drei Längsachsen mit einer bestimmten Richtung in der festen Ebene bilden. Auch im allgemeinen Falle kann man diese Winkel als drei Koordinaten für das Gelenksystem auffassen; man hat denselben dann nur noch zwei Koordinaten hinzuzufügen, welche die Lage irgend eines, etwa in der Ebene der drei Schwerpunkte liegenden, Punktes des Systems in dieser festen Ebene eindeutig bestimmen. Dieser Punkt kann beliebig in irgend einem der drei Glieder angenommen werden, es genügt aber auch, wenn er eine bestimmt definierte Lage zu den drei Gliedern für jede Stellung derselben besitzt. Das letztere trifft z. B. für den Gesamtschwerpunkt S_0 des Gelenksystems zu.

Der Gelenkmittelpunkt $G_{1,2}$ besitze von dem auf der Längsachse des ersten Gliedes liegenden Schwerpunkt S_1 die Entfernung s_1, der auf der Längsachse des zweiten Gliedes liegende Schwerpunkt S_2 von dem Gelenkmittelpunkte $G_{1,2}$ die Entfernung r_2 und der Gelenkmittelpunkt $G_{2,3}$ von diesem Schwerpunkt die Entfernung s_2, endlich der auf der Längsachse des dritten Gliedes liegende Schwerpunkt S_3 vom

Gelenkmittelpunkt $G_{2,3}$ die Entfernung r_3. Bedeutet l_2 den Abstand der beiden Gelenkmittelpunkte voneinander, so hat man dann noch die Beziehung $r_2 + s_2 = l_2$. Alle diese Strecken sollen in derselben Richtung wie die Längsachsen selbst, auf denen sie liegen, positiv gerechnet werden. Es sind also nach dieser Festsetzung alle vier Strecken s_1, r_2, s_2 und r_3 bei der in Figur 1 angenommenen Lage der Schwerpunkte und Gelenkmittelpunkte positiv.

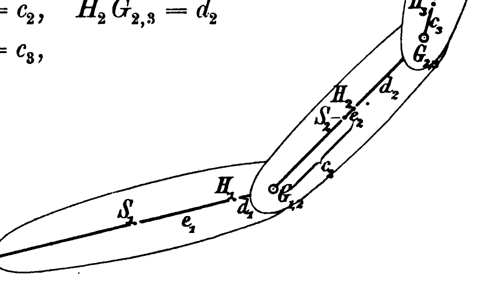
Es sollen nun im Punkte $G_{1,2}$ die Massen m_2 und m_3 konzentriert angenommen und dem ersten Glied hinzugefügt werden; ferner denke man für das zweite Glied im Punkte $G_{1,2}$ die Masse m_1 und im Punkte $G_{2,3}$ die Masse m_3 konzentriert und ihm hinzugefügt, und endlich im Punkte $G_{2,3}$ die Massen m_1 und m_2 konzentriert und dem dritten Glied hinzugefügt. Dabei ist natürlich sowohl $G_{1,2}$ als auch $G_{2,3}$ das eine Mal als fester Punkt des einen, das andere Mal als fester Punkt des anderen der beiden durch das betreffende Gelenk verbundenen Glieder aufzufassen. Auf diese Weise entstehen die drei reduzierten Systeme, von denen jedes die Gesamtmasse $m_1 + m_2 + m_3$ des ganzen Gelenksystems besitzt, welche kurz durch m_0 bezeichnet sein möge. Die Schwerpunkte der drei reduzierten Systeme stellen die Hauptpunkte der drei Glieder des Gelenksystems dar; die letzteren mögen mit H_1, H_2 und H_3 bezeichnet sein.

In der folgenden Figur 2 sind die drei Hauptpunkte auf den Längsachsen für ein bestimmtes Verhältnis der drei Massen eingezeichnet worden; die Lage derselben ist natürlich durch die Lage der Schwerpunkte S_1, S_2, S_3 und das Größenverhältnis der drei Massen m_1, m_2, m_3 genau bestimmt.

Es mögen nun die folgenden Bezeichnungen eingeführt werden:

$$S_1 H_1 = e_1, \quad H_1 G_{1,2} = d_1,$$
$$S_2 H_2 = e_2, \quad G_{1,2} H_2 = c_2, \quad H_2 G_{2,3} = d_2$$
$$S_3 H_3 = e_3, \quad G_{2,3} H_3 = c_3,$$

wobei wiederum die einzelnen Strecken in derselben Richtung wie die Längsachsen selbst positiv gerechnet werden sollen. Es ist zu beachten, daß die Strecke c_h den Abstand des Hauptpunktes des $h$ten Gliedes von demjenigen Gelenkmittelpunkte dieses Gliedes bedeuten soll, auf welchen man beim positiven Durchlaufen des Zuges der Längsachsen zuerst stößt, während die Strecke d_h umgekehrt den


Fig. 2.

Abstand des anderen Gelenkmittelpunktes des $h$ten Gliedes vom Hauptpunkte desselben angeben soll. Die Strecke e_h soll dagegen stets den Abstand des $h$ten Hauptpunktes vom zugehörigen Schwerpunkt bedeuten. Demnach haben in Figur 2 alle Strecken mit Ausnahme von e_3 positive Werte.

Aus der Bedeutung der Hauptpunkte als Schwerpunkte der drei reduzierten Systeme folgt nun, daß das Moment der im Hauptpunkte eines Gliedes konzentrierten Gesamtmasse des ganzen Gelenksystems für irgend einen Bezugspunkt gleich der Summe der Momente der im Einzelschwerpunkte des betreffenden Gliedes konzentrierten Masse desselben und der in den Gelenkmittelpunkten dieses Gliedes konzentriert gedachten Massen der anhängenden Glieder ist. Nimmt man als Bezugspunkt den Hauptpunkt selbst, so muß demnach die Summe der Momente der im Einzelschwerpunkt und den Gelenkmittelpunkten des Gliedes konzentrierten Massen verschwinden. Bei der Festsetzung über die positive Richtung der einzelnen Strecken und der in Figur 2 angenommenen Lage des Hauptpunktes H_2 des zweiten Gliedes erhält man daher zunächst die folgenden Relationen:

$$\begin{aligned} -m_1 e_1 + (m_2 + m_3) d_1 &= 0 \\ -m_1 c_2 - m_2 e_2 + m_3 d_2 &= 0 \\ (m_1 + m_2) c_3 + m_3 e_3 &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Die Strecken d_1, c_2, d_2 und c_3, durch welche die Lage der drei Hauptpunkte zu den beiden Gelenkmittelpunkten bestimmt wird, sollen als „Hauptstrecken" bezeichnet sein. Die Größen derselben lassen sich leicht aus dem angeführten Momentensatz ableiten, wenn man als Bezugspunkte die ein Glied begrenzenden Gelenkmittelpunkte verwendet. Man erhält auf diese Weise die Formeln:

$$\begin{aligned} m_0 d_1 &= m_1 s_1 \\ m_0 c_2 &= m_2 r_2 + m_3 l_2 \\ m_0 d_2 &= m_1 l_2 + m_2 s_2 \\ m_0 c_3 &= m_3 r_3. \end{aligned} \tag{2}$$

Verwendet man endlich als Bezugspunkt den Einzelschwerpunkt eines jeden Gliedes, so wird man auf die folgenden Formeln (3) geführt, welche die Entfernung der Hauptpunkte von den zugehörenden Einzelschwerpunkten in Beziehung zu den Abständen der letzteren von den Gelenkmittelpunkten setzen:

$$\begin{aligned} m_0 e_1 &= (m_2 + m_3) s_1 \\ m_0 e_2 &= -m_1 r_2 + m_3 s_2 \\ m_0 e_3 &= -(m_1 + m_2) r_3. \end{aligned} \tag{3}$$

Aus allen diesen Relationen geht übereinstimmend hervor, daß die Lage des Hauptpunktes eines Gliedes nicht von den absoluten Größen der Massen der drei Glieder des Gelenksystems, sondern nur von deren Verhältnissen abhängt.

Außer den Hauptpunkten der drei Glieder sind nun für die Kinetik des Gelenksystems auch die Trägheitsmomente der reduzierten Systeme von Bedeutung. Bei den die Probleme vereinfachenden Voraussetzungen über die Massenverteilung und die Lage des Schwerpunktes in den einzelnen Gliedern ergibt sich zunächst, daß die Längsachse eines Gliedes auch für das entsprechende reduzierte System eine Hauptträgheitsachse darstellt, und daß auch hier das Trägheitsellipsoid ein Rotationsellipsoid mit der Längsachse des Gliedes als Rotationsachse ist. Daher stellt auch die zu den Gelenkachsen parallele Hauptpunktsachse eine Hauptträgheitsachse des reduzierten Systems dar. Bezeichnet man den zu letzterer gehörenden Trägheitsradius für die drei Glieder bezüglich mit k_1, k_2, k_3 und beachtet, daß jedes reduzierte System die Gesamtmasse m_0 besitzt, so ergeben sich aus der Zusammensetzung der drei reduzierten Systeme folgende Werte der entsprechenden Trägheitsmomente:

$$(4)\qquad \begin{aligned} m_0 k_1^2 &= m_1(\varkappa_1^2 + e_1^2) + (m_2 + m_3) d_1^2 \\ m_0 k_2^2 &= m_2(\varkappa_2^2 + e_2^2) + m_1 c_2^2 + m_3 d_2^2 \\ m_0 k_3^2 &= m_3(\varkappa_3^2 + e_3^2) + (m_1 + m_2) c_3^2. \end{aligned}$$

Für jede andere, ebenfalls zu den Gelenkachsen parallele Achse nehmen die Trägheitsmomente der reduzierten Systeme größere Werte an; sie vermehren sich dann nach einem bekannten Satze über die Trägheitsmomente um den Betrag $m_0 a^2$, unter a den Abstand der neuen Achse von dem Hauptpunkte des betreffenden Gliedes verstanden.

Die Berechnung der Hauptstrecken, durch welche die Lage der Hauptpunkte der drei Glieder bestimmt wird, möge an einem speziellen Beispiel durchgeführt werden.

Die Gewichte der drei Glieder seien $G_1 = 5{,}82$ kg, $G_2 = 6{,}78$ kg und $G_3 = 7{,}40$ kg. Ferner möge der Schwerpunkt S_1 von dem Gelenkmittelpunkt $G_{1,2}$ die Entfernung $s_1 = +\,38$ cm, der Schwerpunkt S_2 vom Gelenkmittelpunkte $G_{1,2}$ den Abstand $r_2 = +\,27$ cm, der Gelenkmittelpunkt $G_{2,3}$ vom Schwerpunkte S_2 den Abstand $s_2 = +\,30$ cm, und der Schwerpunkt S_3 vom Gelenkmittelpunkt $G_{2,3}$ die Entfernung $r_3 = +\,25$ cm besitzen. Die zwischen den beiden Gelenkmittelpunkten liegende Strecke der Längsachse des zweiten Gliedes hat demnach die Länge $l_2 = +\,57$ cm.

Beachtet man, daß die Massen der Glieder in dem Verhältnis ihrer Gewichte stehen, so berechnen sich aus diesen Angaben für die in Betracht kommenden Hauptstrecken nach (2) die Größen

$d_1 = +11{,}06$ cm; $c_2 = +30{,}24$ cm; $d_2 = +26{,}76$ cm und $c_3 = +9{,}25$ cm.

Hieraus folgt aber für die Abstände der drei Hauptpunkte von den zugehörigen Schwerpunkten

$$e_1 = +26{,}94 \text{ cm}; \quad e_2 = +3{,}24 \text{ cm} \quad \text{und} \quad e_3 = -15{,}75 \text{ cm}.$$

Zu den gleichen Werten gelangt man natürlich auch, wenn man der Berechnung direkt die Formeln (3) zugrunde legt. Figur 1 und 2 und die nächstfolgenden Figuren veranschaulichen dieses Gelenksystem in verkleinertem Maßstabe.

2. Zusammenhang der Hauptpunkte mit dem Gesamtschwerpunkte des Gelenksystems und den Schwerpunkten der Teilsysteme.

Zieht man von einem beliebigen Punkte O aus die Verbindungsvektoren nach den drei Einzelschwerpunkten S_h und dem Gesamtschwerpunkte S_0, so findet bekanntlich die von Leibniz herstammende Relation statt

$$(5) \qquad m_0 \cdot \overline{OS_0} = \sum_1^3{}^h m_h \cdot \overline{OS_h},$$

wobei der Strich über den Buchstaben eine Strecke als Vektor kennzeichnen, und infolgedessen das Summenzeichen die geometrische Addition andeuten soll. Bringt man die Gesamtmasse m_0 auf die rechte Seite und setzt für das Verhältnis $m_h : m_0$ kurz μ_h, so nimmt die Relation die Form an

$$(6) \qquad \overline{OS_0} = \sum_1^3{}^h \mu_h \cdot \overline{OS_h}.$$

Es ist also der von einem beliebigen Punkte O aus nach dem Gesamtschwerpunkte S_0 gezogene Vektor gleich der Summe der nach den drei Einzelschwerpunkten S_h gezogenen, aber im Verhältnis $\mu_h : 1$ verkleinerten Vektoren.

Der Punkt O ist ganz beliebig. Läßt man denselben insbesondere mit dem Hauptpunkte H_1 des ersten Gliedes zusammenfallen, so hat man nach (6):

$$(7) \qquad \overline{H_1 S_0} = \mu_1 \cdot \overline{H_1 S_1} + \mu_2 \cdot \overline{H_1 S_2} + \mu_3 \cdot \overline{H_1 S_3}.$$

Ersetzt man nun die Vektoren $\overline{H_1 S_2}$ und $\overline{H_1 S_3}$ bezüglich durch die Vektorsummen (vgl. die Figuren 1 und 2) $\bar{d}_1 + \bar{r}_2$ und $\bar{d}_1 + \bar{l}_2 + \bar{r}_3$ und beachtet, daß $\overline{H_1 S_1} = -\bar{e}_1$, so geht die Relation über in

$$(8) \qquad \overline{H_1 S_0} = -\mu_1 \bar{e}_1 + \mu_2 \bar{d}_1 + \mu_2 \bar{r}_2 + \mu_3 \bar{d}_1 + \mu_3 \bar{l}_2 + \mu_3 \bar{r}_3.$$

Infolge der Bedeutung der Zahlen μ_h erhält man dann in Rücksicht auf die erste der Relationen (1) und die zweite und vierte der Re-

lationen (2) die einfache Beziehung:

$$\overline{H_1 S_0} = \bar{c}_2 + \bar{c}_3. \tag{9}$$

Daraus folgt aber, daß man von dem Hauptpunkte H_1 des ersten Gliedes aus auf sehr einfache Weise zu dem Gesamtschwerpunkte S_0 des dreigliedrigen Gelenksystems gelangt. Man braucht zu diesem Zwecke nur die beiden dem zweiten, bezüglich dritten Gliede angehörenden Hauptstrecken c_2 und c_3 geometrisch zu addieren. Der Endpunkt dieses Vektorzuges ist dann immer der Gesamtschwerpunkt S_0.

Verlegt man den oben erwähnten Bezugspunkt O nach H_2, so hat man weiterhin

$$\overline{H_2 S_0} = \mu_1 \cdot \overline{H_2 S_1} + \mu_2 \cdot \overline{H_2 S_2} + \mu_3 \cdot \overline{H_2 S_3}. \tag{10}$$

Ersetzt man hier $\overline{H_2 S_1}$ durch $-\bar{c}_2 - \bar{s}_1$, ferner $\overline{H_2 S_2}$ durch $-\bar{e}_2$, und $\overline{H_2 S_3}$ durch $\bar{d}_2 + \bar{r}_3$, so erhält man zunächst

$$\overline{H_2 S_0} = -\mu_1 \bar{c}_2 - \mu_1 \bar{s}_1 - \mu_2 \bar{e}_2 + \mu_3 \bar{d}_2 + \mu_3 \bar{r}_3. \tag{11}$$

Unter Berücksichtigung der zweiten Relation von (1) und der ersten und vierten Relation von (2) wird schließlich hieraus:

$$\overline{H_2 S_0} = -\bar{d}_1 + \bar{c}_3. \tag{12}$$

Man kann also auch von dem Hauptpunkte H_2 des zweiten Körpers ausgehend durch geometrische Addition zweier Strecken zu dem Gesamtschwerpunkte gelangen. Es sind zu diesem Zwecke nur die Hauptstrecken d_1 und c_3 des ersten und dritten Körpers in der von dem zweiten Körper abgewendeten Richtung zu benutzen.

Endlich erhält man bei Verwendung des Punktes H_3 als Ausgangspunkt

$$\overline{H_3 S_0} = \mu_1 \cdot \overline{H_3 S_1} + \mu_2 \cdot \overline{H_3 S_2} + \mu_3 \cdot \overline{H_3 S_3}. \tag{13}$$

Da $\overline{H_3 S_1} = -\bar{c}_3 - \bar{l}_2 - \bar{s}_1$; $\overline{H_3 S_2} = -\bar{c}_3 - \bar{s}_2$ und $\overline{H_3 S_3} = -\bar{e}_3$, so folgt zunächst

$$\overline{H_3 S_0} = -\mu_1 \bar{c}_3 - \mu_1 \bar{l}_2 - \mu_1 \bar{s}_1 - \mu_2 \bar{c}_3 - \mu_2 \bar{s}_2 - \mu_3 \bar{e}_3, \tag{14}$$

und hieraus in Rücksicht auf die dritte Relation von (1) sowie die dritte und erste Relation von (2):

$$\overline{H_3 S_0} = -\bar{d}_2 - \bar{d}_1. \tag{15}$$

Man hat also nur die beiden innerhalb des Linienzuges der Längsachsen dem dritten Gliede am nächsten liegenden Hauptstrecken d_2 und d_1 des zweiten und ersten Gliedes, und zwar ebenfalls in einer von dem dritten Gliede abgewendeten Richtung, von dem Hauptpunkte H_3 aus geometrisch zu addieren, um ebenfalls auf den Gesamtschwerpunkt S_0 zu treffen.

Es gilt also der

Satz: Man gelangt stets zu dem Gesamtschwerpunkte S_0 des Gelenksystems, wenn man von irgend einem Hauptpunkte H_j der drei Glieder aus die geometrische Summe der zu den beiden anderen Gliedern gehörenden Hauptstrecken bildet, welche innerhalb des gebrochenen Linienzuges der drei Längsachsen dem j-ten Gliede am nächsten liegen, und dabei diese Hauptstrecken in einer von H_j abgewendeten Richtung verwendet.

Führt man die hierdurch gegebene Konstruktion des Gesamtschwerpunktes S_0 auf verschiedene Weise aus, wie es in Figur 3 geschehen ist, so tritt der enge Zusammenhang der drei Hauptpunkte

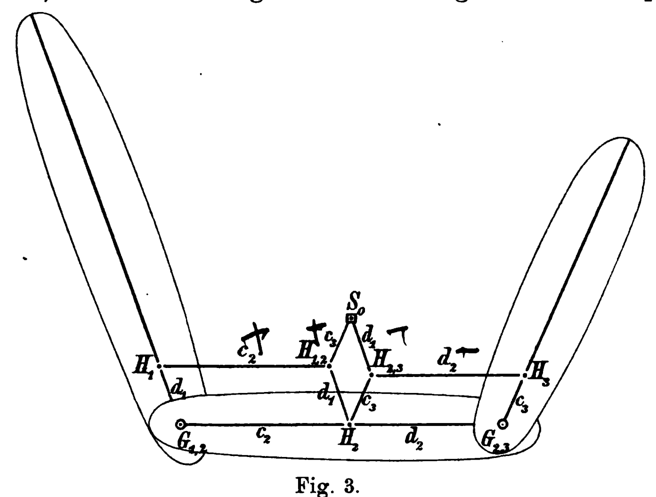


Fig. 3.

mit dem Gesamtschwerpunkte sehr klar hervor. Dabei ist besonders zu beachten, daß die sechs für die Konstruktion verwendeten Hauptstrecken mit den auf den Längsachsen der drei Glieder selbst liegenden Hauptstrecken drei Parallelogramme zusammensetzen.

Man wird nun durch diese Konstruktion geradezu darauf hingewiesen, einen Mechanismus an dem dreigliedrigen Gelenksystem anzubringen, welcher automatisch die Lage des Gesamtschwerpunktes für jede Stellung der drei Glieder zueinander angibt. Man braucht sich nur die in Figur 3 eingezeichneten sechs Hauptstrecken, welche von den Hauptpunkten aus zu dem Schwerpunkte S_0 hinführen, so wie es in Figur 4 angedeutet ist, als starre Stäbe ausgeführt zu denken, die zum Teil in den Hauptpunkten, zum Teil in den Punkten $H_{1,2}$, $H_{2,3}$ und S_0 durch Scharniergelenke mit den drei Gliedern, bezüglich untereinander, gelenkig verbunden sind, und der Mechanismus für die automatische Einstellung des Gesamtschwerpunktes ist fertig. Natürlich

müssen dabei die Achsen der verschiedenen Scharniergelenke zu den Achsen der beiden, die drei Glieder untereinander verbindenden Gelenke parallel gerichtet sein.

Hätte man ein System von nur zwei Gliedern, die durch ein Gelenk mit dem Mittelpunkte G verbunden sind, so würde sich die Konstruktion des Gesamtschwerpunktes mit Hilfe der Hauptpunkte noch

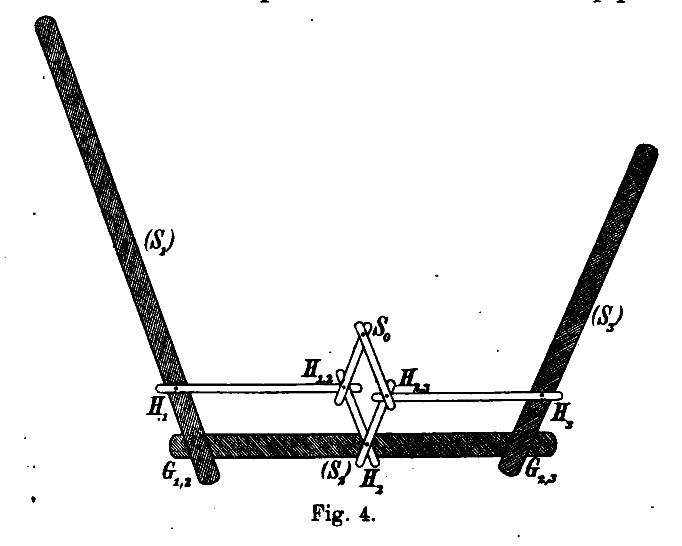


Fig. 4.

einfacher stellen. Unter den Hauptpunkten der beiden Glieder sind dabei wieder die Schwerpunkte der beiden reduzierten Systeme zu verstehen, welche man dadurch erhält, daß man jedem der beiden Glieder die im Gelenkmittelpunkte G konzentriert angenommene Masse des anderen Gliedes hinzugefügt denkt. Daraus geht aber hervor, daß der Hauptpunkt H_1 die Strecke $S_1 G$ auf der Längsachse des ersten Gliedes (vgl. Fig. 5), und der Hauptpunkt H_2 die Strecke $G S_2$ auf der Längsachse des zweiten Gliedes im gleichen Verhältnis, nämlich im Verhältnis der beiden Massen m_2 und m_1 teilt. Da nun auch der Gesamtschwerpunkt S_0 des zweigliedrigen Gelenksystems die Verbindungsstrecke $S_1 S_2$ der beiden Einzelschwerpunkte in demselben Verhältnis teilt, so ist aus Figur 5 ohne weiteres zu erkennen, daß die vier Punkte S_0, H_1, G und H_2 die Ecken eines Parallelogramms darstellen. Be-

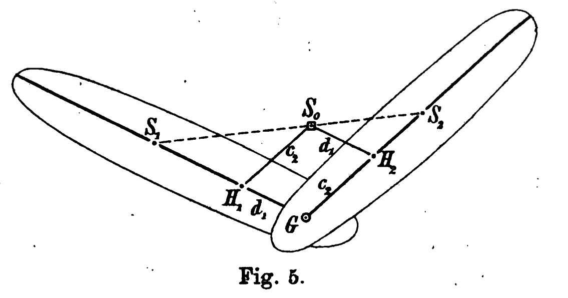


Fig. 5.

zeichnet man wieder die Hauptstrecke $H_1 G$ mit d_1 und die Hauptstrecke $G H_2$ mit c_2 und rechnet dieselben in der Richtung, in welcher sie von S_1 über G nach S_2 durchlaufen werden, positiv, so finden demnach die beiden Beziehungen statt:

$$(16) \qquad \begin{aligned} \overline{H_1 S_0} &= + \bar{c}_2, \\ \overline{H_2 S_0} &= - \bar{d}_1. \end{aligned}$$

Es gilt also für das zweigliedrige System der

Satz: Man gelangt zu dem Gesamtschwerpunkte S_0 des zweigliedrigen Gelenksystems, wenn man von einem der beiden Hauptpunkte aus die zum anderen Gliede gehörende Hauptstrecke in der von ihm abgewendeten Richtung abträgt.

Mit Hilfe dieses Satzes über das zweigliedrige System kann man sich nun leicht Rechenschaft über die Bedeutung der beim dreigliedrigen System in Figur 3 mit $H_{1,2}$ und $H_{2,3}$ bezeichneten Kreuzungspunkte je dreier Hauptstrecken geben.

Denkt man sich nämlich beim dreigliedrigen Gelenksystem einmal die ersten beiden Körper gegeneinander festgestellt, so hat man nur noch ein Gelenksystem von zwei Gliedern mit den Massen $(m_1 + m_2)$ und m_3 vor sich. Die Hauptpunkte H_1 und H_2 verlieren dann ihre Bedeutung, und an ihre Stelle tritt ein einziger Hauptpunkt des aus den beiden ersten Gliedern zusammengesetzten starren Systems. Dieser Hauptpunkt ist nun gerade der in Figur 3 mit $H_{1,2}$ bezeichnete Punkt. Davon kann man sich leicht auf folgende Weise überzeugen.

Zunächst ist ersichtlich, daß H_3 nach wie vor seine Bedeutung als Hauptpunkt eines der beiden Glieder des nunmehr zweigliedrigen Systems beibehält; denn seine Lage hing ja auch beim dreigliedrigen System nur von der Gesamtmasse $m_1 + m_2$ der beiden anderen Glieder, nicht aber von der gegenseitigen Stellung derselben ab. Da ferner $G_{2,3}$ den Mittelpunkt des einzigen Verbindungsgelenkes darstellt, so stellt auch c_3 die eine der beiden Hauptstrecken dar. Der Hauptpunkt des aus den ersten beiden Gliedern zusammengesetzten, als starr aufgefaßten Systems muß daher nach dem obigen Satze über das zweigliedrige System mit dem Endpunkte des vom Gesamtschwerpunkte S_0 aus in umgekehrter Richtung abgetragenen Vektors $\bar{c}_3$, d. h. also mit dem Punkte $H_{1,2}$ zusammenfallen. Gleichzeitig folgt hieraus, daß die zum ersten der beiden Glieder gehörende Hauptstrecke mit der Verbindungsstrecke $G_{2,3} H_{1,2}$ identisch ist, und daß deren Verlängerung durch den Schwerpunkt $S_{1,2}$ des aus dem ersten und zweiten Gliede bestehenden Teilsystems hindurchgeht (vgl. Fig. 6 auf Seite 20), wobei

$$(17) \qquad G_{2,3} H_{1,2} : H_{1,2} S_{1,2} = (m_1 + m_2) : m_3,$$

also auch

$$(18)\qquad G_{2,3}S_{1,2} : G_{2,3}H_{1,2} = m_0 : (m_1 + m_2)$$

ist.

In der Tat erkennt man leicht aus Figur 3, daß die Strecke $H_3 S_0$ gleich der Strecke $\overline{G_{2,3} H_{1,2}}$ ist, wie es nach dem obigen Satze der Fall sein muß.

Solange die beiden ersten der drei Glieder gegeneinander festgestellt sind, ist auch $H_{1,2}$ ein fester Punkt in diesem starren System. Wenn dagegen den beiden ersten Gliedern wieder Beweglichkeit gegeneinander verliehen wird, so ändert der Punkt $H_{1,2}$ bei der Bewegung im ersten Zwischengelenk ($G_{1,2}$) fortwährend seine Lage relativ zu den beiden Gliedern, wie ja auch der gemeinsame Schwerpunkt $S_{1,2}$ dieser beiden Glieder nicht festliegt. Auch im Falle freier Beweglichkeit soll für den Punkt $H_{1,2}$ die Bezeichnung als „Hauptpunkt des Systems der beiden ersten Glieder" beibehalten werden.

Man erkennt nun ohne weiteres auch, daß der in Figur 3 mit $H_{2,3}$ bezeichnete Punkt den in seiner Lage veränderlichen Hauptpunkt des aus dem zweiten und dritten Gliede bestehenden Gelenksystems darstellt. Die zugehörige veränderliche Hauptstrecke ist $G_{1,2} H_{2,3}$; auf ihrer Verlängerung liegt der veränderliche Schwerpunkt $S_{2,3}$ des aus dem zweiten und dritten Gliede zusammengesetzten Teilsystems (vgl. Fig. 6), und zwar so, daß

$$(19)\qquad G_{1,2}H_{2,3} : H_{2,3}S_{2,3} = (m_2 + m_3) : m_1 ,$$

also auch

$$(20)\qquad G_{1,2}S_{2,3} : G_{1,2}H_{2,3} = m_0 : (m_2 + m_3) .$$

Die beiden veränderlichen Systemhauptpunkte $H_{1,2}$ und $H_{2,3}$ lassen sich für jede Gelenkstellung leicht mit Hilfe der Hauptpunkte und Hauptstrecken der drei Glieder bestimmen. Um zu $H_{1,2}$ zu gelangen, braucht man nur entweder von H_1 aus den Vektor $+\bar{c}_2$ oder von H_2 aus den Vektor $-\bar{d}_1$ zu ziehen. In entsprechender Weise stellt sich $H_{2,3}$ als Endpunkt des von H_2 aus gezogenen Vektors $+\bar{c}_3$, oder des von H_3 aus gezogenen Vektors $-\bar{d}_2$ dar.

Man gewinnt also den veränderlichen Hauptpunkt eines Systems zweier durch ein Gelenk verbundenen Körper auf ganz entsprechende Weise wie den Gesamtschwerpunkt dieses zweigliedrigen Systems. Es ist dabei nur nicht außer acht zu lassen, daß die dem System der drei Glieder angehörenden Hauptpunkte H_1 und H_2 natürlich nicht mit den Hauptpunkten zusammenfallen, welche man für die beiden ersten Glieder erhält, wenn man das dritte Glied ganz vom System abgelöst denkt. Die letzteren sind es aber, welche der Konstruktion des Gesamtschwerpunktes $S_{1,2}$ der beiden ersten Glieder zugrunde gelegt werden müssen. Ebensowenig darf man bei der Konstruktion des Gesamtschwerpunktes $S_{2,3}$ des zweiten und dritten Gliedes von den

dem System der drei Glieder angehörenden Hauptpunkten H_2 und H_3 ausgehen, sondern von den Hauptpunkten, die man nach Abtrennung des ersten Gliedes erhält. Man hat eben immer im Auge zu behalten, daß der Hauptpunkt eines Gliedes nicht allein durch die Massenverteilung innerhalb desselben, sondern auch durch den Zusammenhang dieses Gliedes mit allen anderen Gliedern des Gelenksystems bestimmt wird. Scheidet ein Glied aus dem System aus, so verlieren die sämtlichen Hauptpunkte ihre Bedeutung und sind durch andere, den abgeänderten Verhältnissen entsprechende, zu ersetzen. Die neuen Hauptpunkte sind aber in einem solchen Falle leicht aus den alten abzuleiten.

Entfernt man zum Beispiel aus dem dreigliedrigen Gelenksystem das dritte Glied, so rückt der Hauptpunkt des ersten Gliedes, welcher jetzt mit H_1' bezeichnet sein soll, von $G_{1,2}$, und der Hauptpunkt des zweiten Gliedes, welcher durch H_2' bezeichnet sein möge, von $G_{2,3}$

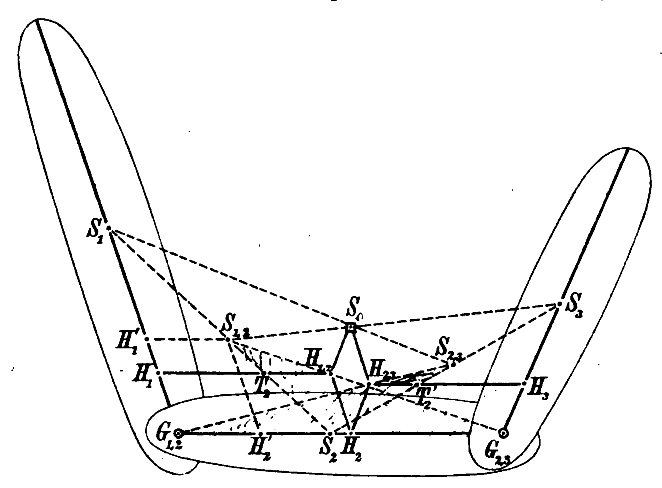


Fig. 6.

fort. Der Hauptpunkt H_1' teilt dabei die Strecke $S_1 G_{1,2}$ auf der Längsachse des ersten Gliedes (vgl. Fig. 6) im Verhältnis $m_2 : m_1$; denn in $G_{1,2}$ hat man jetzt nur die Masse m_2 konzentriert zu denken. Der Hauptpunkt H_2' teilt in demselben Verhältnis die Strecke $G_{1,2} S_2$ auf der Längsachse des zweiten Gliedes.

Von H_1' ausgehend gelangt man rückwärts wieder zu dem alten Hauptpunkte H_1, wenn man in $G_{1,2}$ noch die Masse m_3 hinzufügt. Es kann daher H_1 auch als gemeinsamer Schwerpunkt zweier in H_1' und $G_{1,2}$ konzentrierten Massen von der Größe $(m_1 + m_2)$ und m_3 aufgefaßt werden. Aus diesem Grunde hat man auch die Beziehung

$$m_0 \cdot G_{1,2} H_1 = (m_1 + m_2) \cdot G_{1,2} H_1'$$

oder

(21) $$G_{1,2}H_1' : G_{1,2}H_1 = m_0 : (m_1 + m_2).$$

In entsprechender Weise kann man H_2 als den gemeinsamen Schwerpunkt zweier in H_2' und $G_{2,3}$ konzentrierten Massen $(m_1 + m_2)$ und m_3 auffassen, so daß man findet

(22) $$G_{2,3}H_2' : G_{2,3}H_2 = m_0 : (m_1 + m_2).$$

Es ist also durch die Ablösung des dritten Gliedes die Entfernung des zweiten Hauptpunktes von $G_{2,3}$ in demselben Maße vergrößert worden, wie die Entfernung des ersten Hauptpunktes von $G_{1,2}$, nämlich im Verhältnis $m_0 : (m_1 + m_2)$. Da man zu dem Schwerpunkte $S_{1,2}$ des aus dem ersten und zweiten Gliede zusammengesetzten Systems gelangt, indem man von H_2' die Strecke $G_{1,2}H_1'$ parallel abträgt, so gilt auch die Proportion (vgl. Fig. 6)

(23) $$H_2'S_{1,2} : H_2H_{1,2} = G_{2,3}H_2' : G_{2,3}H_2 = G_{2,3}S_{1,2} : G_{2,3}H_{1,2} = m_0 : (m_1 + m_2),$$

wie schon oben auf anderem Wege abgeleitet worden ist.

Man bestätigt nun auch leicht, daß bei Verminderung des dreigliedrigen Systems um das erste Glied sowohl die Entfernung des Hauptpunktes des zweiten Gliedes von $G_{1,2}$, als auch die Entfernung des Hauptpunktes des dritten Gliedes von $G_{2,3}$ zunimmt, und zwar beidemal in demselben Verhältnis $m_0 : (m_2 + m_3)$. Hieraus folgt dann wiederum, daß der Schwerpunkt $S_{2,3}$ des aus dem zweiten und dritten Gliede zusammengesetzten Systems auf der Verlängerung der Strecke $G_{1,2}H_{2,3}$ (vgl. Fig. 6) liegt, und zwar so, daß seine Entfernung von $G_{1,2}$ zu der Entfernung des Punktes $H_{2,3}$ von $G_{1,2}$ im Verhältnis $m_0 : (m_2 + m_3)$ steht.

Diese Beziehungen kommen auch beim unverkürzten dreigliedrigen System in Betracht, wenn im besonderen Falle eins der beiden Endglieder, etwa das dritte Glied, durch äußere Kräfte festgestellt ist, so daß es sich an den Bewegungen des Systems nicht beteiligen kann. Dann ist es zweckmäßig, die Hauptpunkte H_1' und H_2' zu verwenden und die Sache so aufzufassen, als ob nur die beiden ersten Glieder vorhanden wären; denn für die Kinetik des Gliedersystems kommt in diesem Falle bedingter Beweglichkeit im Grunde nur noch die Lage und Bewegung des Schwerpunktes $S_{1,2}$ in Frage.

Sind zwei von den drei Gliedern abgelöst oder durch äußere Kräfte festgestellt, so tritt an Stelle des Hauptpunktes des jetzt allein beweglichen dritten Gliedes, welches dann nur eins der beiden Endglieder sein könnte, der Einzelschwerpunkt desselben.

Die Verbindungslinie der beiden Schwerpunkte S_1 und S_2 schneidet die von H_1 nach $H_{1,2}$ führende Hauptstrecke c_2 in einem bestimmten Punkte T_2 (vgl. Fig. 6), dessen Lage von der Gelenkstellung in $G_{1,2}$

unabhängig ist; denn in den beiden ähnlichen Dreiecken $S_{1,2} T_2 H_{1,2}$ und $S_{1,2} S_2 G_{2,3}$ hat das Verhältnis entsprechender Seiten, z. B. der Seiten $S_{1,2} H_{1,2}$ und $S_{1,2} G_{2,3}$, den konstanten Wert $m_3 : m_0$. Dies geht unmittelbar aus der Bedeutung von $H_{1,2}$ als Schwerpunkt der in $S_{1,2}$ und $G_{2,3}$ vereinigt zu denkenden Massen $(m_1 + m_2)$ und m_3 hervor. Da nun $S_2 G_{2,3}$ die Länge s_2 besitzt, so ergibt sich

$$T_2 H_{1,2} = \frac{m_3}{m_0} s_2 . \tag{24}$$

Nach der zweiten Formel von (2) kann man aber infolge von $l_2 = r_2 + s_2$ die Länge der Hauptstrecke c_2 in der Form schreiben

$$c_2 = \frac{m_2 + m_3}{m_0} r_2 + \frac{m_3}{m_0} s_2 , \tag{25}$$

woraus hervorgeht, daß durch den Punkt T_2 die Hauptstrecke c_2 in die beiden Teile $\frac{m_2 + m_3}{m_0} r_2$ und $\frac{m_3}{m_0} s_2$ zerlegt wird.

Hat man T_2 auf $H_1 H_{1,2}$ bestimmt, so kann man dann ohne Verwendung des Schwerpunktes S_1 den Teilschwerpunkt $S_{1,2}$ auch als Schnittpunkt der von S_2 nach T_2 und von $G_{2,3}$ nach $H_{1,2}$ führenden Strahlen konstruieren; gleichzeitig geht auch noch der von S_3 durch S_0 gezogene Strahl durch $S_{1,2}$ hindurch.

In ganz entsprechender Weise findet man auf der von H_3 nach $H_{2,3}$ führenden Hauptstrecke von der Länge d_2 einen festen Punkt T_2', welcher auf der Verbindungslinie der beiden Schwerpunkte S_2 und S_3 liegt. Dieser Punkt zerlegt die Hauptstrecke in zwei Teile, $H_{2,3} T_2'$ und $T_2' H_3$, deren Längen bezüglich $\frac{m_1}{m_0} r_2$ und $\frac{m_1 + m_2}{m_0} s_2$ sind, wie man leicht aus der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke $S_{2,3} H_{2,3} T_2'$ und $S_{2,3} G_{1,2} S_2$ unter Berücksichtigung der dritten Formel von (2) ableitet. Demnach schneiden sich in $S_{2,3}$ die Verlängerungen der drei Verbindungslinien $S_2 T_2'$, $G_{1,2} H_{2,3}$ und $S_1 S_0$. Es läßt sich also in jedem Falle der Teilschwerpunkt $S_{2,3}$ leicht konstruieren.

3. Bestimmung der Bewegung des Gesamtschwerpunktes und der Teilschwerpunkte mit Hilfe der Hauptpunkte und Hauptstrecken.

Der enge Zusammenhang zwischen den Hauptpunkten der drei Glieder des Gelenksystems und dem Gesamtschwerpunkte desselben läßt nun auf sehr einfache und anschauliche Art erkennen, in welcher Weise sich der Gesamtschwerpunkt bewegt, wenn die einzelnen Glieder des Systems irgend welche ebene Bewegungen ausführen.

Dreht sich z. B. allein das dritte Glied um die Achse $G_{2,3}$, während die beiden anderen Glieder festbleiben, so bewegt sich, wie man ohne weiteres aus Figur 3 erkennt, der Gesamtschwerpunkt auf einem Kreise um $H_{1,2}$ mit dem Radius $\bar{c}_3$. Da die Strecke $H_{1,2} S_0$ bei allen Stellungen des dritten Gliedes der Längsachse des letzteren parallel bleiben

muß, so erkennt man weiterhin, daß sowohl die Winkelgeschwindigkeit als auch die Winkelbeschleunigung, mit welchen sich S_0 auf seinem Kreise bewegt, mit der Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung der Drehung des dritten Gliedes um $G_{2,3}$ übereinstimmen. Hieraus geht zugleich hervor, daß der dem dritten Gliede angehörende Vektor $\bar{c}_3$ sowohl durch seine Länge als auch durch seine Bewegung ein anschauliches Maß für den Einfluß darstellt, welchen das dritte Glied auf die Lage und Bewegung des Gesamtschwerpunktes ausübt.

In gleicher Weise gibt der auf der Längsachse des ersten Gliedes liegende Vektor $-\bar{d}_1$ ein Maß ab für den Einfluß des ersten Gliedes auf die Bewegung des Gesamtschwerpunktes. Denn wenn man nur das erste Glied um $G_{1,2}$ dreht, während die beiden anderen in Ruhe bleiben, so bewegt sich der Gesamtschwerpunkt auf einem Kreise um $H_{2,3}$ mit dem Radius $-\bar{d}_1$, wobei sowohl die Winkelgeschwindigkeit als auch die Winkelbeschleunigung dieser Kreisbewegung des Schwerpunktes mit der Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung der Drehung des ersten Gliedes um $G_{1,2}$ übereinstimmen.

Für das Mittelglied liegen die Verhältnisse etwas weniger einfach, weil dasselbe sich nicht bewegen kann, ohne das eine oder andere der beiden Endglieder in die Bewegung hineinzuziehen. Doch gelingt es auch hier leicht mit Hilfe der Hauptstrecken, die Verhältnisse aufzuklären.

Ist beispielsweise das erste Glied im Raume fest, so kann sich das zweite nur um $G_{1,2}$ drehen. Das dritte Glied muß sich in irgend welcher Weise an dieser Bewegung beteiligen, da der Gelenkpunkt $G_{2,3}$ sich ja auf einem Kreise um $G_{1,2}$ bewegt. Führt nun das dritte Glied dabei eine reine Translationsbewegung aus, so daß also seine Längsachse ihre Richtung im Raume beibehält, so wird sich der Gesamtschwerpunkt, wie man leicht aus Figur 7 auf der folgenden Seite erkennt, wiederum auf einem Kreise bewegen, dessen Radius gleich dem auf der Längsachse des zweiten Gliedes liegenden Vektor $\bar{c}_2$ ist. Der Mittelpunkt dieses Kreises fällt dabei mit einem Punkte J zusammen, welcher vom Hauptpunkte H_1 des ersten Gliedes um den Vektor $\bar{c}_3$ absteht; denn da sowohl H_1 fest bleiben, als auch die Richtung der Längsachse des dritten Gliedes bei der Bewegung ihre Richtung beibehalten soll, so bleibt der Punkt J ebenfalls in Ruhe. Die Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung dieser Kreisbewegung des Schwerpunktes S_0 stimmen wiederum mit der Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung der Drehung des zweiten Gliedes überein.

Verhält sich bei den Drehungen des zweiten Gliedes um die Gelenkachse $G_{1,2}$ das dritte Glied so, als ob es mit dem zweiten fest verbunden wäre, so daß also der Winkel zwischen den Längsachsen des zweiten und dritten Gliedes konstant bleibt, so wird, falls das

erste Glied wiederum im Raume festgestellt ist, der Gesamtschwerpunkt ebenfalls einen Kreis beschreiben. Der Mittelpunkt dieses Kreises liegt aber jetzt im Hauptpunkte H_1 des ersten Gliedes, und der Radius ist gleich $\overline{H_1 S_0}$, d. h. also gleich der Vektorsumme $\bar{c}_2 + \bar{c}_3$.

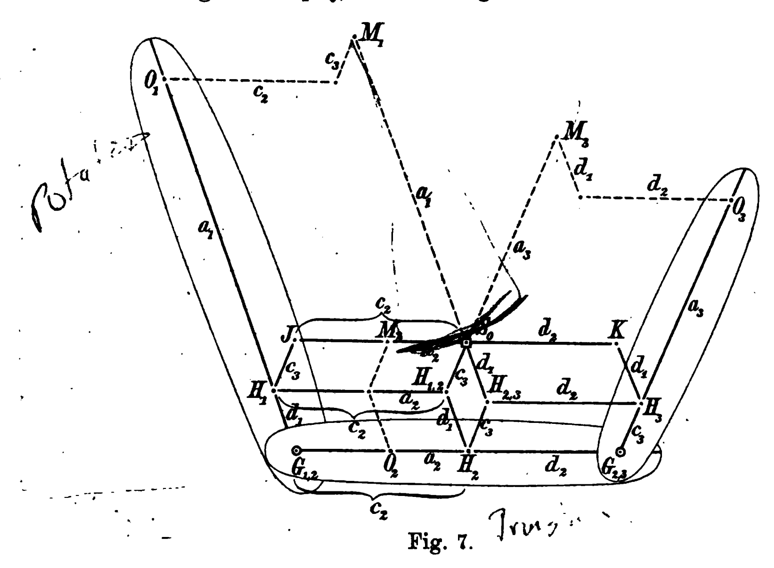


Fig. 7.

Die Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung der Kreisbewegung des Schwerpunktes stimmt aber auch in diesem Falle mit der Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung des zweiten Gliedes überein.

Ist nicht das erste, sondern das dritte Glied im Raume fest, so daß sich das zweite nur um $G_{2,3}$ drehen kann, und führt dabei das erste Glied nur Translationsbewegung aus, so wird der Schwerpunkt S_0 einen Kreis mit dem Radius $-\bar{d}_2$ um einen Punkt K beschreiben, welcher von H_3 um die Strecke $-\bar{d}_1$ absteht. Ist dagegen bei den Drehungen des zweiten Gliedes das erste Glied gegen dieses festgestellt, so daß der Winkel zwischen den Längsachsen des zweiten und ersten Gliedes konstant bleibt, so durchläuft der Schwerpunkt einen Kreis um H_3 mit dem Radius $\overline{H_3 S_0}$, welcher mit der Vektorsumme $-\bar{d}_2 - \bar{d}_1$ übereinstimmt. In beiden Fällen besitzt derselbe dabei wieder die Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung des zweiten Gliedes.

Bleibt keins der drei Glieder bei den Bewegungen des Gelenksystems in Ruhe, so kann zunächst immer noch der spezielle Fall eintreten, daß nur ein Glied sich um einen im Raume festen Punkt dreht, während die beiden anderen Glieder gleichzeitig reine Translationsbewegungen ausführen. Dann beschreibt der Schwerpunkt jedes-

mal eine Kreisbewegung, welche mit der Bewegung des Hauptpunktes des allein sich drehenden Gliedes kongruent ist.

Dreht sich beispielsweise das erste Glied um einen Punkt O_1 seiner Längsachse, während das zweite und dritte Glied nur in Translationsbewegung begriffen sind, so wird zunächst der Hauptpunkt H_1 einen Kreis um O_1 beschreiben. Da nun der Schwerpunkt S_0 von H_1 um die Vektorsumme $\bar{c}_2 + \bar{c}_3$ entfernt ist, und dieser resultierende Vektor infolge der Translationsbewegung des zweiten und dritten Gliedes sowohl seine Größe als auch seine Richtung bei der Drehung des ersten Gliedes beibehält, so muß die Bewegung von S_0 mit der von H_1 in jeder Beziehung übereinstimmen. Es wird daher, wie man aus Figur 7 erkennt, S_0 einen Kreis um einen in der Verlängerung von $H_{2,3}S_0$ liegenden festen Punkt M_1 beschreiben, der von O_1 um die Vektorsumme $\bar{c}_2 + \bar{c}_3$ absteht. Der Radius dieses Kreises ist gleich der Entfernung a_1 des Hauptpunktes H_1 vom Drehpunkte O_1, und die Drehung des Schwerpunktes geht mit der Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung des ersten Gliedes vor sich. Fällt insbesondere der Drehpunkt O_1 mit dem Hauptpunkte H_1 zusammen, so wird infolgedessen der Schwerpunkt S_0 an seiner Stelle bleiben, wenn das erste Glied eine Drehung um H_1, die beiden anderen Glieder aber gleichzeitig nur Translationsbewegungen ausführen.

Dreht sich das dritte Glied um einen Punkt O_3 seiner Längsachse, während das zweite und erste Glied nur Translationsbewegungen ausführen, so wird dabei S_0 einen Kreis um einen in der Verlängerung von $H_{1,2}S_0$ liegenden festen Punkt M_3 (Fig. 7) beschreiben, welcher von O_3 um die Vektorsumme $-\bar{d}_2 - \bar{d}_1$ entfernt ist. Der Radius dieses Kreises stimmt mit dem Abstand a_3 des Punktes H_3 von O_3 überein, und die Kreisbewegung des Schwerpunktes besitzt die Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung der Drehung des dritten Gliedes. Findet die Drehung um den Hauptpunkt H_3 selbst statt, so wird dabei infolge von $a_3 = 0$ wiederum der Schwerpunkt in Ruhe bleiben.

Auch bei einer Drehung des zweiten Gliedes mit gleichzeitiger Translationsbewegung des ersten und dritten erhält man ganz entsprechende Resultate. Liegt der Drehpunkt O_2 auf der Längsachse des zweiten Gliedes in der Entfernung a_2 von H_2, so wird sich dabei der Schwerpunkt auf einem Kreise vom Radius a_2 mit der Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung des zweiten Gliedes drehen, und zwar um einen Punkt M_2 auf der Geraden JK (Fig. 7), welcher von O_2 um die Vektorsumme $-\bar{d}_1 + \bar{c}_3$ absteht. Bei der Drehung um H_2 selbst wird infolgedessen der Schwerpunkt wiederum in Ruhe bleiben.

Es besitzen also alle drei Hauptpunkte die Eigenschaft, daß der Gesamtschwerpunkt S_0 an Ort und Stelle bleibt,

wenn man ein Glied um seinen Hauptpunkt dreht und die beiden anderen Glieder gleichzeitig nur Translationsbewegungen ausführen läßt. Dieses Resultat leistet, wie sich später zeigen wird, unter anderem bei der Ableitung der lebendigen Kraft des ganzen Systems wertvolle Dienste.

Bei einer ganz beliebigen Bewegung des Gelenksystems wird nun der Gesamtschwerpunkt S_0 im allgemeinen keine Kreisbewegung ausführen. Der enge Zusammenhang zwischen dem Gesamtschwerpunkte und den Hauptpunkten ermöglicht aber auch im Falle allgemeinster Bewegung eine sehr einfache Ableitung sowohl der Bahnkurve als auch der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen des Schwerpunktes. Die Bewegung des letzteren kann dann unter anderem aufgefaßt werden als die Resultante aus der Bewegung des Hauptpunktes H_1, der Bewegung des Systemhauptpunktes $H_{1,2}$ relativ zu H_1 und der Bewegung des Gesamtschwerpunktes S_0 relativ zu $H_{1,2}$. Natürlich könnte man auch von der Bewegung des zweiten oder dritten Hauptpunktes ausgehen und würde dann zu ganz entsprechendem Ergebnis gelangen. Die Bewegung von $H_{1,2}$ relativ zu H_1 findet auf einem Kreise mit dem Radius c_2, und die Bewegung von S_0 relativ zu $H_{1,2}$ auf einem Kreise mit dem Radius c_3 statt (vgl. Fig. 3 und Fig. 7). Dabei besitzt $H_{1,2}$ relativ zu H_1 dieselbe Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung, mit der die Längsachse des zweiten Körpers im Raume ihre Richtung ändert. Desgleichen dreht sich S_0 um $H_{1,2}$ mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung, mit welcher die Längsachse des dritten Körpers im Raume ihre Richtung verändert. Dies ergibt sich einfach aus dem Umstande, daß während irgend einer Bewegung des Körpersystems stets $\overline{H_1 H_{1,2}}$ parallel $\overline{G_{1,2} H_2}$, und $\overline{H_{1,2} S_0}$ parallel $\overline{G_{2,3} H_3}$ (vgl. Fig. 3) bleiben muß.

Macht man nun noch die bei Problemen der Bewegungsphysiologie und der Technik vielfach verwirklichte Annahme, daß ein Punkt O_1 der Längsachse des ersten Körpers festbleibt, und also der erste Körper nur Drehungen um eine zu den übrigen beiden Gelenkachsen parallele Achse durch O_1 auszuführen vermag, so ist, wie schon oben erläutert wurde, auch der Hauptpunkt H_1 auf einen Kreis um O_1 gezwungen.

Die auf der Längsachse des ersten Gliedes liegende Strecke zwischen O_1 und H_1 soll nun auch eine Hauptstrecke des ersten Körpers genannt werden. Bezeichnet man dieselbe in entsprechender Weise wie die anderen Hauptstrecken jetzt mit c_1 (vgl. Fig. 8 auf Seite 28), und außerdem den in seiner Länge veränderlichen Vektor zwischen O_1 und dem Gesamtschwerpunkte S_0 mit c_0, so hat man einfach

(26) $$\bar{c}_0 = \bar{c}_1 + \bar{c}_2 + \bar{c}_3 = \sum_1^3{}^h \bar{c}_h,$$

wobei wieder die über den Buchstaben befindlichen Striche andeuten sollen, daß es sich um Vektoren und demnach um geometrische Addition handelt.

Die Winkelgeschwindigkeiten, mit denen die Längsachsen der drei Körper ihre Richtungen im Raume bei der Bewegung des Gelenksystems ändern, seien φ_1', φ_2' und φ_3'. Falls man bei einer bestimmten Bewegung die Winkel φ_1, φ_2 und φ_3, welche die positiven Richtungen der drei Längsachsen mit einer bestimmten Richtung in der festen Ebene bilden (vgl. die Figg. 1 und 8), in ihrer Abhängigkeit von der Zeit kennt, bedeuten diese Winkelgeschwindigkeiten natürlich die ersten Differentialquotienten der Winkel nach der Zeit. Demnach hat man für die lineare Geschwindigkeit des Hauptpunktes H_1 den Wert $c_1\varphi_1'$, für die lineare Geschwindigkeit des Systemhauptpunktes $H_{1,2}$ relativ zu H_1 den Wert $c_2\varphi_2'$ und für die lineare Geschwindigkeit des Gesamtschwerpunktes S_0 relativ zu $H_{1,2}$ den Wert $c_3\varphi_3'$, wobei die Geschwindigkeiten in jedem Falle senkrecht zu den betreffenden Hauptstrecken gerichtet sind. Als lineare Geschwindigkeit v_0 des Gesamtschwerpunktes S_0 ergibt sich demnach

$$(27) \qquad \bar{v}_0 = \overline{c_1\varphi_1'} + \overline{c_2\varphi_2'} + \overline{c_3\varphi_3'} = \sum_1^3{}^h \overline{c_h\varphi_h'}.$$

Die Winkelbeschleunigungen, mit denen die drei Längsachsen ihre Richtungen im Raume bei der Bewegung des Gelenksystems ändern, seien φ_1'', φ_2'' und φ_3''. Es sind die zweiten Abgeleiteten der drei Winkel φ_1, φ_2 und φ_3 nach der Zeit, sofern man diese Winkel als Funktionen der Zeit dargestellt hat.

Die lineare Beschleunigung, welche ein auf einem Kreise oder einer beliebigen Kurve sich bewegender Punkt besitzt, setzt sich bekanntlich aus zwei zueinander senkrechten Komponenten zusammen. Die eine besitzt an jeder Stelle der Kurve die Richtung der Tangente an dieselbe; sie führt den Namen Tangentialbeschleunigung. Die andere Komponente ist dagegen senkrecht zur Tangente, und zwar nach dem Krümmungsmittelpunkte der Bahnkurve hin gerichtet; sie heißt Normalbeschleunigung oder auch Zentripetalbeschleunigung. Ist die Bahnkurve ein Kreis, so wird die Tangentialbeschleunigung durch das Produkt aus dem Radius des Kreises und der Winkelbeschleunigung der Kreisbewegung gemessen; die Normalbeschleunigung wird dagegen durch das Produkt aus dem Radius und dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit der Kreisbewegung bestimmt.

Dies vorausgeschickt, ergeben sich nun zunächst für die Bewegung von H_1 und die beiden relativen Bewegungen von $H_{1,2}$ und S_0 bezüglich die Tangentialbeschleunigungen $c_1\varphi_1''$, $c_2\varphi_2''$ und $c_3\varphi_3''$, welche ebenfalls senkrecht zu den entsprechenden Hauptstrecken ge-

richtet sind. Die Normalbeschleunigungen dieser drei Punkte besitzen dagegen bezüglich die Werte $c_1\varphi_1'^2$, $c_2\varphi_2'^2$ und $c_3\varphi_3'^2$ und sind jedesmal entgegengesetzt wie die entsprechende Hauptstrecke gerichtet. Für die lineare Beschleunigung γ_0 des Gesamtschwerpunktes ergibt sich daher der Wert:

$$(28)\quad \overline{\gamma_0} = \overline{c_1\varphi_1''} + \overline{c_2\varphi_2''} + \overline{c_3\varphi_3''} + \overline{c_1\varphi_1'^2} + \overline{c_2\varphi_2'^2} + \overline{c_3\varphi_3'^2} = \sum_{1}^{3}{}^{h} \left[\overline{c_h\varphi_h''} + \overline{c_h\varphi_h'^2}\right].$$

Es soll nun O_1 zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Koordinatensystems (xy) innerhalb der im Raume festen Ebene der drei Schwerpunkte gewählt werden (vgl. Fig. 8). Die positive x-Achse möge dabei die Richtung besitzen, von der aus die als allgemeine Koordinaten eingeführten Winkel φ_1, φ_2 und φ_3 gemessen werden, welche nicht nur die Richtung der drei Längsachsen, sondern bei der vorliegenden Voraussetzung eines festen Drehpunktes O_1 die Lage des ganzen Gelenksystems vollständig bestimmen.

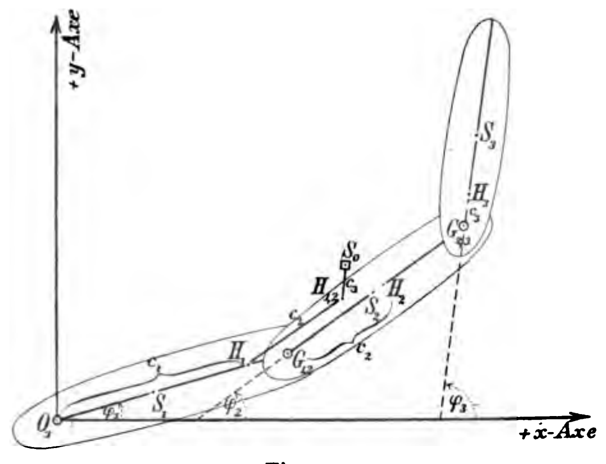


Fig. 8.

Für die Koordinaten x_0 und y_0 des Gesamtschwerpunktes S_0 hat man dann ohne weiteres

$$(29)\quad \begin{aligned} x_0 &= c_1\cos\varphi_1 + c_2\cos\varphi_2 + c_3\cos\varphi_3 = \sum_{1}^{3}{}^{h} c_h\cos\varphi_h, \\ y_0 &= c_1\sin\varphi_1 + c_2\sin\varphi_2 + c_3\sin\varphi_3 = \sum_{1}^{3}{}^{h} c_h\sin\varphi_h. \end{aligned}$$

Bezeichnet man die Komponenten der Geschwindigkeit v_0 und der Beschleunigung γ_0 des Gesamtschwerpunktes S_0 bezüglich mit x_0', y_0' und x_0'', y_0'' und beachtet die Richtung der einzelnen Geschwindigkeits- und Beschleunigungskomponenten gegenüber der Richtung der drei Längsachsen, so ergibt sich ohne weiteres aus (27) und (28)

$$(30)\quad \begin{aligned} x_0' &= -c_1 \sin\varphi_1 \cdot \varphi_1' - c_2 \sin\varphi_2 \cdot \varphi_2' - c_3 \sin\varphi_3 \cdot \varphi_3' = -\sum_1^3{}^h c_h \sin\varphi_h \cdot \varphi_h', \\ y_0' &= \quad c_1 \cos\varphi_1 \cdot \varphi_1' + c_2 \cos\varphi_2 \cdot \varphi_2' + c_3 \cos\varphi_3 \cdot \varphi_3' = \sum_1^3{}^h c_h \cos\varphi_h \cdot \varphi_h', \end{aligned}$$

und

$$(31)\quad \begin{aligned} x_0'' &= -c_1 \sin\varphi_1 \cdot \varphi_1'' - c_2 \sin\varphi_2 \cdot \varphi_2'' - c_3 \sin\varphi_3 \cdot \varphi_3'' \\ &\qquad - c_1 \cos\varphi_1 \cdot \varphi_1'^2 - c_2 \cos\varphi_2 \cdot \varphi_2'^2 - c_3 \cos\varphi_3 \cdot \varphi_3'^2, \\ y_0'' &= c_1 \cos\varphi_1 \cdot \varphi_1'' + c_2 \cos\varphi_2 \cdot \varphi_2'' + c_3 \cos\varphi_3 \cdot \varphi_3'' \\ &\qquad - c_1 \sin\varphi_1 \cdot \varphi_1'^2 - c_2 \sin\varphi_2 \cdot \varphi_2'^2 - c_3 \sin\varphi_3 \cdot \varphi_3'^2, \end{aligned}$$

oder kurz

$$x_0'' = -\sum_1^3{}^h [c_h \sin\varphi_h \cdot \varphi_h'' + c_h \cos\varphi_h \cdot \varphi_h'^2],$$

$$y_0'' = \sum_1^3{}^h [c_h \cos\varphi_h \cdot \varphi_h'' - c_h \sin\varphi_h \cdot \varphi_h'^2].$$

Zu demselben Resultate wäre man natürlich auch durch wiederholte Differentiation der Gleichungen (29) gekommen.

Es ist zu beachten, daß in den Formeln (26) bis (31) die Massen der einzelnen Glieder gar nicht vorkommen, obgleich dieselben, oder doch wenigstens ihr Verhältnis, natürlich für die Lage und Bewegung des Gesamtschwerpunktes mitbestimmend sind. Dies läßt sich dadurch erklären, daß der Einfluß, welchen die Massen auf den Ort des Schwerpunktes ausüben, schon in den Größen und Richtungen der Hauptstrecken c_h zum Ausdruck gekommen ist.

Die Formeln beziehen sich auf den speziellen Fall, daß bei der Bewegung des Gelenksystems ein Punkt O_1 des ersten Gliedes festbleibt. Findet dies nicht mehr statt, so kann man trotzdem die Formeln (26) bis (31) der Untersuchung zugrunde legen. Man hat dann nur noch auf die Geschwindigkeit v und Beschleunigung γ des bisher als fest angenommenen Punktes O_1 Rücksicht zu nehmen. Demnach tritt auf der rechten Seite der Formel (27) noch der Vektor $\bar{v}$ und auf der rechten Seite von (28) noch der Vektor $\bar{\gamma}$ hinzu. Bedeuten in einem rechtwinkligen Koordinatensystem, auf dessen Abszissenachse die Winkel φ_1, φ_2 und φ_3 bezogen sind, x_1 und y_1 die Koordinaten des nunmehr beweglichen Punktes O_1, ferner x_1', y_1' die Komponenten seiner Geschwindigkeit und x_1'', y_1'' die seiner Beschleunigung, so kommen in den Formeln (29) bis (31) auf den rechten Seiten bei den oberen Gleichungen bezüglich noch die Glieder x_1, x_1' und x_1'', und bei den unteren Gleichungen noch die Glieder y_1, y_1' und y_1'' hinzu.

Besonders einfach gestalten sich die Formeln, wenn man den

Punkt O_1, von dessen Bewegung man bei der Bestimmung der Schwerpunktsbewegung ausgeht, mit dem Hauptpunkte H_1 des ersten Gliedes zusammenfallen läßt. Dann hat c_1 den Wert Null, und infolgedessen verschwinden aus allen Formeln die mit c_1 multiplizierten Glieder.

Aus dem Werte der Beschleunigung γ_0 des Gesamtschwerpunktes kann man nun auch die äußere Kraft ableiten, welche allein an dem Schwerpunkte angreifend demselben seine Beschleunigung erteilen würde. Diese Kraft E_0, für welche der Ausdruck Effektivkraft des Gesamtschwerpunktes gebräuchlich ist, wird an Größe und Richtung durch das Produkt des Beschleunigungsvektors $\bar{\gamma}_0$ mit der Gesamtmasse m_0 dargestellt; sie besitzt also den Wert

$$\bar{E}_0 = m_0 \sum_1^3{}^h [\overline{c_h \varphi_h''} + \overline{c_h \varphi_h'^2}], \tag{32}$$

und ihre Komponenten X_0 und Y_0 in der Richtung der beiden Koordinatenachsen sind

$$\begin{aligned} X_0 &= -\, m_0 \sum_1^3{}^h [c_h \sin\varphi_h \cdot \varphi_h'' + c_h \cos\varphi_h \cdot \varphi_h'^2] \quad \text{und} \\ Y_0 &= m_0 \sum_1^3{}^h [c_h \cos\varphi_h \cdot \varphi_h'' - c_h \sin\varphi_h \cdot \varphi_h'^2]. \end{aligned} \tag{33}$$

Bisher handelte es sich um die Bewegung des Gesamtschwerpunktes S_0. Man kann sich nun aber auch mit Hilfe der Hauptpunkte leicht Rechenschaft über die Bewegung der Teilschwerpunkte $S_{1,2}$ und $S_{2,3}$ geben.

Wie schon oben auseinandergesetzt wurde, liegt der Schwerpunkt $S_{1,2}$ in jeder Stellung des Gelenksystems auf der Verlängerung der Strecke $G_{2,3} H_{1,2}$ (vgl. Fig. 6); seine Entfernung von $G_{2,3}$ ist dabei im Verhältnis $m_0 : (m_1 + m_2)$ größer als die Entfernung des Systemhauptpunktes $H_{1,2}$ von $G_{2,3}$. Hieraus folgt aber unmittelbar, daß auch die Bewegung des Schwerpunktes $S_{1,2}$ relativ zum Gelenkpunkte $G_{2,3}$ der Bewegung des Hauptpunktes $H_{1,2}$ relativ zu $G_{2,3}$ in jeder Beziehung ähnlich ist und dabei im Verhältnis $m_0 : (m_1 + m_2)$ gegenüber der letzteren vergrößert erscheint. Das bezieht sich nicht nur auf die Bahnkurven, sondern auch auf die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen relativ zum Punkte $G_{2,3}$. Die Richtungen der zu $G_{2,3}$ relativen Geschwindigkeiten der beiden Punkte $S_{1,2}$ und $H_{1,2}$ sind in jeder Bewegungsphase dieselben, aber die Größen derselben verhalten sich wie $m_0 : (m_1 + m_2)$. Ganz das gleiche gilt für die relativen Beschleunigungen der beiden Punkte. Man braucht daher nur die Bewegung des Systemhauptpunktes $H_{1,2}$ relativ zu $G_{2,3}$ abzuleiten und sowohl die Geschwindigkeiten als auch die Beschleunigungen

mit dem Verhältnis $\frac{m_0}{m_1 + m_2}$ zu multiplizieren, um die zu $G_{2,3}$ relative Bewegung von $S_{1,2}$ zu erhalten.

In entsprechender Weise stellt sich die Bewegung des Teilschwerpunktes $S_{2,3}$ relativ zum Gelenkpunkte $G_{1,2}$ als Vergrößerung der zu $G_{1,2}$ relativen Bewegung des Systemhauptpunktes $H_{2,3}$ dar; das Vergrößerungsverhältnis ist hier aber $m_0 : (m_2 + m_3)$. Hat man die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen von $H_{2,3}$ für die zu $G_{1,2}$ relative Bewegung abgeleitet, so braucht man diese Größen nur mit $\frac{m_0}{m_2 + m_3}$ zu multiplizieren, um die entsprechenden Größen für die relative Bewegung des Schwerpunktes $S_{2,3}$ zu gewinnen.

Um die Bewegung des Systemhauptpunktes $H_{1,2}$ relativ zu $G_{2,3}$ zu untersuchen, hat man diesen letzteren Gelenkmittelpunkt festgestellt zu denken. Das dritte Glied kann dann in ganz beliebiger Weise sich noch um den festen Gelenkpunkt $G_{2,3}$ drehen, ohne daß dadurch die relative Bewegung von $H_{1,2}$ geändert würde. Dies erkennt man ohne Mühe aus Figur 3 oder 6, wenn man beachtet, daß alleinige Drehung des dritten Gliedes um $G_{2,3}$ auf die Lage von $H_{1,2}$ keinen Einfluß ausübt. Unter der Voraussetzung, daß $G_{2,3}$ festgestellt ist, bewegt sich der Hauptpunkt $H_{1,2}$ bei den noch möglichen Drehungen des Gelenksystems in folgender Weise.

Führt während der Drehung des zweiten Gliedes um $G_{2,3}$ das erste Glied eine reine Translationsbewegung aus, so stimmt die Bewegung von $H_{1,2}$ überein mit der Bewegung von H_2. Es beschreibt also $H_{1,2}$ einen Kreis mit dem Radius $-\bar{d}_2$ um einen festen Mittelpunkt, welcher von $G_{2,3}$ um die Strecke $-\bar{d}_1$ entfernt ist. Bleibt dagegen die Stellung des ersten Gliedes gegen das zweite im Gelenk $G_{1,2}$ während der Drehung des zweiten um $G_{2,3}$ unverändert, so daß also die beiden Glieder sich wie ein einziger starrer Körper verhalten, so beschreibt $H_{1,2}$ einen Kreis um $G_{2,3}$ mit einem Radius, welcher gleich der in diesem Falle konstanten Vektorsumme $-\bar{d}_2 - \bar{d}_1$ ist. In beiden Fällen besitzt die Kreisbewegung des Punktes $H_{1,2}$ die Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung der Drehung des zweiten Gliedes um $G_{2,3}$.

Bei ganz beliebiger Bewegung der beiden ersten Glieder relativ zu $G_{2,3}$ wird dagegen der Hauptpunkt $H_{1,2}$ im allgemeinen keinen Kreis mehr beschreiben. Die Bewegung desselben kann dann aber aufgefaßt werden als die Resultante der Bewegung des Hauptpunktes H_2 relativ zu $G_{2,3}$ und der Bewegung von $H_{1,2}$ relativ zu H_2. Die hieraus sich ergebende Geschwindigkeit von $H_{1,2}$ relativ zu $G_{2,3}$ ist gleich der geometrischen Summe $-\overline{d_2\varphi_2'} - \overline{d_1\varphi_1'}$ und seine Beschleunigung gleich der geometrischen Summe $-\overline{d_2\varphi_2''} - \overline{d_2\varphi_2'^2}$ $-\overline{d_1\varphi_1''} - \overline{d_1\varphi_1'^2}$, wobei zu beachten ist, daß die beiden Komponenten

der Geschwindigkeit ebenso wie die der Tangentialbeschleunigung zu den entsprechenden Längsachsen der beiden Glieder senkrecht gerichtet sind, während die Komponenten der Normalbeschleunigung in diese Längsachsen selbst hineinfallen. Die negativen Vorzeichen deuten dabei an, daß nach den Festsetzungen über die positive Richtung der einzelnen Strecken sowohl der Punkt H_2 in negativer Richtung vom Drehpunkt $G_{2,3}$ als auch der Punkt $H_{1,2}$ in negativer Richtung von seinem Drehpunkt H_2 entfernt liegt. Die Folge davon ist, daß die resultierende Geschwindigkeit und Beschleunigung des Hauptpunktes $H_{1,2}$ gerade entgegengesetzt gerichtet sind, als wenn die Punkte H_2 und $H_{1,2}$ in positiver Richtung ebenso weit von ihren Drehpunkten entfernt wären.

Aus den Werten für die Geschwindigkeit und Beschleunigung von $H_{1,2}$ ergeben sich nun für die Geschwindigkeit $v_{r_{1,2}}$ und die Beschleunigung $\gamma_{r_{1,2}}$ des Teilschwerpunktes $S_{1,2}$ relativ zu $G_{2,3}$ die Vektorsummen:

$$\bar{v}_{r_{1,2}} = -\frac{m_0}{m_1 + m_2}(\overline{d_1 \varphi_1{}'} + \overline{d_2 \varphi_2{}'}) \tag{34}$$

und

$$\bar{\gamma}_{r_{1,2}} = -\frac{m_0}{m_1 + m_2}(\overline{d_1 \varphi_1{}''} + \overline{d_2 \varphi_2{}''} + \overline{d_1 \varphi_1{}'^2} + \overline{d_2 \varphi_2{}'^2}), \tag{35}$$

wobei der Index r andeuten soll, daß es sich um die zu $G_{2,3}$ relative Bewegung handelt. Um die Komponenten von $v_{r_{1,2}}$ und $\gamma_{r_{1,2}}$ in der Richtung der beiden Koordinatenachsen zu erhalten, braucht man nur die einzelnen Vektoren, aus denen diese beiden Größen sich zusammensetzen, bezüglich auf die X-Achse und die Y-Achse des eingeführten Koordinatensystems zu projizieren. Man erhält dann unter Berücksichtigung der Richtungen dieser Vektoren, welche positiven Werten der Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung entsprechen, für die Komponenten $x'_{r_{1,2}}$ und $y'_{r_{1,2}}$ der Geschwindigkeit die Werte:

$$\begin{aligned} x'_{r_{1,2}} &= \frac{m_0}{m_1 + m_2}(d_1 \sin\varphi_1 \cdot \varphi_1{}' + d_2 \sin\varphi_2 \cdot \varphi_2{}') \\ y'_{r_{1,2}} &= -\frac{m_0}{m_1 + m_2}(d_1 \cos\varphi_1 \cdot \varphi_1{}' + d_2 \cos\varphi_2 \cdot \varphi_2{}'), \end{aligned} \tag{36}$$

und für die Komponenten x'' und y'' der Beschleunigung die Werte:

$$\begin{aligned} x''_{r_{1,2}} &= \frac{m_0}{m_1 + m_2}(d_1 \sin\varphi_1 \cdot \varphi_1{}'' + d_2 \sin\varphi_2 \cdot \varphi_2{}'' \\ &\qquad + d_1 \cos\varphi_1 \cdot \varphi_1{}'^2 + d_2 \cos\varphi_2 \cdot \varphi_2{}'^2) \\ y''_{r_{1,2}} &= -\frac{m_0}{m_1 + m_2}(d_1 \cos\varphi_1 \cdot \varphi_1{}'' + d_2 \cos\varphi_2 \cdot \varphi_2{}'' \\ &\qquad - d_1 \sin\varphi_1 \cdot \varphi_1{}'^2 - d_2 \sin\varphi_2 \cdot \varphi_2{}'^2). \end{aligned} \tag{37}$$

Mit Hilfe der Formel (35) kann man nun auch die Effektivkraft $E_{r_{1,2}}$ des Teilschwerpunktes $S_{1,2}$ für die zu $G_{2,3}$ relative Bewegung nach Größe und Richtung gewinnen. Man braucht zu diesem Zwecke

nur die Beschleunigung $\bar{\gamma}_{r_{1,2}}$ mit der Masse $(m_1 + m_2)$ des aus dem ersten und zweiten Gliede zusammengesetzten Systems zu multiplizieren. Auf diese Weise ergibt sich für diese relative Effektivkraft von $S_{1,2}$:



$$\bar{E}_{r_{1,2}} = -m_0\left(\overline{d_1 \varphi_1''} + \overline{d_2 \varphi_2''} + \overline{d_1 \varphi_1'^2} + \overline{d_2 \varphi_2'^2}\right), \tag{38}$$

und nach (37) für die Komponenten $X_{r_{1,2}}$, $Y_{r_{1,2}}$ derselben in der Richtung der beiden Koordinatenachsen:

$$\begin{aligned} X_{r_{1,2}} &= m_0 (d_1 \sin \varphi_1 \cdot \varphi_1'' + d_2 \sin \varphi_2 \cdot \varphi_2'' \\ &\qquad + d_1 \cos \varphi_1 \cdot \varphi_1'^2 + d_2 \cos \varphi_2 \cdot \varphi_2'^2) \\ Y_{r_{1,2}} &= -m_0 (d_1 \cos \varphi_1 \cdot \varphi_1'' + d_2 \cos \varphi_2 \cdot \varphi_2'' \\ &\qquad - d_1 \sin \varphi_1 \cdot \varphi_1'^2 - d_2 \sin \varphi_2 \cdot \varphi_2'^2). \end{aligned} \tag{39}$$

Es ist zu beachten, daß man zu demselben Werte der Effektivkraft gelangen würde, wenn nicht $S_{1,2}$, sondern $H_{1,2}$ der Schwerpunkt wäre, dafür aber das System der beiden Körper die Masse m_0 besäße. Dieser Fall kann dadurch realisiert werden, daß man sich im Gelenkpunkte $G_{2,3}$ die Masse m_3 des dritten Gliedes konzentriert denkt. Da der Punkt $G_{2,3}$ als fest vorausgesetzt ist, so wird die neu hinzugefügte Masse weder an der Bewegung der beiden ersten Glieder teilnehmen, noch sonst einen Einfluß auf dieselbe ausüben, trotzdem die Masse des Systems sich vergrößert und der Schwerpunkt desselben seine Lage geändert hat. Es ist daher von vornherein klar, daß trotz des Hinzufügens der Masse m_3 die relative Effektivkraft des Schwerpunktes ihren Wert nicht ändern wird. Der neue Schwerpunkt ist aber $H_{1,2}$, wie aus der Lage der drei Punkte $S_{1,2}$, $H_{1,2}$ und $G_{2,3}$ zueinander unmittelbar hervorgeht. Die relative Effektivkraft wird erhalten, indem man die Beschleunigung von $H_{1,2}$ mit der Gesamtmasse m_0 multipliziert. Dadurch wird man aber gerade auf den Ausdruck (38) geführt.

Die Formeln (34) bis (39) beziehen sich zunächst nur auf die zum Gelenkpunkte $G_{2,3}$ relative Bewegung des Schwerpunktes $S_{1,2}$; sie können aber auch leicht der absoluten Bewegung von $S_{1,2}$ angepaßt werden. Man braucht zu diesem Zwecke nur in (34) auf der rechten Seite noch den Geschwindigkeitsvektor und in (35) den Beschleunigungsvektor des Gelenkpunktes $G_{2,3}$ hinzuzufügen. Dementsprechend wird die Effektivkraft des Punktes $S_{1,2}$, welche der absoluten Bewegung desselben entspricht, um das Produkt aus der Masse $(m_1 + m_2)$ und der Beschleunigung von $G_{2,3}$ größer als $\bar{E}_{r_{1,2}}$ in (38), wobei die letztere Beschleunigung im gegebenen Falle wiederum aus Tangential- und Normalbeschleunigung zusammenzusetzen ist. Die Änderungen der Formeln (36), (37) und (39) ergeben sich hieraus von selbst. —

Die zu $G_{1,2}$ relative Bewegung des Systemhauptpunktes $H_{2,3}$ ist eine reine Kreisbewegung, wenn entweder das dritte Glied bei der Drehung des zweiten um $G_{1,2}$ reine Translationsbewegung ausführt,

oder wenn es mit dem zweiten Gliede starr verbunden erscheint. Im ersten Falle dreht sich $H_{2,3}$ um einen Punkt, welcher von $G_{1,2}$ um den Vektor $\bar{c}_3$ entfernt ist; im letzten Falle dreht sich dagegen $H_{2,3}$ um $G_{1,2}$ selbst. Der Radius des Kreises ist im ersten Falle gleich $\bar{c}_2$, im zweiten dagegen gleich der dabei konstanten Vektorsumme $\bar{c}_2 + \bar{c}_3$.

Dreht sich dagegen das dritte Glied ganz unabhängig vom zweiten, so ist die Bewegung von $H_{2,3}$ gleich der Resultante der Drehung des Punktes H_2 um $G_{1,2}$ und der Drehung von $H_{2,3}$ relativ zu H_2. Die Geschwindigkeit derselben ist daher gleich $\overline{c_2\varphi_2'} + \overline{c_3\varphi_3'}$ und die Beschleunigung gleich $\overline{c_2\varphi_2''} + \overline{c_2\varphi_2'^2} + \overline{c_3\varphi_3''} + \overline{c_3\varphi_3'^2}$.

Beachtet man nun, daß die Bewegung des Schwerpunktes $S_{2,3}$ relativ zu $G_{1,2}$ nur die im Verhältnis $m_0 : (m_2 + m_3)$ genommene Vergrößerung der Bewegung von $H_{2,3}$ relativ zu $G_{1,2}$ ist, so erhält man für diese relative Geschwindigkeit $v_{r_{2,3}}$ und Beschleunigung $\gamma_{r_{2,3}}$ des Schwerpunktes $S_{2,3}$ des Systems der beiden letzten Glieder

$$\bar{v}_{r_{2,3}} = \frac{m_0}{m_2 + m_3}\left(\overline{c_2\varphi_2'} + \overline{c_3\varphi_3'}\right) \tag{40}$$

und

$$\bar{\gamma}_{r_{2,3}} = \frac{m_0}{m_2 + m_3}\left(\overline{c_2\varphi_2''} + \overline{c_3\varphi_3''} + \overline{c_2\varphi_2'^2} + \overline{c_3\varphi_3'^2}\right), \tag{41}$$

deren Komponenten $x'_{r_{2,3}}$, $y'_{r_{2,3}}$ und $x''_{r_{2,3}}$, $y''_{r_{2,3}}$ in der Richtung der beiden Koordinatenachsen bezüglich die Werte besitzen:

$$\begin{aligned} x'_{r_{2,3}} &= -\frac{m_0}{m_2 + m_3}(c_2 \sin\varphi_2 \cdot \varphi_2' + c_3 \sin\varphi_3 \cdot \varphi_3') \\ y'_{r_{2,3}} &= \frac{m_0}{m_2 + m_3}(c_2 \cos\varphi_2 \cdot \varphi_2' + c_3 \cos\varphi_3 \cdot \varphi_3') \end{aligned} \tag{42}$$

und

$$\begin{aligned} x''_{r_{2,3}} &= -\frac{m_0}{m_2 + m_3}(c_2 \sin\varphi_2 \cdot \varphi_2'' + c_3 \sin\varphi_3 \cdot \varphi_3'' \\ &\qquad + c_2 \cos\varphi_2 \cdot \varphi_2'^2 + c_3 \cos\varphi_3 \cdot \varphi_3'^2) \\ y''_{r_{2,3}} &= \frac{m_0}{m_2 + m_3}(c_2 \cos\varphi_2 \cdot \varphi_2'' + c_3 \sin\varphi_3 \cdot \varphi_3'' \\ &\qquad - c_2 \sin\varphi_2 \cdot \varphi_2'^2 - c_3 \sin\varphi_3 \cdot \varphi_3'^2). \end{aligned} \tag{43}$$

Für die Effektivkraft $E_{r_{2,3}}$ des Schwerpunktes $S_{2,3}$ in bezug auf seine Bewegung relativ zu $G_{1,2}$ folgt daraus der Wert:

$$\bar{E}_{r_{2,3}} = m_0\left(\overline{c_2\varphi_2''} + \overline{c_3\varphi_3''} + \overline{c_2\varphi_2'^2} + \overline{c_3\varphi_3'^2}\right), \tag{44}$$

und für die Komponenten $X_{r_{2,3}}$ und $Y_{r_{2,3}}$ derselben

$$\begin{aligned} X_{r_{2,3}} &= -m_0(c_2 \sin\varphi_2 \cdot \varphi_2'' + c_3 \sin\varphi_3 \cdot \varphi_3'' \\ &\qquad + c_2 \cos\varphi_2 \cdot \varphi_2'^2 + c_3 \cos\varphi_3 \cdot \varphi_3'^2) \\ Y_{r_{2,3}} &= m_0(c_2 \cos\varphi_2 \cdot \varphi_2'' + c_3 \cos\varphi_3 \cdot \varphi_3'' \\ &\qquad - c_2 \sin\varphi_2 \cdot \varphi_2'^2 - c_3 \sin\varphi_3 \cdot \varphi_3'^2). \end{aligned} \tag{45}$$

Faßt man wiederum nicht die zu $G_{1,2}$ relative Bewegung des Schwerpunktes $S_{2,3}$ ins Auge, sondern die absolute Bewegung desselben, so kommt bei (40) noch die Geschwindigkeit und bei (41) die Beschleunigung des Gelenkpunktes $G_{1,2}$ als Vektorsummand hinzu. Ferner wird die absolute Effektivkraft von $S_{2,3}$ aus (44) erhalten, indem man auf der rechten Seite noch das Produkt aus der Masse $(m_2 + m_3)$ und den Vektor der Gesamtbeschleunigung des Punktes $G_{1,2}$ hinzuaddiert.

Wie man die Geschwindigkeiten, Beschleunigungen und Effektivkräfte der Teilschwerpunkte $S_{1,2}$ und $S_{2,3}$ unter Benutzung der Hauptstrecken c_h und d_h aus den Winkelgeschwindigkeiten und Winkelbeschleunigungen in besonders einfacher Weise abzuleiten imstande ist, so kann man schließlich auch die Bewegung der Einzelschwerpunkte der beiden Endglieder mit Hilfe der Hauptstrecken auf die Drehungen der einzelnen Glieder zurückführen, so daß in allen Formeln außer den Massen nur noch die Hauptstrecken als Konstante auftreten. Dies ist, wie sich später herausstellen wird, von Wichtigkeit für die Aufstellung und einfachste Formulierung der Bewegungsgleichungen des Gelenksystems.

Die Bewegung des Schwerpunktes S_1 relativ zum Gelenkpunkte $G_{1,2}$ findet auf einem Kreis mit dem Radius $-\bar{s}_1$ (vgl. Fig. 1), die Bewegung des auf der Strecke $G_{1,2}S_1$ liegenden Hauptpunktes H_1 dagegen auf einem Kreis um $G_{1,2}$ mit dem Radius $-\bar{d}_1$ (vgl. Fig. 2) statt. Es kann daher diese relative Bewegung von S_1 als Vergrößerung der entsprechenden relativen Bewegung von H_1 aufgefaßt werden. Das Vergrößerungsverhältnis ist nach der ersten Formel von (2) gleich $m_0 : m_1$. Die Geschwindigkeit von H_1 relativ zu $G_{1,2}$ ist $-\overline{d_1\varphi_1'}$ und seine Beschleunigung $-\overline{d_1\varphi_1''} - \overline{d_1\varphi_1'^2}$. Daher hat man für die relative Geschwindigkeit v_{r_1} und Beschleunigung γ_{r_1} von S_1 die Werte:

$$\bar{v}_{r_1} = -\frac{m_0}{m_1}\overline{d_1\varphi_1'} \tag{46}$$

und

$$\bar{\gamma}_{r_1} = -\frac{m_0}{m_1}\left(\overline{d_1\varphi_1''} + \overline{d_1\varphi_1'^2}\right), \tag{47}$$

und für die Komponenten x'_{r_1}, y'_{r_1} und x''_{r_1}, y''_{r_1} dieser Größen in der Richtung der Koordinatenachsen:

$$(48)\qquad \begin{aligned} x'_{r_1} &= \frac{m_0}{m_1} d_1 \sin\varphi_1 \cdot \varphi_1', \\ y'_{r_1} &= -\frac{m_0}{m_1} d_1 \cos\varphi_1 \cdot \varphi_1', \end{aligned}$$

$$(49)\qquad \begin{aligned} x''_{r_1} &= \frac{m_0}{m_1}\left(d_1 \sin\varphi_1 \cdot \varphi_1'' + d_1\cos\varphi_1 \cdot \varphi_1'^2\right), \\ y''_{r_1} &= -\frac{m_0}{m_1}\left(d_1 \cos\varphi_1 \cdot \varphi_1'' - d_1\sin\varphi_1 \cdot \varphi_1'^2\right). \end{aligned}$$

Die Effektivkraft E_{r_1} des Schwerpunktes S_1 relativ zu $G_{1,2}$ wird nach Größe und Richtung erhalten, indem man $\bar{\gamma}_{r_1}$ mit m_1 multipliziert. Man hat also

$$(50) \qquad \bar{E}_{r_1} = -m_0(\overline{d_1 \varphi_1''} + \overline{d_1 \varphi_1'^2}),$$

und für die Komponenten X_1, Y_1 derselben

$$(51) \qquad \begin{aligned} X_{r_1} &= m_0(d_1 \sin\varphi_1 \cdot \varphi_1'' + d_1 \cos\varphi_1 \cdot \varphi_1'^2), \\ Y_{r_1} &= -m_0(d_1 \cos\varphi_1 \cdot \varphi_1'' - d_1 \sin\varphi_1 \cdot \varphi_1'^2). \end{aligned}$$

Bei der absoluten Bewegung von S_1 kommen dann noch in (46) und (47) bezüglich die Geschwindigkeit und Beschleunigung des Gelenkpunktes $G_{1,2}$ auf der rechten Seite als Vektorsummand hinzu, und die Effektivkraft vermehrt sich um das Produkt aus m_1 und der Beschleunigung von $G_{1,2}$.

In ganz derselben Weise findet man, daß die Bewegung des Schwerpunktes S_3 relativ zu $G_{2,3}$ nur eine Vergrößerung der entsprechenden relativen Bewegung des Hauptpunktes H_3 des dritten Gliedes ist. Das Vergrößerungsverhältnis ist in Rücksicht auf die letzte Gleichung von (2) gleich $m_0 : m_3$. Demnach ergeben sich für die relative Geschwindigkeit v_{r_3} und die relative Beschleunigung γ_{r_3} von S_3 die Werte:

$$(52) \qquad \bar{v}_{r_3} = \frac{m_0}{m_3} \overline{c_3 \cdot \varphi_3'},$$

$$(53) \qquad \bar{\gamma}_{r_3} = \frac{m_0}{m_3} (\overline{c_3 \varphi_3''} + \overline{c_3 \varphi_3'^2}),$$

und für die Komponenten x_3', y_3' und x_3'', y_3'' dieser Größen

$$(54) \qquad \begin{aligned} x'_{r_3} &= -\frac{m_0}{m_3} c_3 \sin\varphi_3 \cdot \varphi_3', \\ y'_{r_3} &= \frac{m_0}{m_3} c_3 \cos\varphi_3 \cdot \varphi_3', \end{aligned}$$

$$(55) \qquad \begin{aligned} x''_{r_3} &= -\frac{m_0}{m_3} (c_3 \sin\varphi_3 \cdot \varphi_3'' + c_3 \cos\varphi_3 \cdot \varphi_3'^2), \\ y''_{r_3} &= \frac{m_0}{m_3} (c_3 \cos\varphi_3 \cdot \varphi_3'' - c_3 \sin\varphi_3 \cdot \varphi_3'^2). \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich für die Effektivkraft E_{r_3} des Schwerpunktes S_3, welche der zu $G_{2,3}$ relativen Bewegung desselben entspricht und nach Größe und Richtung durch das Produkt aus m_3 und der Beschleunigung $\bar{\gamma}_{r_3}$ gemessen wird, der Wert:

$$(56) \qquad \bar{E}_{r_3} = m_0(\overline{c_3 \varphi_3''} + \overline{c_3 \varphi_3'^2}),$$

während ihre Komponenten in der Richtung der Koordinatenachsen sind:

$$(57) \qquad \begin{aligned} X_{r_3} &= -m_0(c_3 \sin\varphi_3 \cdot \varphi_3'' + c_3 \cos\varphi_3 \cdot \varphi_3'^2), \\ Y_{r_3} &= m_0(c_3 \cos\varphi_3 \cdot \varphi_3'' - c_3 \sin\varphi_3 \cdot \varphi_3'^2). \end{aligned}$$

Für die absolute Bewegung von S_3 erhält man die Geschwindigkeit und Beschleunigung, indem man zu den Werten von $\bar{v}_{r_3}$ und $\bar{\gamma}_{r_3}$ bezüglich noch den Geschwindigkeitsvektor und Beschleunigungsvektor des Gelenkpunktes $G_{2,3}$ addiert. Die der absoluten Bewegung von S_3 entsprechende Effektivkraft desselben erhält man, wenn man das Produkt aus m_3 und dem Beschleunigungsvektor von $G_{2,3}$ dem Werte von $\bar{E}_{r_3}$ hinzufügt.

4. Die lebendige Kraft des dreigliedrigen Gelenksystems.

Wenn das bisher in Betracht gezogene Gelenksystem in beliebiger Bewegung begriffen ist, so kann die lebendige Kraft desselben als Summe zweier Bestandteile aufgefaßt werden, die man als äußere und innere lebendige Kraft bezeichnen kann. Die äußere lebendige Kraft rührt nur von der Bewegung des Gesamtschwerpunktes her; sie ist gleich der lebendigen Kraft der im Gesamtschwerpunkte S_0 vereinigt gedachten Gesamtmasse m_0; bezeichnet v_0 die Größe der Geschwindigkeit von S_0, so hat die äußere lebendige Kraft die Größe $\frac{1}{2} m_0 v_0^2$. Die innere lebendige Kraft bezieht sich dagegen nur auf die Bewegung des Systems um seinen Schwerpunkt; sie stellt sich als Summe der lebendigen Kräfte dar, welche den auf den Gesamtschwerpunkt bezogenen relativen Bewegungen der einzelnen Glieder des Systems entsprechen.

Wie die Geschwindigkeit v_0 des Gesamtschwerpunktes, und damit der erste Bestandteil der gesamten lebendigen Kraft, auf verhältnismäßig einfache Weise mit Hilfe der Hauptpunkte gewonnen werden kann, so stellt sich nun auch heraus, daß die Hauptpunkte sehr wesentliche Dienste bei der Bestimmung der inneren lebendigen Kraft leisten.

Die Bewegung, welche jedes der drei Glieder des Systems relativ zum Gesamtschwerpunkte S_0 besitzt, kann man zerlegt denken in eine Translation von der Geschwindigkeit v_h seines Einzelschwerpunktes S_h relativ zu S_0 und eine Rotation um eine zu den Gelenkachsen parallele Achse durch S_h von der Winkelgeschwindigkeit φ_h'. Die lebendige Kraft jedes einzelnen Gliedes relativ zum Gesamtschwerpunkte stellt sich infolgedessen ebenfalls als Summe zweier Bestandteile dar. Der eine Bestandteil ist die lebendige Kraft, welche die Masse m_h des Gliedes besitzt, wenn sie sich mit der Geschwindigkeit v_h bewegt, die der Einzelschwerpunkt S_h relativ zum Gesamtschwerpunkte S_0 besitzt, der andere Bestandteil ist die lebendige Kraft, welche aus der Winkelgeschwindigkeit φ_h' des Gliedes um die Achse durch S_h resultiert.

Nimmt man vorläufig an, daß der Gesamtschwerpunkt fest bleibt, so ist eine beliebige unendlich kleine Verrückung des Systems dadurch eindeutig charakterisiert, daß die drei Winkel φ_1, φ_2, φ_3 bestimmte unendlich kleine Änderungen $d\varphi_1$, $d\varphi_2$, $d\varphi_3$ erfahren. Eine solche Ver-

rückung kann man sich in drei Schritte zerlegt denken. Bei dem einen soll nur der Winkel φ_1 der Änderung $d\varphi_1$ unterworfen werden, während die beiden anderen Winkel φ_2 und φ_3 konstant bleiben, beim zweiten und dritten Schritte soll die Verrückung nur in einer Änderung von φ_2 bezüglich φ_3 um die Größe $d\varphi_2$ bezüglich $d\varphi_3$ bestehen, während jedesmal die beiden anderen Winkel ihren Wert beibehalten. Es kommt also jeder der drei Schritte darauf hinaus, einem der drei Glieder eine unendlich kleine Rotation zu erteilen, während die beiden anderen, welche infolge des Gelenkzusammenhanges der Glieder dabei nicht in Ruhe bleiben können, gleichzeitig nur Translationen ausführen dürfen. Die Translation jedes der anderen beiden Glieder ist gegeben durch die Translation desjenigen Gelenkpunktes, welcher die unmittelbare oder mittelbare Verbindung des betreffenden Gliedes mit dem in Rotation begriffenen darstellt.

Soll nun bei der unendlich kleinen Rotation $d\varphi_k$ eines der drei Glieder, verbunden mit Translationen der beiden anderen Glieder, der Gesamtschwerpunkt S_0 des Systems seinen Ort im Raume beibehalten, so muß, wie früher abgeleitet wurde, diese Rotation um die zu den Gelenkachsen parallele Achse durch den Hauptpunkt des betreffenden Gliedes stattfinden. Dreht man beispielsweise das ganze System um eine zu den Gelenkachsen parallele Achse durch H_1 in der Weise, daß dabei das zweite und dritte Glied nur Translationen ausführen, so behalten die Längsachsen der letzteren beiden Glieder bei der Bewegung ihre Richtung im Raume bei, und der gebrochene Linienzug $H_1 H_{1,2} S_0$ (vgl. Fig. 3) nimmt infolgedessen an der Bewegung nicht teil. Dreht man dagegen um die zu den Gelenkachsen parallele Achse durch H_2 bezüglich H_3 und läßt dabei das erste und dritte bezüglich erste und zweite Glied nur Translationen ausführen, so bleibt der gebrochene Linienzug $H_2 H_{1,2} S_0$ bezüglich $H_3 H_{2,3} S_0$ fest liegen. Es behält also in allen drei Fällen der Gesamtschwerpunkt S_0 seine Lage im Raume bei. Es ist dabei auch ganz gleichgültig, ob die Rotation um einen unendlich kleinen oder um einen beliebigen endlichen Winkel stattfindet.

Man hat daher den

Satz: Jede Verrückung des dreigliedrigen Gelenksystems relativ zum Gesamtschwerpunkte S_0 aus der Lage φ_1, φ_2, φ_3 in die unendlich benachbarte $\varphi_1 + d\varphi_1$, $\varphi_2 + d\varphi_2$, $\varphi_3 + d\varphi_3$ kann zerlegt werden in drei unendlich kleine Rotationen um Achsen durch die drei Hauptpunkte, verbunden mit Translationen der beiden anderen Glieder, welchen der betreffende Hauptpunkt nicht angehört.

Infolge dieser drei Verrückungen des Systems, welche bezüglich einer alleinigen Änderung eines der drei Winkel φ_1, φ_2, φ_3 entsprechen, erleidet jeder der Einzelschwerpunkte drei unendlich kleine Verschie-

bungen, deren geometrische Summe die Gesamtverschiebung des betreffenden Einzelschwerpunktes relativ zum Gesamtschwerpunkte S_0 darstellt. Beachtet man, daß die Strecken zwischen den Schwerpunkten und den Hauptpunkten positiv oder negativ zu rechnen sind, je nachdem sie in positiver oder negativer Richtung auf den Längsachsen verlaufen, so ergibt sich demnach in Übereinstimmung mit der auf Seite 11 getroffenen Festsetzung über das Vorzeichen der Größen e_h (vgl. Fig. 2 auf Seite 11 und Fig. 3 auf Seite 16) für die

$$\begin{array}{lll} & \text{Verschiebung von } S_1 \text{ relativ zu } S_0: & -e_1 . d\varphi_1 \; \overline{- c_2 . d\varphi_2 - c_3 \cdot d\varphi_3} \\ (58) & \quad\text{,,} \quad\quad \text{,,} \quad S_2 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad S_0: & \overline{+ d_1 \cdot d\varphi_1 - e_2 \cdot d\varphi_2} - c_3 \cdot d\varphi_3 \\ & \quad\text{,,} \quad\quad \text{,,} \quad S_3 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad S_0: & \overline{+ d_1 \cdot d\varphi_1 + d_2 \cdot d\varphi_2 - e_3 \cdot d\varphi_3}, \end{array}$$

wobei wieder die Striche über den Buchstaben die geometrische Addition andeuten sollen. Dabei sind alle von der unendlich kleinen Rotation $d\varphi_1$ herrührenden Verschiebungskomponenten senkrecht zur Längsachse des ersten Gliedes, die mit $d\varphi_2$ bezüglich $d\varphi_3$ zusammenhängenden Verschiebungskomponenten senkrecht zur Längsachse des zweiten bezüglich dritten Gliedes gerichtet. Die drei Komponenten der Verschiebung eines Einzelschwerpunktes besitzen daher dieselben Richtungsunterschiede wie die drei Längsachsen. Es bilden also die erste und zweite den Winkel $\varphi_2 - \varphi_1$, die erste und dritte den Winkel $\varphi_3 - \varphi_1$ und die zweite und dritte den Winkel $\varphi_3 - \varphi_2$ miteinander.

Indem man durch Division der in einem bestimmten Moment stattfindenden unendlich kleinen Verschiebungen der Einzelschwerpunkte relativ zum Gesamtschwerpunkt mit dem Zeitdifferential dt zu den Geschwindigkeiten v_h der Punkte S_h relativ zu S_0 übergeht, kann man leicht den Beitrag angeben, welchen jeder Schwerpunkt infolge seiner Geschwindigkeit v_h zu dem Ausdruck für die lebendige Kraft des Systems relativ zum Gesamtschwerpunkt liefert. Derselbe besitzt die Größe $\frac{1}{2} m_h v_h^2$. Außerdem hat man nur noch den Einfluß zu berücksichtigen, den die Rotation eines jeden der drei Glieder um seinen Schwerpunkt S_h auf die Größe der lebendigen Kraft ausübt. Bezeichnet man allgemein mit $\varkappa_h$ den Trägheitsradius des h-ten Gliedes in bezug auf die zu den Gelenkachsen parallele Achse durch seinen Schwerpunkt S_h, so ist der von der Winkelgeschwindigkeit φ_h' des h-ten Gliedes herrührende Beitrag zur lebendigen Kraft $\frac{1}{2} m_h \varkappa_h^2 \cdot \varphi_h'^2$.

Bezeichnet man die lebendige Kraft des ganzen Systems relativ zum Gesamtschwerpunkt mit T_r, so hat man demnach

$$T_r = \frac{1}{2} \sum_1^3{}^h m_h [v_h^2 + \varkappa_h^2 \cdot \varphi_h'^2]. \tag{59}$$

Berechnet man auf Grund der unter (58) angegebenen Verschie-

bungen der Einzelschwerpunkte relativ zum Gesamtschwerpunkte die Werte von v_1^2, v_2^2, v_3^2, so ergibt sich nach geeigneter Zusammenfassung und Umkehrung der Winkeldifferenzen für T_r zunächst der Ausdruck:

$$
\begin{aligned}
(60)\quad T_r = {} & \tfrac{1}{2}(m_1 \varkappa_1^2 + m_1 e_1^2 + m_2 d_1^2 + m_3 d_1^2) \cdot \varphi_1'^2 \\
& + \tfrac{1}{2}(m_2 \varkappa_2^2 + m_1 c_2^2 + m_2 e_2^2 + m_3 d_2^2) \cdot \varphi_2'^2 \\
& + \tfrac{1}{2}(m_3 \varkappa_3^2 + m_1 c_3^2 + m_2 c_3^2 + m_3 e_3^2) \cdot \varphi_3'^2 \\
& + (m_1 e_1 c_2 - m_2 d_1 e_2 + m_3 d_1 d_2) \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \varphi_1' \cdot \varphi_2' \\
& + (m_1 e_1 c_3 - m_2 d_1 c_3 - m_3 d_1 e_3) \cos(\varphi_1 - \varphi_3) \cdot \varphi_1' \cdot \varphi_3' \\
& + (m_1 c_2 c_3 + m_2 e_2 c_3 - m_3 d_2 e_3) \cos(\varphi_2 - \varphi_3) \cdot \varphi_2' \cdot \varphi_3'.
\end{aligned}
$$

Diesen Ausdruck kann man nun in viel einfacherer Form schreiben, wenn man die Bedeutung der in den Klammern stehenden algebraischen Summen berücksichtigt. Nach den Erörterungen des ersten Abschnittes (vgl. die Formeln (4) auf Seite 13) stellen die drei ersten Summen, mit denen die Quadrate der Winkelgeschwindigkeiten multipliziert sind, die Trägheitsmomente der drei reduzierten Systeme in bezug auf die zu den Gelenkachsen parallelen Achsen durch die drei Hauptpunkte dar. Da schon früher die entsprechenden Trägheitsradien mit k_h bezeichnet worden sind, so kann man also für diese Summen einfach $m_0 k_h^2$ schreiben.

Die drei letzten Klammerausdrücke besitzen ebenfalls eine sehr einfache Bedeutung. Ersetzt man in dem ersten derselben e_1 durch $s_1 - d_1$ (vgl. Figg. 1 und 2), so vereinfacht sich der Ausdruck in Rücksicht auf die zweite Formel von (1) zunächst auf $m_1 s_1 c_2$. Da $m_1 s_1$ nach (2) durch $m_0 d_1$ ersetzt werden kann, so hat man also als Wert der vierten Klammer $m_0 d_1 c_2$. Der fünfte Klammerausdruck geht zunächst bei Berücksichtigung der dritten Formel der Gruppe (1) über in $m_1 e_1 c_3 + m_1 d_1 c_3$. Da nun $e_1 + d_1$ gleich s_1 und $m_1 s_1$ gleich $m_0 d_1$ ist, so erhält man schließlich als Wert der Klammer $m_0 d_1 c_3$. Endlich geht der letzte Klammerausdruck in Rücksicht auf e_3 gleich $-r_3 + c_3$ (Figg. 1 und 2) und auf die zweite Formel der Gruppe (1) und die letzte der Gruppe (2) über in $m_0 c_3 d_2$. Man hat daher für die lebendige Kraft des ganzen Systems relativ zum Gesamtschwerpunkte S_0 den verhältnismäßig einfachen Wert

$$
\begin{aligned}
(61)\quad T_r = {} & \tfrac{1}{2} m_0 k_1^2 \cdot \varphi_1'^2 + \tfrac{1}{2} m_0 k_2^2 \cdot \varphi_2'^2 + \tfrac{1}{2} m_0 k_3^2 \cdot \varphi_3'^2 \\
& + m_0 d_1 c_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \varphi_1' \varphi_2' + m_0 d_1 c_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) \cdot \varphi_1' \varphi_3' \\
& + m_0 d_2 c_3 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) \cdot \varphi_2' \varphi_3'.
\end{aligned}
$$

Es ist zu beachten, daß auch hierbei die einzelnen Massen m_h gar nicht explicite auftreten. Dies ist wieder der Einführung der reduzierten Systeme und Hauptpunkte zu verdanken. Denn die Größen der Trägheitsradien k_h und der Hauptstrecken c_h und d_h hängen ja hauptsächlich von der Masse und Massenverteilung der einzelnen

Glieder ab, und der Einfluß, den die einzelnen Massen auf den Wert der lebendigen Kraft ausüben, macht sich allein in der Länge dieser Strecken geltend.

Bisher war nur die lebendige Kraft relativ zum Gesamtschwerpunkte S_0 in Betracht gezogen worden. Bleibt nun der letztere nicht fest, sondern bewegt er sich mit der Geschwindigkeit v_0 im Raume fort, so kommt zu der relativen lebendigen Kraft T_r noch die lebendige Kraft $\frac{1}{2}m_0 v_0^2$ der Bewegung des Gesamtschwerpunktes hinzu. Sind x_0' und y_0' die Komponenten der Geschwindigkeit v_0 des Schwerpunktes S_0, so kann man auch $x_0'^2 + y_0'^2$ für v_0^2 setzen. Bezeichnet man die totale lebendige Kraft mit T, so hat man demnach

$$(62) \quad \begin{aligned} T = \tfrac{1}{2} m_0 \{ & x_0'^2 + y_0'^2 + k_1^2 \cdot \varphi_1'^2 + k_2^2 \cdot \varphi_2'^2 + k_3^2 \cdot \varphi_3'^2 \\ & + 2 d_1 c_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \varphi_1' \varphi_2' + 2 d_1 c_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) \cdot \varphi_1' \varphi_3' \\ & + 2 d_2 c_3 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) \cdot \varphi_2' \varphi_3' \}. \end{aligned}$$

Für den schon früher in Betracht gezogenen speziellen Fall, daß bei der ebenen Bewegung des Systems ein Punkt O_1 der Längsachse des ersten Körpers (Fig. 8) festbleibt, läßt sich nach (27) v_0 leicht durch die drei Winkelgeschwindigkeiten ausdrücken. Berücksichtigt man, daß die drei in Formel (27) auf der rechten Seite auftretenden Geschwindigkeitskomponenten wieder senkrecht zu den drei Längsachsen gerichtet sind, so erhält man

$$(63) \quad \begin{aligned} v_0^2 = & c_1^2 \cdot \varphi_1'^2 + c_2^2 \varphi_2'^2 + c_3^2 \varphi_3'^2 + 2 c_1 c_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \varphi_1' \varphi_2' \\ & + 2 c_1 c_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) \varphi_1' \varphi_3' + 2 c_2 c_3 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) \varphi_2' \varphi_3'. \end{aligned}$$

Setzt man diesen Wert an Stelle von $x_0'^2 + y_0'^2$ in den Ausdruck (62) für T ein, so läßt sich der letztere wieder durch geeignete Zusammenfassung auf sechs Glieder reduzieren. Das ist natürlich immer der Fall; denn die lebendige Kraft ist ja eine homogene Funktion zweiten Grades der drei Winkelgeschwindigkeiten.

Die jetzt auftretenden Klammerausdrücke haben nun auch wieder sehr bemerkenswerte Bedeutung. Der erste ist, wie man leicht sieht $(m_0 k_1^2 + m_0 c_1^2)$. Derselbe drückt nichts anderes als das Trägheitsmoment des ersten reduzierten Systems in bezug auf die durch O_1 gehende, zu den Gelenkachsen parallele Achse aus; denn H_1 ist ja der Schwerpunkt des ersten reduzierten Systems und c_1 der Abstand des Punktes O_1 von H_1 (Fig. 8). Bezeichnet man den auf die Achse durch O_1 bezogenen Trägheitsradius mit λ_1, so läßt sich also der Klammerausdruck durch $m_0 \lambda_1^2$ ersetzen. Die beiden nächsten Klammerausdrücke sind $(m_0 k_2^2 + m_0 c_2^2)$ und $(m_0 k_3^2 + m_0 c_3^2)$. Dieselben sind die Trägheitsmomente des zweiten und dritten reduzierten Systems in bezug auf die Gelenkachsen $G_{1,2}$ und $G_{2,3}$. Man kann für dieselben daher auch $m_0 \lambda_2^2$ und $m_0 \lambda_3^2$ schreiben, unter λ_2, λ_3 die zugehörigen Trägheitsradien verstanden. Beachtet man noch, daß $c_1 + d_1$

durch l_1, und $c_2 + d_2$ durch l_2 ersetzt werden können, wobei l_1 den Abstand des Gelenkpunktes $G_{1,2}$ vom festen Punkte O_1, und l_2 den Abstand des Gelenkpunktes $G_{2,3}$ von $G_{1,2}$ bedeutet, so hat man für die totale lebendige Kraft in dem speziellen Falle bedingter Beweglichkeit von drei Graden der Freiheit

$$(64)\quad \begin{aligned} T = \tfrac{1}{2} m_0 \lambda_1^2 \cdot \varphi_1'^2 + \tfrac{1}{2} m_0 \lambda_2^2 \cdot \varphi_2'^2 + \tfrac{1}{2} m_0 \lambda_3^2 \cdot \varphi_3'^2 \\ + m_0 l_1 c_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\varphi_1'\varphi_2' + m_0 l_1 c_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_3)\varphi_1'\varphi_3' \\ + m_0 l_2 c_3 \cos(\varphi_2 - \varphi_3)\varphi_2'\varphi_3'. \end{aligned}$$

Bei einem System von nur zwei durch ein Scharniergelenk miteinander verbundenen Gliedern nehmen die zum Gesamtschwerpunkte S_0 relative und die totale lebendige Kraft im Falle freier Beweglichkeit des Gelenksystems, wie man leicht erkennt, die einfacheren Formen an

$$(65)\quad T_r = \tfrac{1}{2} m_0 k_1^2 \cdot \varphi_1'^2 + \tfrac{1}{2} m_0 k_2^2 \cdot \varphi_2'^2 + m_0 d_1 c_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \varphi_1'\varphi_2'$$

und

$$(66)\quad T = \tfrac{1}{2} m_0 \{ x_0'^2 + y_0'^2 + k_1^2 \varphi_1'^2 + k_2^2 \varphi_2'^2 + 2 d_1 c_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \varphi_1'\varphi_2' \}.$$

Ist insbesondere ein Punkt O_1 der ersten Längsachse fest, so hat man für die totale lebendige Kraft

$$(67)\quad T = \tfrac{1}{2} m_0 \lambda_1^2 \cdot \varphi_1'^2 + \tfrac{1}{2} m_0 \lambda_2^2 \cdot \varphi_2'^2 + m_0 l_1 c_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\varphi_1'\varphi_2'.$$

5. Die Elementararbeiten der Kräfte.

Im allgemeinen wird bei der Bewegung des dreigliedrigen Gelenksystems die lebendige Kraft desselben nicht konstant bleiben. Die Änderungen des Wertes derselben stehen nun in bestimmter Beziehung zu den Elementararbeiten der wirksamen äußeren und inneren Kräfte. Um diese Beziehungen, welche in den Bewegungsgleichungen des Körpersystems ihren Ausdruck finden, zu formulieren, ist zunächst festzustellen, welche Elementararbeiten die am Gelenksystem wirksamen Kräfte leisten, wenn das System einer beliebigen Verrückung unterworfen wird, wobei der gemachten Voraussetzung ebener Bewegung entsprechend alle Kräfte innerhalb der festen Ebene der Schwerpunkte liegen sollen.

Um diese Aufgabe für eine bestimmte Kraft zu lösen, hat man die Größe und Richtung der Translation zu bestimmen, welche der Angriffspunkt der Kraft bei der Verrückung des Systems erleidet. Die Projektion dieser Translation auf die Richtung der Kraft, multipliziert mit der Intensität der letzteren, gibt den Wert der Elementararbeit, welche die Kraft während der betreffenden Verrückung des Systems leistet. Ist die Intensität der Kraft K, die Größe der Translation ihres Angriffspunktes $d\tau$ und der Winkel zwischen den Richtungen

von Kraft und Translation α, so besitzt demnach die Elementararbeit der Kraft den Wert $K \cos\alpha \cdot d\tau$.

Es muß nun in jedem Falle Gegenstand einer besonderen Untersuchung sein, die Größe der Translation des Angriffspunktes und den Winkel α aus den allgemeinen Koordinaten zu bestimmen. Diese Untersuchung soll zunächst im Prinzip für das freibewegliche System und dann für das System angestellt werden, bei welchem das erste Glied um eine feste zu den Gelenkachsen parallele Achse durch den Punkt O_1 der Längsachse desselben drehbar ist. Es wird auch hier den Hauptpunkten wieder eine bemerkenswerte Rolle zufallen.

Die Lage des dreigliedrigen Gelenksystems ist, wie schon früher auseinandergesetzt wurde, im allgemeinsten Falle ebener Bewegung durch fünf allgemeine Koordinaten eindeutig bestimmt. Hierzu sollen nun außer den drei Winkelgrößen φ_1, φ_2, φ_3 noch die beiden rechtwinkligen Koordinaten x_0, y_0 des Gesamtschwerpunktes S_0 verwendet werden. Der Anfangspunkt O des in der Ebene der Schwerpunkte festen Koordinatensystems (vgl. Fig. 9 auf Seite 44) kann dabei ganz beliebig angenommen werden; die positive X-Achse soll aber wieder die Richtung besitzen, von der aus die Winkelkoordinaten φ_1, φ_2, φ_3 der drei Längsachsen gemessen werden. Das System kann dann aus einer Lage in irgend eine unendlich benachbarte dadurch übergeführt werden, daß man ihm sukzessive fünf Verrückungen erteilt, bei welchen immer nur je eine der fünf Koordinaten ihren Wert ändert, während alle anderen konstant bleiben.

Einer alleinigen Änderung des Winkels φ_j um $d\varphi_j$ entspricht nach den früheren Entwicklungen eine unendlich kleine Rotation des j-ten Gliedes von der Größe $d\varphi_j$ um die zu den Gelenkachsen parallele Achse durch den Hauptpunkt H_j, verbunden mit gleichzeitiger Translation der beiden anderen Glieder; denn bei dieser Drehung bleibt der Gesamtschwerpunkt S_0 an seiner Stelle, und die Koordinaten x_0, y_0 behalten, ebenso wie die beiden anderen Winkelkoordinaten, ihren Wert unverändert bei. Einer alleinigen Änderung einer der Strecken x_0 und y_0 um dx_0 bezüglich dy_0 entspricht eine Translation des ganzen Gelenksystems von der Größe dx_0 bezüglich dy_0 parallel der X-Achse bezüglich Y-Achse.

Für diese fünf Verrückungen sollen die Bezeichnungen V_{φ_1}, V_{φ_2}, V_{φ_3}, V_{x_0} und V_{y_0} eingeführt werden.

a) *Elementararbeiten äußerer Kräfte, insbesondere der Schwere.*

Es greife nun eine Kraft K in einem beliebigen Punkte A_1 des ersten der drei Glieder an (Fig. 9), welcher von der durch den Hauptpunkt H_1 gehenden zu den Gelenkachsen parallelen Achse den Abstand a_1 besitzt. Der Angriffspunkt A_1 erfährt dann bei der Ver-

rückung V_{φ_1} eine Verschiebung von der Größe $a_1 d\varphi_1$. Bildet dieselbe mit der Richtung von K den Winkel α_1, so ist die zur Verrückung V_{φ_1} gehörende Elementararbeit $K \cos\alpha_1 \cdot a_1 d\varphi_1$. Beachtet man, daß $K\cos\alpha_1 \cdot a_1$ das Drehungsmoment D_{φ_1} der Kraft in bezug auf die Achse durch H_1 ist, so kann man die Elementararbeit auch in der Form

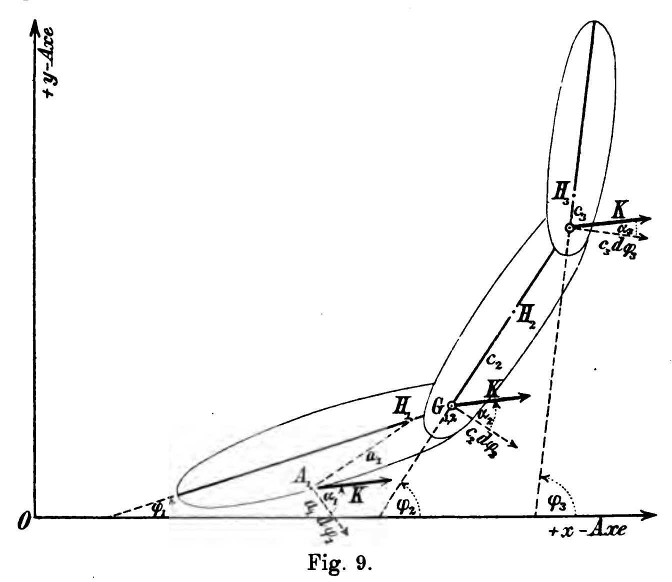


Fig. 9.

$D_{\varphi_1} \cdot d\varphi_1$ schreiben. Fällt insbesondere der Angriffspunkt der Kraft mit dem Hauptpunkte H_1 zusammen, so besitzt die Elementararbeit bei der Verrückung V_{φ_1} den Wert Null.

Bei der Verrückung V_{φ_2} erfährt der Angriffspunkt A_1 eine Verschiebung, welche bezüglich gleich derjenigen des Gelenkmittelpunktes $G_{1,2}$ ist; dieselbe besitzt also, absolut genommen, die Größe $c_2 d\varphi_2$. Bildet sie mit der Richtung von K den Winkel α_2 (vgl. Fig. 9), so ist die zur Verrückung V_{φ_2} gehörende Elementararbeit der Kraft $K\cos\alpha_2 \cdot c_2 d\varphi_2$. Dabei ist $K\cos\alpha_2 \cdot c_2$ das Drehungsmoment D_{φ_2}, welches die Kraft für die Achse durch H_2 besitzen würde, wenn sie nicht in A_1, sondern im Gelenkmittelpunkte $G_{1,2}$ angriffe; man kann also auch schreiben $D_{\varphi_2} \cdot d\varphi_2$.

Entsprechend erhält man für die Elementararbeit, welche die Kraft bei der Verrückung V_{φ_3} leistet, den Wert $K\cos\alpha_3 \cdot c_3 d\varphi_3$ oder $D_{\varphi_3} \cdot d\varphi_3$, wenn man unter α_3 den Winkel zwischen der Verschiebung des Punktes $G_{2,3}$ und der Kraftrichtung (vgl. Fig. 9), und unter D_{φ_3} das Drehungsmoment versteht, welches die Kraft für die Achse durch H_3 besitzt, wenn man ihren Angriffspunkt nach $G_{2,3}$ verlegt denkt, ohne ihre Richtung zu ändern.

Wiederholt man dieselben Betrachtungen für die Fälle, wo K

in einem Punkte des zweiten oder dritten Gliedes angreift, so ergibt sich allgemein der

Satz: Bei der Verrückung V_{φ_j} leistet jede am j-ten Gliede angreifende Kraft eine Elementararbeit, die dargestellt ist durch das Produkt der Zunahme $d\varphi_j$ des Winkels φ_j in das Drehungsmoment, welches die Kraft für die zu den Gelenkachsen parallele Achse durch den Hauptpunkt des j-ten Gliedes besitzt. Greift die Kraft an einem der beiden anderen Glieder an, so tritt an Stelle des zweiten Faktors das Drehungsmoment, welches die Kraft in bezug auf die Achse durch H_j besitzt, wenn sie parallel mit sich nach dem ihr auf dem Linienzuge der drei Längsachsen zunächst liegenden Gelenkmittelpunkte des j-ten Gliedes verlegt wird.

Die Elementararbeiten, welche eine Kraft bei den beiden Verrückungen V_{x_0} und V_{y_0} leistet, lassen sich leicht angeben, wenn man weiß, welche Winkel die Richtung der Kraft mit den beiden Koordinatenachsen bildet. Ist die Richtung der Kraft gegen die positive X-Achse um den Winkel ψ geneigt, so sind die beiden Elementararbeiten $K\cos\psi \cdot dx_0$ und $K\sin\psi \cdot dy_0$, wobei $K\cos\psi$ und $K\sin\psi$ die Komponenten der Kraft K parallel den beiden Koordinatenachsen darstellen.

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen ist es nicht schwer, die Elementararbeiten im bestimmten Falle sofort anzugeben.

Als Beispiel möge die Bestimmung der von der Schwere geleisteten Elementararbeiten vorgenommen werden. Man kann die Wirkungsweise derselben durch die drei in den Einzelschwerpunkten S_1, S_2 und S_3 angreifenden und vertikal nach unten ziehenden Gewichtskräfte $m_1 g$, $m_2 g$, $m_3 g$ darstellen, unter g die Beschleunigung der Schwere verstanden. Dann erkennt man aber sofort, daß die bei der Verrückung V_{φ_1} geleistete Elementararbeit den Wert

$$m_1 g e_1 \cos\varphi_1 \cdot d\varphi_1 - (m_2 g + m_3 g) d_1 \cos\varphi_1 \cdot d\varphi_1,$$

d. h. aber in Rücksicht auf die erste Formel von (1) den Wert Null besitzt. Ganz dasselbe Resultat ergibt sich natürlich auch bei den beiden Verrückungen V_{φ_2} und V_{φ_3}.

Man gelangt auch auf folgende Weise zu diesem Ergebnis. Bei jeder der drei Verrückungen V_{φ_j} wirken die beiden dem j-ten Gliede nicht angehörenden Schwerkräfte so auf dasselbe ein, als ob jede an dem ihr zunächst liegenden Gelenkmittelpunkte angriffe. Diese beiden Schwerkräfte setzen sich nun in jedem Falle mit der im Schwerpunkte des j-ten Gliedes direkt angreifenden, zu der im Hauptpunkte des j-ten Gliedes angreifenden Gesamtschwere $m_0 g$ zusammen. Dies geht ohne weiteres aus der Zusammensetzung der reduzierten Systeme und der Bedeutung der Hauptpunkte als Schwerpunkte derselben hervor.

Eine in H_j angreifende Kraft leistet aber bei der Verrückung V_{φ_j} keine Elementararbeit.

Für die Verrückungen V_{x_0} und V_{y_0} kann das Gelenksystem als starr angesehen werden. Die Wirkung wird infolgedessen durch die einzige im Gesamtschwerpunkte S_0 angreifende Kraft $m_0 g$ dargestellt. Da die Richtung derselben mit der Richtung der positiven X-Achse den Winkel $-\frac{\pi}{2}$ bildet, so ist die bei der Verrückung V_{x_0} geleistete Elementararbeit auch Null, während die zu V_{y_0} gehörende Elementararbeit den Wert $-m_0 g \cdot dy_0$ besitzt, was von vornherein evident ist.

Wenn das dreigliedrige Gelenksystem nur drei Grade dei Freiheit besitzt, indem z. B. das erste Glied sich nur um die Achse durch O_1 (Fig. 8 auf Seite 28) drehen kann, so genügen bekanntlich die drei Winkel φ_j, um die Stellung des Systems anzugeben. Die Verrückung V_{φ_j}, welche der alleinigen Änderung des Winkels φ_j entspricht, stellt sich aber dann nicht mehr als unendlich kleine Rotation des j-ten Gliedes um die Achse durch den Hauptpunkt H_j mit gleichzeitiger Translation der beiden anderen Glieder dar; denn eine solche Verrückung vermag das System bei Festhaltung des Punktes O_1 gar nicht auszuführen. Die Rotation muß jetzt vielmehr beim ersten Gliede um die Achse durch O_1, beim zweiten um die Achse durch $G_{1,2}$ und beim dritten um die Achse durch $G_{2,3}$ stattfinden. Demnach erleiden nur bei der Verrückung V_{φ_1} die beiden anderen Glieder Translationen; bei der Verrückung V_{φ_2} bleibt dagegen das erste Glied fest, und bei der Verrückung V_{φ_3} behalten sogar die beiden ersten Glieder ihre Stellung im Raume bei. Es leistet daher eine am ersten Gliede angreifende Kraft nur bei der Verrückung V_{φ_1} und eine am zweiten Gliede angreifende Kraft nur bei den beiden Verrückungen V_{φ_1} und V_{φ_2} Elementararbeiten. Einer am dritten Gliede angreifenden Kraft kommen dagegen bei allen drei Verrückungen im allgemeinen Elementararbeiten zu.

Damit stimmt nun überein, daß die Drehungsmomente, welche in den Ausdrücken für die Elementararbeiten auftreten, wie man leicht bestätigt, jetzt nicht in bezug auf die Achsen durch die drei Hauptpunkte, sondern in bezug auf die Gelenkachsen durch O_1, $G_{1,2}$ und $G_{2,3}$ zu nehmen sind. Im übrigen ist die Methode zur Gewinnung der Elementararbeiten der an den verschiedenen Körpern angreifenden Kräfte dieselbe wie im Falle freier Beweglichkeit.

Bleibt nicht ein Punkt O_1 des ersten Gliedes, sondern ein Punkt O_2 oder O_3 der Längsachse des zweiten oder dritten Gliedes bei der Bewegung fest, so daß sich also das ganze Gelenksystem nur um eine durch O_2 oder O_3 hindurchgehende und zur festen Bewegungsebene senkrechte Achse drehen kann, so erhält man ganz entsprechende Resultate. Dieselben lassen sich in folgende beiden Sätze zusammenfassen:

Satz: Greift eine Kraft K an demjenigen (h-ten) Glied an, welchem der feste Punkt O_h angehört, so ist die Elementararbeit derselben bei der Verrückung V_{φ_h}, welche allein die Richtung der Längsachse dieses Gliedes ändert, gleich dem mit $d\varphi_h$ multiplizierten Drehungsmoment der Kraft in bezug auf die Achse durch O_h. Bei den übrigen Verrückungen leistet die Kraft in diesem Falle keine Arbeit.
und

Satz: Greift die Kraft K an einem der Glieder an, welchem der feste Punkt O_h nicht angehört, so ist die Elementararbeit derselben bei der Verrückung V_{φ_h} gleich dem mit $d\varphi_h$ multiplizierten Drehungsmoment, welches die Kraft in bezug auf die Achse durch O_h besitzt, wenn ihr Angriffspunkt nach demjenigen Gelenkpunkte des h-ten Gliedes verlegt wird, welcher innerhalb des Gelenksystems dem Angriffspunkte der Kraft am nächsten liegt. Bei der Verrückung, welche einer unendlich kleinen Rotation desjenigen Gliedes entspricht, an welchem die Kraft angreift, leistet dieselbe eine Elementararbeit gleich dem Produkt aus der entsprechenden Winkeländerung $d\varphi$ in das Drehungsmoment, welches die Kraft für diejenige Gelenkachse desselben Gliedes besitzt, die innerhalb des Systems dem Punkte O_h am nächsten liegt. Für die dritte Verrückung V_{φ_j} endlich kommt in Frage, ob das j-te Glied im Innern des Systems dem festen Punkte O_h näher oder entfernter liegt als das Glied, an welchem die Kraft angreift. Im ersteren Falle ist die Elementararbeit gleich dem mit $d\varphi_j$ multiplizierten Drehungsmoment, welches die Kraft in bezug auf die dem Punkte O_h näher liegende Gelenkachse des j-ten Gliedes besitzt, wenn man ihren Angriffspunkt nach dem von dem Punkte O_h entfernteren Gelenkpunkte des j-ten Gliedes verlegt; im letzteren Falle leistet die Kraft dagegen keine Arbeit.

Will man also beispielsweise wieder die Elementararbeit der Schwere für die Verrückung V_{φ_1} ableiten, wenn der Punkt O_1 der ersten Längsachse festbleibt, so hat man nur die beiden in S_2 und S_3 angreifenden Schwerkräfte nach $G_{1,2}$ verlegt zu denken. Dieselben setzen sich wieder mit der in S_1 angreifenden Schwerkraft zu der im Hauptpunkte H_1 angreifenden Gesamtschwerkraft von der Größe $m_0 g$ zusammen. Die Elementararbeit derselben ist dann gleich ihrem mit $d\varphi_1$ multiplizierten Drehungsmoment in bezug auf die Achse durch O_1. Bei der Verrückung V_{φ_2} hätte man nur die in S_3 angreifende Kraft $m_3 g$ nach $G_{2,3}$ zu verlegen und mit der in S_2 angreifenden Kraft $m_2 g$ zu einer Resultante zusammenzusetzen. Man kann aber auch hier die

in S_1 angreifende Kraft $m_1 g$ nach $G_{1,2}$ verlegen und den beiden anderen hinzufügen; denn ihr Drehungsmoment in bezug auf die Gelenkachse $G_{1,2}$ besitzt ja den Wert Null. Tut man dies, so erhält man als Elementararbeit der Gesamtschwere bei der Verrückung V_{φ_2} das mit $d\varphi_2$ multiplizierte Drehungsmoment der in H_2 angreifenden Kraft $m_0 g$ in bezug auf $G_{1,2}$. Analog ergibt sich als Elementararbeit der Gesamtschwere bei der Verrückung V_{φ_3} das mit $d\varphi_3$ multiplizierte Drehungsmoment der in H_3 angreifenden Kraft $m_0 g$ in bezug auf die Gelenkachse $G_{2,3}$.

Die Elementararbeiten der Schwere verschwinden also in dem Falle, wo der erste Körper nur Drehungen um die Achse durch O_1 ausführen kann, bei den drei möglichen Verrückungen V_{φ_j} des Systems im allgemeinen nicht. Dies würde nur der Fall sein, wenn die Hauptpunkte H_1, H_2, H_3 bezüglich mit O_1, $G_{1,2}$, $G_{2,3}$ zusammenfielen.

Handelt es sich darum, die Elementararbeit einer Kraft nicht für eine der Verrückungen V_{φ_j}, V_{x_0} oder V_{y_0}, sondern für die resultierende Gesamtverrückung des ganzen Systems anzugeben, so hat man die Elementararbeiten einfach zu addieren.

In dem zuletzt betrachteten Falle bedingter Beweglichkeit würde demnach die gesamte Elementararbeit der Schwere bei horizontaler Richtung der X-Achse (Fig. 8) durch

$$-m_0 g(c_1 \cos\varphi_1 \cdot d\varphi_1 + c_2 \cos\varphi_2 \cdot d\varphi_2 + c_3 \cos\varphi_3 \cdot d\varphi_3)$$

gemessen werden. Dabei bedeutet nach dem Früheren der in Klammer stehende Ausdruck die vertikale Verschiebung des Gesamtschwerpunktes S_0 in der Richtung nach oben; was natürlich von vornherein zu erwarten war.

b) Elementararbeiten innerer Kräfte, insbesondere von Muskelkräften.

Die für äußere Kräfte gewonnenen Resultate lassen sich nun ohne weiteres auch auf innere Kräfte des Systems anwenden, welche zwischen festen Punkten je zweier der drei Glieder in der Verbindungslinie derselben wirken und entgegengesetzt gleich sind. Bei einem organischen Gelenksystem ruft beispielsweise eine sich kontrahierende oder auch nur rein elastisch gespannte Muskelfaser ein Paar solcher entgegengesetzt gleicher Kräfte hervor. Wenn auch jede der beiden Kräfte für das einzelne Glied als äußere Kraft aufzufassen ist, so stellen sie doch beide zusammen für das ganze Gelenksystem ein Paar innerer Kräfte dar. Eine Folge hiervon ist, daß die Summe ihrer Elementararbeiten, welche sie bei den Verrückungen V_{x_0} und V_{y_0} des Gesamtschwerpunktes leisten, den Wert Null besitzt. Verlegt man sie nämlich beide nach dem Gesamtschwerpunkte S_0 des Systems, so heben sich in der Tat die beiden Kräfte auf, da sie entgegengesetzt gleich sind.

Bei jeder der drei Verrückungen V_{φ_h} leisten die beiden Kräfte dagegen Elementararbeiten, welche in den meisten Fällen nicht mehr entgegengesetzt gleich sind, so daß ihre Summe einen bestimmten positiven oder negativen Wert besitzt, der die resultierende Elementararbeit der beiden Kräfte bei der betreffenden Verrückung darstellt. Zur Bestimmung derselben lassen sich direkt die für die Wirkung der äußeren Kräfte gefundenen Resultate verwenden.

Es kann nun einmal dadurch eine verschiedene Wirkungsweise bedingt sein, daß die Linie, welche die Richtung des Zugs dieser Kräfte angibt, durch zwei feste Punkte benachbarter oder nicht benachbarter Glieder hindurchgeht, ein anderes Mal dadurch, daß sie zwischen diesen Punkten geradlinig ausgespannt oder durch Vorsprünge an den Gliedern am geradlinigen Verlauf gehindert ist. Für die Muskeln an organischen Gelenksystemen bedeutet dies eine Unterscheidung zwischen eingelenkigen und mehrgelenkigen Muskeln einerseits und zwischen frei zwischen zwei Knochenpunkten oder auf dem Umwege über Knochenvorsprünge wirkenden Muskeln andererseits.

Demnach kann man für das dreigliedrige Gelenksystem folgende Fälle unterscheiden:

α) Die beiden entgegengesetzt gleichen Kräfte wirken zwischen zwei benachbarten Gliedern, und zwar so, daß die Zuglinie geradlinig zwischen den beiden Ansatzpunkten ausgespannt ist. Die Kräfte mögen zwischen dem ersten und zweiten Gliede wirken; die Intensität derselben sei K. Ihre Richtungen, welche durch die Lage der beiden Ansatzpunkte A_1, A_2 (vgl. Fig. 10) bestimmt sind, verlaufen entgegengesetzt.

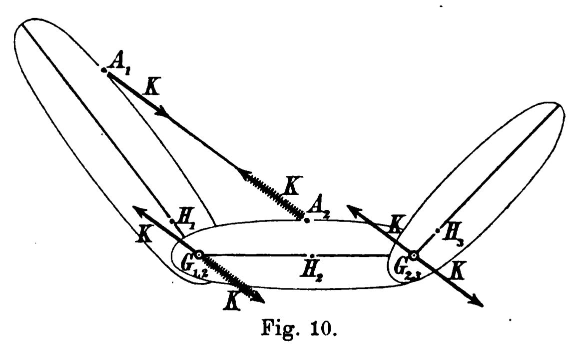


Fig. 10.

Aus den Betrachtungen über die Wirkungsweise äußerer Kräfte ergibt sich, daß für die Verrückung V_{φ_1} die in A_1 angreifende Kraft eine Elementararbeit $D'_{\varphi_1} \cdot d\varphi_1$ leistet, wo D'_{φ_1} das Drehungsmoment der Kraft in bezug auf die Achse durch den Hauptpunkt H_1 ist, während die Elementararbeit der in A_2 angreifenden Kraft die Größe $D''_{\varphi_1} d\varphi_1$ besitzt, wo D''_{φ_1} das Drehungsmoment bedeutet, welches dieselbe in bezug auf die Achse durch H_1 besitzen würde, wenn man sie parallel mit sich nach dem Gelenkpunkte $G_{1,2}$ verlegte. Die Gesamtelementararbeit beider entgegengesetzt gleichen Kräfte ist daher

$$(D'_{\varphi_1} + D''_{\varphi_1}) d\varphi_1 .$$

Da die beiden in A_1 und $G_{1,2}$ angreifenden Kräfte entgegengesetzt gleich sind, so bilden sie ein Kräftepaar im Poinsotschen Sinne; das Moment desselben ist gleich $D'_{\varphi_1} + D''_{\varphi_1}$.

Man könnte das Resultat auch so auffassen: Die beiden Drehungsmomente setzen sich zu einem einzigen D_{φ_1} zusammen, welches gleich dem Drehungsmoment ist, das die eine im Punkte A_1 des ersten Körpers angreifende Kraft für die Gelenkachse durch $G_{1,2}$ besitzt.

Für die Verrückung V_{φ_2} ergibt sich in analoger Weise als Gesamtelementararbeit der beiden Kräfte das mit $d\varphi_2$ multiplizierte Moment des Kräftepaares, welches durch die in A_2 angreifende Kraft und die nach $G_{1,2}$ verlegte, ihr entgegengesetzt gleiche Kraft gebildet wird. Das letztere ist auch gleich dem Drehungsmoment D_{φ_2}, welches die im Punkte A_2 des zweiten Körpers angreifende Kraft in bezug auf die Gelenkachse $G_{1,2}$ ausübt.

Bei dem in Figur 10 dargestellten Falle strebt das zur Verrückung V_{φ_1} gehörende Kräftepaar den Winkel φ_1 zu verkleinern, dagegen das zur Verrückung V_{φ_2} gehörende Kräftepaar den Winkel φ_2 zu vergrößern. Analytisch wird sich dies dadurch ausdrücken, daß im ersten Falle das Drehungsmoment einen negativen Wert annimmt, weil der Winkel zwischen Kraftrichtung und Translation des Punktes A_1 bei der Verrückung V_{φ_1} größer wie $\frac{\pi}{2}$ ist.

Da für die dritte Verrückung V_{φ_3} die beiden Kräfte nach demselben Punkte, nämlich $G_{2,3}$, verlegt werden müssen, so heben sich ihre Wirkungen gegenseitig auf, und die resultierende Elementararbeit ist Null.

β) Die beiden entgegengesetzt gleichen Kräfte wirken zwischen zwei benachbarten Gliedern so, daß die Zuglinie über einen Vorsprung des einen Gliedes läuft. Dieser Fall läßt sich auf den ersten zurückführen. Es kommt für die Wirkung der beiden Kräfte hier nur das Stück der Zuglinie in Betracht, welches zwischen zwei Punkten der beiden Glieder geradlinig verläuft, also in der nebenstehenden Figur 11 nur das Stück $A_1'A_2$. Das zwischen den beiden Punkten A_1, A_1'' bezüglich A_1' desselben Gliedes verlaufende Stück kommt für die Gesamtelementar-

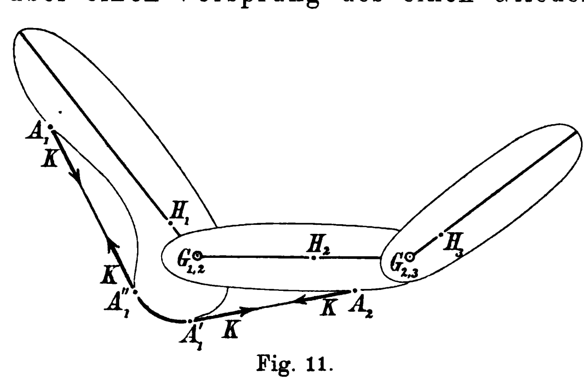


Fig. 11.

arbeit der beiden Kräfte nicht in Betracht, da die beiden Drehungsmomente der in A_1 und A_1'' angreifenden entgegengesetzt gleichen Kräfte sich gegenseitig in ihren Wirkungen aufheben.

Ein Unterschied zwischen dem ersten (α)) und zweiten (β)) Falle besteht nur darin, daß im ersten Falle das geradlinige Stück der Zuglinie zwischen zwei festen Punkten A_1, A_2 der beiden Körper ausgespannt war, während im zweiten Falle der eine Endpunkt A_1' dieser geradlinigen Strecke im allgemeinen mit der Veränderung der Winkel φ_1 und φ_2 seine Lage im ersten Gliede nicht beibehält. Diese Wanderung des Punktes A_1' hängt ganz von der Gestalt des ersten Gliedes ab, ihre Bestimmung muß daher für jedes Gelenksystem den Gegenstand einer besonderen Untersuchung bilden.

γ) Die beiden entgegengesetzt gleichen Kräfte wirken zwischen zwei nicht benachbarten Gliedern.

Da die Fälle, in denen die Zuglinie sich nicht von Anfang bis zu Ende geradlinig zwischen zwei festen Punkten der beiden Glieder ausspannen kann, sich auf den Fall zurückführen lassen, daß die Kräfte ungehindert zwischen den beiden Ansatzpunkten wirken, so wird es nur nötig sein, die allgemeinen Gesichtspunkte für die Behandlung dieses letzteren Falles aufzustellen.

Wirken beide Kräfte längs der zwischen den festen Punkten A_1 und A_3 des ersten und dritten Gliedes geradlinig ausgespannten Zuglinie (Fig. 12), so ergeben sich aus Betrachtungen, welche den früheren vollständig analog sind, folgende Resultate:

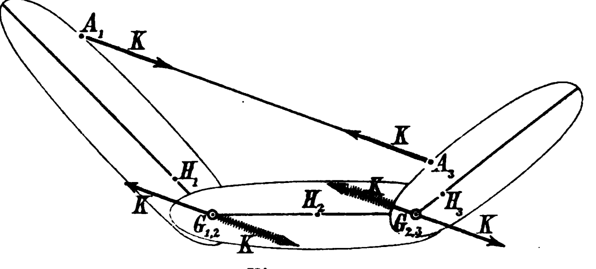


Fig. 12.

Die Gesamtelementararbeit der beiden Kräfte ist

für die Verrückung V_{φ_1} gleich dem mit $d\varphi_1$ multiplizierten Moment D_{φ_1} des Kräftepaares, welches durch die in A_1 angreifende und die ihr entgegengesetzt gleiche nach $G_{1,2}$ verlegte Kraft gebildet wird,

für die Verrückung V_{φ_2} gleich dem mit $d\varphi_2$ multiplizierten Moment des Kräftepaares, welches durch die von A_1 nach $G_{1,2}$ und die von A_3 nach $G_{2,3}$ parallel mit sich verlegten, entgegengesetzt gleichen Kräfte dargestellt ist, und endlich

für die Verrückung V_{φ_3} gleich dem mit $d\varphi_3$ multiplizierten Moment des Kräftepaares, welches durch die in A_3 angreifende Kraft einerseits und die ihr entgegengesetzt gleiche nach $G_{2,3}$ verlegte Kraft zusammengesetzt ist.

Nimmt man endlich wieder an, das erste Glied sei im Punkte O_1 drehbar befestigt, so läßt sich leicht zeigen, daß das Festhalten des Punktes O_1 an den Elementararbeiten der für das frei bewegliche System betrachteten inneren Kräfte keine Änderung hervorbringt. Es lassen sich also die für das freie System gefundenen Resultate direkt auf den Fall der bedingten Beweglichkeit übertragen.

Ein Beispiel mag dies erläutern.

In dem durch Figur 10 auf S. 49 versinnlichten Falle würde bei Festhaltung eines Punktes O_1 des ersten Gliedes die Gesamtelementararbeit der beiden entgegengesetzt gleichen Kräfte K sich darstellen als das Produkt der Größe $d\varphi_1$ in die Summe der Drehungsmomente, welche die in A_1 angreifende und die ihr entgegengesetzt gleiche im Punkte $G_{1,2}$ angreifende Kraft in bezug auf die Achse durch den festen Punkt O_1 ausüben. Die beiden Drehungsmomente haben in diesem Falle verschiedenes Vorzeichen oder gleiches, je nachdem der Punkt O_1 außerhalb oder innerhalb des durch die beiden Kraftrichtungen gebildeten Flächenstreifens fällt. Man erkennt leicht, daß ihre algebraische Summe wie beim freibeweglichen System gleich dem Moment des Kräftepaares ist, welches durch die beiden in A_1 und $G_{1,2}$ angreifenden Kräfte gebildet wird.

6. Die Beziehungen zwischen den Änderungen der lebendigen Kraft und den Elementararbeiten der wirksamen Kräfte.

Die Beziehungen, welche zwischen den Änderungen der lebendigen Kraft des in Bewegung begriffenen Gelenksystems einerseits und den Elementararbeiten der sämtlichen äußeren und inneren Kräfte andererseits bestehen, sind gegeben durch die bestimmten Differentialgleichungen der Bewegung in der von Lagrange herrührenden Form, bei der die rechtwinkligen Koordinaten durch allgemeine Koordinaten ersetzt sind, welche die Lage des Systems vollständig bestimmen.

Für das zunächst in Betracht gezogene dreigliedrige Gelenksystem stellen die drei Winkel φ_1, φ_2, φ_3 in Verbindung mit den variabeln Koordinaten x_0, y_0 des Gesamtschwerpunktes bei freier Beweglichkeit des Systems, oder den konstanten Koordinaten des festbleibenden Punktes O_1 in dem betrachteten Falle bedingter Beweglichkeit ein solches System allgemeiner Koordinaten dar, durch welches die Lage und Gestalt des Körpersystems eindeutig bestimmt ist.

Das System der fünf Differentialgleichungen der Bewegung lautet für den Fall freier Beweglichkeit

$$
(68)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial x_0'}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_0} = Q_{x_0}\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial y_0'}\right) - \frac{\partial T}{\partial y_0} = Q_{y_0} \quad \text{und}\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi_h'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_h} = Q_{\varphi_h} \qquad (h = 1, 2, 3).
\end{aligned}
$$

Für den in Betracht gezogenen Fall bedingter Beweglichkeit, in welchem ein Punkt O_1 der Längsachse des ersten Körpers festbleibt, kommen die beiden ersten Gleichungen in Wegfall. Es treten auch keine neuen hinzu, da die Koordinaten des festbleibenden Punktes konstante Größen sind, so daß schon die drei dann noch übrig bleibenden Differentialgleichungen das vollständige System der Bewegungsgleichungen darstellen.

Die Ausführung der Differentiationen an dem in (62) auf S. 41 niedergelegten Ausdrucke für die gesamte lebendige Kraft des Systems bei freier Beweglichkeit ergibt zunächst die folgenden fünf Differentialgleichungen der Bewegung:

$$
(69)\quad
\begin{aligned}
m_0 \cdot x_0'' &= Q_{x_0},\\
m_0 \cdot y_0'' &= Q_{y_0},\\
m_0\{k_1^2 \cdot \varphi_1'' + d_1 c_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\cdot \varphi_2'' &+ d_1 c_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_3)\cdot \varphi_3''\\
+ d_1 c_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\cdot \varphi_2'^2 &+ d_1 c_3 \sin(\varphi_1 - \varphi_3)\cdot \varphi_3'^2\} = Q_{\varphi_1},\\
m_0\{k_2^2 \cdot \varphi_2'' + d_2 c_3 \cos(\varphi_2 - \varphi_3)\cdot \varphi_3'' &+ c_2 d_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)\cdot \varphi_1''\\
+ d_2 c_3 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)\cdot \varphi_3'^2 &+ c_2 d_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)\cdot \varphi_1'^2\} = Q_{\varphi_2},\\
m_0\{k_3^2 \cdot \varphi_3'' + c_3 d_1 \cos(\varphi_3 - \varphi_1)\cdot \varphi_1'' &+ c_3 d_2 \cos(\varphi_3 - \varphi_2)\cdot \varphi_2''\\
+ c_3 d_1 \sin(\varphi_3 - \varphi_1)\cdot \varphi_1'^2 &+ c_3 d_2 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)\cdot \varphi_2'^2\} = Q_{\varphi_3}.
\end{aligned}
$$

Die beiden ersten Gleichungen beziehen sich auf die Bewegung des Gesamtschwerpunktes S_0, die drei letzten dagegen auf die Bewegung des dreigliedrigen Gelenksystems um seinen Gesamtschwerpunkt. Dementsprechend enthalten diese die Winkelbeschleunigungen und Winkelgeschwindigkeiten der Drehung der einzelnen Glieder, jene dagegen nur die Komponenten der Beschleunigung des Gesamtschwerpunktes. Die Größen Q auf der rechten Seite der Gleichungen hängen sehr eng mit den Elementararbeiten der wirksamen Kräfte zusammen. So bedeuten allgemein $Q_{x_0} \cdot dx_0$ und $Q_{y_0} \cdot dy_0$ die Summen der Elementararbeiten sämtlicher äußerer Kräfte für die Verrückungen V_{x_0} und V_{y_0}; ferner sind die drei Produkte $Q_{\varphi_h} \cdot d\varphi_h$ die Summen der Elementararbeiten, welche die sämtlichen äußeren und inneren Kräfte bei den Verrückungen V_{φ_h} leisten. Nach den früheren Entwicklungen stellen daher die Größen Q_{x_0} und Q_{y_0} die Komponentensummen der äußeren Kräfte parallel den beiden Koordinatenachsen, und die Größen Q_{φ_h} Summen von Drehungsmomenten dar, welche in jedem Falle auf die zu den Gelenkachsen parallele Achse durch den Hauptpunkt des h-ten Gliedes bezogen sind. Zu diesen Drehungsmomenten tragen alle äußeren und inneren Kräfte bei, und zwar die am h-ten Gliede selbst angreifenden ohne weiteres, die an den anderen Gliedern angreifenden dagegen in der Weise, als ob sie parallel nach dem ihrem

Angriffspunkte innerhalb des Systems am nächsten liegenden Gelenkmittelpunkte des h-ten Gliedes verlegt wären.

In allen fünf Bewegungsgleichungen steht auf der linken Seite die Gesamtmasse m_0 des Gelenksystems als Faktor; dagegen treten die Massen m_h der einzelnen Glieder überhaupt nicht auf. Dies ist bei den letzten drei Gleichungen ausschließlich der Einführung der reduzierten Systeme und Hauptpunkte zuzuschreiben. Der Einfluß, welchen die Massen der Glieder auf die Drehung der mit ihnen zusammenhängenden anderen Glieder ausüben, drückt sich aus in den Größen der Trägheitsradien k_h der reduzierten Systeme und der Hauptstrecken c_h, d_h der einzelnen Glieder, welche in den drei letzten Bewegungsgleichungen außer den Winkeln φ_h noch vorkommen.

Wirken außer der Schwere keine äußeren Kräfte weiter, sondern nur innere Kräfte auf das Gelenksystem ein, so wird zunächt $Q_{x_0} = 0$ und $Q_{y_0} = -m_0 g$. Jede der Größen Q_{φ_h} stellt dann die Summe der Momente aller Kräftepaare dar, welche dadurch entstehen, daß man zu den am h-ten Gliede selbst angreifenden inneren Kräften die übrigen in der Weise hinzufügt, daß man jede derselben parallel mit sich nach demjenigen Gelenkmittelpunkte des h-ten Gliedes verlegt, welcher ihrem Angriffspunkte innerhalb des Körpersystems am nächsten liegt.

Für den besonderen Fall, daß ein Punkt O_1 auf der Längsachse des ersten Gliedes im Abstande l_1 von $G_{1,2}$ festliegt, so daß das erste Glied nur Drehungen um die zu den Gelenkachsen parallele Achse durch O_1 ausführen kann, erhält man unter Benutzung des auf S. 42 niedergelegten Wertes (64) für T nur noch drei Bewegungsgleichungen; es sind die folgenden:

$$(70)\quad \begin{aligned}
&m_0\{\lambda_1^2\cdot\varphi_1'' + l_1 c_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\cdot\varphi_2'' + l_1 c_3\cos(\varphi_1-\varphi_3)\cdot\varphi_3''\\
&\qquad + l_1 c_2\sin(\varphi_1-\varphi_2)\cdot\varphi_2'^2 + l_1 c_3\sin(\varphi_1-\varphi_3)\cdot\varphi_3'^2\} = Q_{\varphi_1},\\
&m_0\{\lambda_2^2\cdot\varphi_2'' + l_2 c_3\cos(\varphi_2-\varphi_3)\cdot\varphi_3'' + c_2 l_1\cos(\varphi_2-\varphi_1)\cdot\varphi_1''\\
&\qquad + l_2 c_3\sin(\varphi_2-\varphi_3)\cdot\varphi_3'^2 + c_2 l_1\sin(\varphi_2-\varphi_1)\cdot\varphi_1'^2\} = Q_{\varphi_2},\\
&m_0\{\lambda_3^2\cdot\varphi_3'' + c_3 l_1\cos(\varphi_3-\varphi_1)\cdot\varphi_1'' + c_3 l_2\cos(\varphi_3-\varphi_2)\cdot\varphi_2''\\
&\qquad + c_3 l_1\sin(\varphi_3-\varphi_1)\cdot\varphi_1'^2 + c_3 l_2\sin(\varphi_3-\varphi_2)\cdot\varphi_2'^2\} = Q_{\varphi_3}.
\end{aligned}$$

Jede der Größen Q_{φ_h} bedeutet jetzt die Summe der Drehungsmomente, welche sämtliche am System angreifenden äußeren und inneren Kräfte in bezug auf die Achse bezüglich durch O_1, $G_{1,2}$ oder $G_{2,3}$ ausüben, nachdem alle diejenigen, welche nicht direkt am h-ten Gliede angreifen, parallel mit sich nach dem Gelenkpunkte verlegt worden sind, der ihnen innerhalb des Gelenksystems im h-ten Gliede am nächsten liegt. Die Drehungsmomente zweier zusammengehörigen inneren Kräfte setzen sich dabei immer wieder zum Moment eines Kräftepaares zusammen.

Beim zweigliedrigen Gelenksystem fehlt in (69) wie in (70) die letzte Bewegungsgleichung. Im übrigen vereinfachen sich auch die beiden vorhergehenden Gleichungen, indem alle Größen, die sich auf das dritte Glied beziehen, d. h. also alle Größen mit dem Index 3 in Wegfall kommen. Man erhält daher für das ebene Gelenksystem von nur zwei durch ein Scharniergelenk miteinander verbundenen Gliedern im Falle vollkommen freier Beweglichkeit das System von Gleichungen:

$$(71)\quad \begin{aligned} m_0 x_0'' &= Q_{x_0},\\ m_0 y_0'' &= Q_{y_0},\\ m_0\{k_1^2\cdot\varphi_1''+d_1c_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\cdot\varphi_2''+d_1c_2\sin(\varphi_1-\varphi_2)\cdot\varphi_2'^2\} &= Q_{\varphi_1},\\ m_0\{k_2^2\cdot\varphi_2''+c_2d_1\cos(\varphi_2-\varphi_1)\cdot\varphi_1''+c_2d_1\sin(\varphi_2-\varphi_1)\cdot\varphi_1'^2\} &= Q_{\varphi_2}.\end{aligned}$$

Hierbei bedeutet natürlich m_0 nur die Summe der Massen m_1 und m_2 der beiden Glieder; im übrigen haben die Konstanten k_1, k_2, d_1 und c_2 und die Größen Q die den einfacheren Verhältnissen des zweigliedrigen Systems angepaßte, sonst aber ganz entsprechende Bedeutung wie beim dreigliedrigen Gelenksystem. Während die beiden ersten Gleichungen die Bewegung des Gesamtschwerpunktes regeln, beziehen sich die beiden letzten wieder auf die Bewegung des Systems um seinen Schwerpunkt.

Falls ein Punkt O_1 der Längsachse des ersten der beiden Glieder im Abstande l_1 vom Zwischengelenk festbleibt, so daß sich das erste Glied nur um eine durch O_1 gehende und zur Achse des die beiden Glieder verbindenden Scharniergelenks parallele feste Achse drehen kann, besitzt das Gelenksystem nur noch zwei Grade von Bewegungsfreiheit. Es wird dann die Bewegung schon durch zwei Gleichungen vollständig dargestellt, welche aus (70) durch Fortlassen aller Glieder mit dem Index 3 gewonnen werden können. Man erhält so die beiden Gleichungen:

$$(72)\quad \begin{aligned} m_0\{\lambda_1^2\cdot\varphi_1''+l_1c_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\cdot\varphi_2''+l_1c_2\sin(\varphi_1-\varphi_2)\cdot\varphi_2'^2\} &= Q_{\varphi_1},\\ m_0\{\lambda_2^2\cdot\varphi_2''+c_2l_1\cos(\varphi_2-\varphi_1)\cdot\varphi_1''+c_2l_1\sin(\varphi_2-\varphi_1)\cdot\varphi_1'^2\} &= Q_{\varphi_2}.\end{aligned}$$

Zu den Formeln (71) und (72) gelangt man natürlich auch direkt, wenn man die Lagrangeschen Gleichungen unter Zugrundelegung der auf Seite 42 angeführten Werte (66) und (67) für die lebendige Kraft des Systems bildet.

7. Interpretation der Bewegungsgleichungen.

Die unter (69) und (70) angegebenen Bewegungsgleichungen des dreigliedrigen Gelenksystems lassen nun eine sehr einfache und zugleich anschauliche Interpretation zu, welche nicht nur neues Licht auf die Bedeutung der reduzierten Systeme und Hauptpunkte wirft, sondern auch zeigt, daß die Einführung derselben nicht etwa willkürlich ist, daß sie im Gegenteil im Wesen der Sache begründet

liegt. Gleichzeitig läßt dieselbe erkennen, in welcher Weise sich die drei Glieder des Systems infolge des Gelenkzusammenhanges in ihren Bewegungen gegenseitig beeinflussen. Dieselbe gibt außerdem auch ein Mittel an die Hand, die Bewegungsgleichungen im gegebenen Falle unter Berücksichtigung der Beziehungen der Hauptpunkte zu dem Gesamtschwerpunkte und den Schwerpunkten der Teilsysteme ohne große Mühe und vor allen Dingen ohne Zurückgehen auf die allgemeinen Lagrangeschen Gleichungen in der einfachsten Form anzuschreiben.

Die Bedeutung der beiden ersten Gleichungen von (69) ist evident. Dieselben sind der analytische Ausdruck des bekannten Satzes, daß der Gesamtschwerpunkt eines Körpersystems sich so bewegt, als ob in ihm die Gesamtmasse konzentriert wäre und alle äußeren Kräfte ohne Änderung ihrer Größe und Richtung direkt in ihm angriffen.

Um die dritte Gleichung von (69) zu deuten, soll dieselbe zunächst in folgender Form geschrieben werden

$$(73) \qquad m_0 k_1^2 \cdot \varphi_1'' = Q_{\varphi_1} + [- m_0 c_2 \varphi_2'' \cdot d_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - m_0 c_3 \varphi_3'' \cdot d_1 \cos(\varphi_3 - \varphi_1) + m_0 c_2 \varphi_2'^2 \cdot d_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + m_0 c_3 \varphi_3'^2 \cdot d_1 \sin(\varphi_3 - \varphi_1)],$$

wobei die beiden letzten Glieder innerhalb der Klammer positives Vorzeichen bekommen haben, weil in den Winkeldifferenzen Minuend und Subtrahend vertauscht worden sind.

Auf der linken Seite steht jetzt allein das Produkt aus der Winkelbeschleunigung φ_1'' des ersten Gliedes und dem Trägheitsmoment $m_0 k_1^2$ des ersten reduzierten Systems in bezug auf die zu den Gelenkachsen parallele Achse durch seinen Schwerpunkt, d. h. also durch den Hauptpunkt des ersten Gliedes (vgl. die Formeln (4) auf Seite 13). Den Faktor φ_1'' kann man auch als die Winkelbeschleunigung des ersten reduzierten Systems bei der Drehung um seinen Schwerpunkt auffassen.

Auf der rechten Seite von (73) befindet sich zunächst die Größe Q_{φ_1}. Dieselbe bedeutet nach den früheren Auseinandersetzungen das auf die zu den Gelenkachsen parallele Achse durch den Hauptpunkt H_1 bezogene resultierende Drehungsmoment aller die Bewegung des ersten Gliedes beeinflussenden äußeren und inneren Kräfte, wobei den direkt am ersten Gliede angreifenden die sämtlichen an den beiden anderen Gliedern angreifenden Kräfte in der Weise hinzuzufügen sind, daß man jede unter Beibehaltung ihrer Größe und Richtung nach dem Gelenkpunkte $G_{1,2}$ verlegt zu denken hat.

Außerdem steht nun auf der rechten Seite noch als Summand ein aus vier Gliedern bestehender Ausdruck, dessen Bedeutung nach den Erörterungen im 3. Abschnitt auch unschwer zu erkennen ist. Zunächst sieht man aus Formel (44), daß die Größen $m_0 c_2 \varphi_2''$, $m_0 c_3 \varphi_3''$,

$\overline{m_0 c_2 \varphi_2'^2}$ und $\overline{m_0 c_3 \varphi_3'^2}$ die Komponenten der Effektivkraft $\overline{E}_{r_{2,3}}$ des gemeinsamen Schwerpunktes $S_{2,3}$ vom zweiten und dritten Gliede für die zu $G_{1,2}$ relative Bewegung darstellen. Die Komponente $\overline{m_0 c_2 \varphi_2''}$ steht nach den früheren Erörterungen auf der Längsachse des zweiten Gliedes, und die Komponente $\overline{m_0 c_3 \varphi_3''}$ auf der Längsachse des dritten Gliedes senkrecht. Dagegen ist die Komponente $\overline{m_0 c_2 \varphi_2'^2}$ der Längsachse des zweiten Gliedes und die Komponente $\overline{m_0 c_3 \varphi_3'^2}$ der Längsachse des dritten Gliedes parallel.

Es läßt sich nun leicht zeigen, daß der ganze Klammerausdruck auf der rechten Seite der Gleichung (73) nichts anderes darstellt als das Drehungsmoment, welches eine der Effektivkraft $\overline{E}_{r_{2,3}}$ entgegengesetzt gleiche Kraft auf die Achse durch den Hauptpunkt H_1 ausübt, wenn man auch sie parallel mit sich nach dem Gelenkpunkte $G_{1,2}$ verlegt denkt. Diese Kraft soll kurz durch $-\overline{E}_{r_{2,3}}$ bezeichnet sein. In Figur 13 finden sich die Komponenten dieser nach dem Angriffspunkte $G_{1,2}$ verlegten Kraft unter der Annahme eingezeichnet, daß sowohl die Winkelgeschwindigkeiten als auch die Winkelbeschleunigungen des zweiten und dritten Gliedes positiv sind. Das erstere ist nach den früheren in Figur 1 zum Ausdruck gebrachten Festsetzungen über die positive Richtung der Winkel φ_h der Fall, wenn die Längsachsen des zweiten und dritten Gliedes sich umgekehrt wie der Uhrzeiger drehen, und das letztere tritt ein, wenn diese Drehung beschleunigt ist. Legt man der Untersuchung eine Bewegungsphase zugrunde, bei welcher das dreigliedrige Gelenksystem momentan die in Figur 1 aufgezeichnete Stellung besitzt, so würde die Komponente $\overline{m_0 c_2 \varphi_2''}$ von $\overline{E}_{r_{2,3}}$ nach links oben gerichtet sein; der entgegengesetzt gleichen Komponente der Kraft $-\overline{E}_{r_{2,3}}$ kommt daher die Richtung nach rechts unten zu, so wie es in Figur 13 dargestellt ist. Ebenso bestätigt man, daß die Komponente $-\overline{m_0 c_3 \varphi_3''}$ nach der richtigen Seite gezeichnet ist. Die Komponente $\overline{m_0 c_2 \varphi_2'^2}$ der Effektivkraft würde

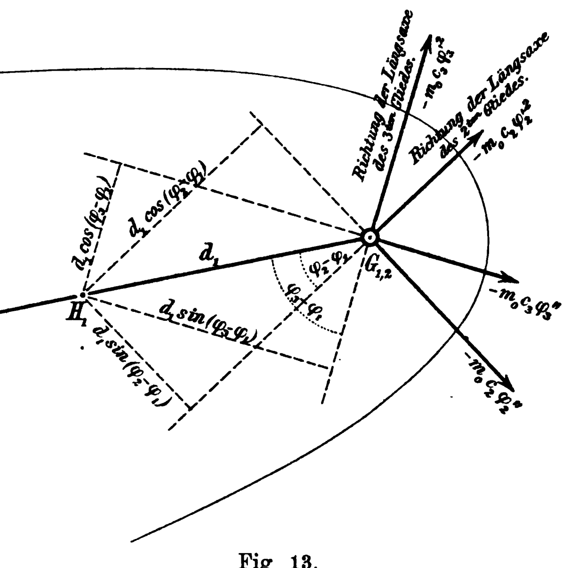


Fig. 13.

die negative Richtung der Längsachse des zweiten Gliedes besitzen, da sie ja der Normalbeschleunigung der Drehung des Punktes H_2 um $G_{1,2}$ entspricht. Die entgegengesetzt gleiche Komponente von $-\overline{E}_{r_{2,3}}$ muß daher in der positiven Richtung dieser Längsachse verlaufen. Ebenso muß die vierte Komponente $-\overline{m_0 c_3 \varphi_3'^2}$ die positive Richtung der Längsachse des dritten Gliedes besitzen. Fällt man nun auf die Richtungen dieser vier gemeinsam im Punkte $G_{1,2}$ angreifenden Komponenten bezüglich auf deren Rückwärtsverlängerungen vom Hauptpunkte H_1 des ersten Gliedes aus die Lote, so erkennt man aus Figur 1 und 13 leicht, daß die Längen dieser Lote, welche nichts anderes als die Hebelarme der vier Kraftkomponenten für den Bezugspunkt H_1 darstellen, bezüglich $d_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$, $d_1 \cos(\varphi_3 - \varphi_1)$, $d_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$ und $d_1 \sin(\varphi_3 - \varphi_1)$ sind. Denn einmal besitzt $G_{1,2}$ von H_1 die Entfernung d_1, und dann sind die Lote auf die ersten beiden Komponenten bezüglich den Längsachsen des zweiten und dritten Gliedes parallel, während die anderen beiden Lote auf diesen Längsachsen senkrecht stehen. Aus Figur 1 ist aber weiterhin zu sehen, daß der Winkel, den die positive Richtung der Längsachse des zweiten Gliedes mit der des ersten Gliedes bildet, gleich der Differenz $\varphi_2 - \varphi_1$, und der Winkel zwischen den positiven Richtungen der Längsachse des dritten und ersten Gliedes gleich der Differenz $\varphi_3 - \varphi_1$ ist.

Beachtet man nun noch, daß das Drehungsmoment einer Kraft positiv oder negativ zu rechnen ist, je nachdem sie eine Drehung um H_1 in dem der Uhrzeigerdrehung entgegengesetzten Sinne oder im Sinne derselben hervorzubringen sucht, so erkennt man ohne weiteres, daß die vier Komponenten der Kraft $-\overline{E}_{r_{2,3}}$, welche der Effektivkraft $\overline{E}_{r_{2,3}}$ entgegengesetzt gleich ist, in der Tat bezüglich die Werte

$$-m_0 c_2 \varphi_2'' \cdot d_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1); \quad -m_0 c_3 \varphi_3'' \cdot d_1 \cos(\varphi_3 - \varphi_1);$$

$+ m_0 c_2 \varphi_2'^2 \cdot d_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$ und $+ m_0 c_3 \varphi_3'^2 \cdot d_1 \sin(\varphi_3 - \varphi_1)$ besitzen.

Denkt man also den am zweiten und dritten Gliede angreifenden Kräften noch eine etwa im Schwerpunkte $S_{2,3}$ angreifende Kraft hinzugefügt, welche der Effektivkraft $\overline{E}_{r_{2,3}}$ dieses Schwerpunktes für die zu $G_{1,2}$ relative Bewegung entgegengesetzt gleich ist, so bedeutet die rechte Seite der in der Form (73) geschriebenen ersten Bewegungsgleichung das resultierende Drehungsmoment aller Kräfte für die Achse durch H_1, nachdem die sämtlichen am zweiten und dritten Gliede direkt angreifenden Kräfte nach dem Gelenkmittelpunkte $G_{1,2}$ verlegt worden sind, und außerdem diesen Kräften noch die Kraft $-\overline{E}_{r_{2,3}}$ hinzugefügt ist.

Dem Verlegen der an den anderen beiden Gliedern direkt angreifenden Kräfte nach dem Gelenkmittelpunkte $G_{1,2}$ des ersten Gliedes geht parallel das Verlegen der Massen dieser Glieder nach demselben Punkte $G_{1,2}$. Es ist daher zweckmäßig, den Begriff des ersten

reduzierten Systems in Hinsicht auf die am ganzen Gelenksystem angreifenden Kräfte dahin zu erweitern, daß man mit den einzelnen Massenpunkten des aus dem zweiten und dritten Gliede zusammengesetzten Teilsystems auch zugleich die an demselben direkt angreifenden äußeren und inneren Kräfte nach dem Gelenkmittelpunkte $G_{1,2}$ verlegt denkt und diese Kräfte im Verein mit den direkt am ersten Gliede angreifenden Kräften als die Kräfte des ersten reduzierten Systems auffaßt.

Unter dieser Annahme sagt die obige Gleichung aus, daß das erste reduzierte System sich in bezug auf die Drehung um seinen Schwerpunkt H_1 wie ein einziger vollkommen frei beweglicher starrer Körper verhält, wenn man die Kräfte desselben nur noch um die in $G_{1,2}$ angreifend zu denkende in entgegengesetzter Richtung genommene Effektivkraft der zu $G_{1,2}$ relativen Bewegung des Schwerpunktes $S_{2,3}$ vermehrt.

Um dies einzusehen, braucht man nur die obige Bewegungsgleichung in der Form zu schreiben

$$(74) \qquad \varphi_1'' = \frac{D_I}{m_0 k_1^2},$$

wobei D_I sich als Summe darstellt aus dem resultierenden Drehungsmoment Q_{φ_1} der Kräfte des ersten reduzierten Systems und dem Drehungsmoment der relativen Effektivkraft $-\overline{E}_{r_{2,3}}$, beide bezogen auf die zu den Gelenkachsen parallele Achse durch H_1.

Nach den gemachten Voraussetzungen, daß das dreigliedrige Gelenksystem nur ebene Bewegungen ausführt, daß die Trägheitsachsen senkrecht zu der die drei Schwerpunkte enthaltenden Bewegungsebene Hauptträgheitsachsen sind, und daß die am System angreifenden Kräfte alle in dieser Ebene liegen, stellt die zu den Gelenkachsen parallele oder, was damit übereinstimmt, zu der Ebene der drei Schwerpunkte senkrechte Achse durch den Schwerpunkt H_1 des ersten reduzierten Systems (Hauptpunkt des ersten Gliedes) ebenfalls eine Hauptträgheitsachse für das erste reduzierte System dar. Weiterhin liegen auch die an diesem System angreifenden Kräfte alle in einer zu dieser Achse senkrechten Ebene. Wenn aber auf einen frei beweglichen starren Körper in dieser Weise ebene Kräfte einwirken, so erteilen sie demselben eine Drehung um die zu der Ebene der Kräfte senkrechte Schwerpunktsachse, deren Winkelbeschleunigung dem resultierenden Drehungsmoment aller Kräfte in bezug auf die Schwerpunktsachse direkt und dem Trägheitsmoment des Körpers für die gleiche Achse indirekt proportional ist, also durch den Quotienten beider gemessen wird. Nichts anderes drückt die obige Gleichung (74) für das erste reduzierte System aus. Denn einmal ist die Winkelbeschleunigung des-

selben identisch mit der Winkelbeschleunigung des ihm zugrunde liegenden ersten Gliedes; andererseits bedeutet aber D_I das resultierende Drehungsmoment aller am ersten reduzierten System angreifenden Kräfte, die Kraft $-\overline{E}_{r_{2,3}}$ mit eingeschlossen, und $m_0 k_1^2$ das Trägheitsmoment dieses reduzierten Systems, beide Größen bezogen auf die zu der Kraftebene senkrechte Achse durch den Schwerpunkt H_1.

Man kann sich weiterhin davon überzeugen, daß das erste reduzierte System auch in bezug auf die außer seiner Drehung um die Schwerpunktsachse im allgemeinen noch vorhandene Translationsbewegung genau den Gesetzen der Bewegung eines vollkommen frei beweglichen starren Körpers unterliegt.

Diese Translationsbewegung wird am einfachsten durch die Bewegung des Schwerpunktes selbst dargestellt. Bei einem starren frei beweglichen Körper erfährt bekanntlich der Schwerpunkt unter der Einwirkung äußerer Kräfte eine lineare Beschleunigung, deren Größe durch den Quotienten aus der Resultante sämtlicher nach dem Schwerpunkte verlegt gedachten äußeren Kräfte und der Gesamtmasse des Körpers gemessen wird, und deren Richtung mit der Richtung dieser Resultante übereinstimmt.

Der Schwerpunkt H_1 des ersten reduzierten Systems besitzt infolge der Bewegung des ganzen Gelenksystems eine lineare Beschleunigung, welche nach den früheren Erörterungen, wie man leicht aus Figur 3 bestätigt, gleich der geometrischen Summe aus der linearen Beschleunigung γ_0 des Gesamtschwerpunktes S_0, der zu S_0 relativen Beschleunigung des Systemhauptpunktes $H_{1,2}$ und der zu dem letzteren relativen Beschleunigung des Hauptpunktes H_1 ist. Die Beschleunigung von $H_{1,2}$ relativ zu S_0 ist aber, wie man leicht erkennt, gleich $-\overline{c_3 \varphi_3''} - \overline{c_3 \varphi_3'^2}$ und die Beschleunigung von H_2 relativ zu $H_{1,2}$ gleich $-\overline{c_2 \varphi_2''} - \overline{c_2 \varphi_2'^2}$. Infolgedessen ist die lineare Beschleunigung γ_{h_1} des Punktes H_1

$$\overline{\gamma}_{h_1} = \overline{\gamma}_0 - [\overline{c_2 \varphi_2''} + \overline{c_3 \varphi_3''} + \overline{c_2 \varphi_2'^2} + \overline{c_3 \varphi_3'^2}], \tag{75}$$

wobei die Beschleunigung γ_0 des Gesamtschwerpunktes S_0 natürlich nur in dem speziellen Falle durch die Formel (28) bestimmt wird, daß, wie bei der Ableitung von (28) angenommen wurde, ein Punkt O_1 der Längsachse des ersten Gliedes festbleibt; sonst wird die Länge von γ_0 durch $\sqrt{x_0''^2 + y_0''^2}$ bestimmt.

Aus (75) folgt nun weiter

$$\overline{m_0 \gamma_{h_1}} = \overline{m_0 \gamma_0} + \left(-m_0 [\overline{c_2 \varphi_2''} + \overline{c_3 \varphi_3''} + \overline{c_2 \varphi_2'^2} + \overline{c_3 \varphi_3'^2}]\right). \tag{76}$$

Nun ist $m_0 \gamma_0$ gleich der Vektorsumme sämtlicher am dreigliedrigen System angreifenden äußeren Kräfte; dies sagen ja die beiden ersten Bewegungsgleichungen in (69) aus, in welchen Q_{x_0} und Q_{y_0} die Komponentensummen der äußeren Kräfte parallel den beiden

Koordinatenachsen bedeuten. Bezeichnet man die Vektorsumme der sämtlichen äußeren Kräfte des Gelenksystems kurz durch $\sum\overline{K}$, so kann man die ersten beiden Differentialgleichungen auch in die eine Vektorgleichung zusammenfassen

$$(77) \qquad \overline{m_0\gamma_0} = \sum\overline{K}.$$

Der außerdem auf der rechten Seite der Gleichung (76) stehende zusammengesetzte Summand ist nach (44) nichts anderes als die Kraft, welche der relativen Effektivkraft $\overline{E}_{r_{2,3}}$ des Schwerpunktes $S_{2,3}$ entgegengesetzt gleich ist. Man kann daher (76) auch in der Form schreiben

$$(78) \qquad \overline{m_0\gamma_{h_1}} = \sum\overline{K} + (-\overline{E}_{r_{2,3}}),$$

woraus unmittelbar folgt, daß sich in der Tat der Schwerpunkt H_1 des ersten reduzierten Systems so bewegt, als ob alle auf das System einwirkenden Kräfte, die negative Effektivkraft $-\overline{E}_{r_{2,3}}$ mit eingerechnet, direkt an ihm angriffen, und gleichzeitig die Masse m_0 des reduzierten Systems in ihm konzentriert wäre.

Daß die fünfte Bewegungsgleichung von (69) die ganz entsprechende Bedeutung für das dritte reduzierte System besitzt, wie die dritte Gleichung für das erste, ist nach den bisherigen Erörterungen leicht einzusehen. Man braucht zu dem Zwecke nur diese Bewegungsgleichung in der Form zu schreiben

$$(79) \qquad m_0 k_3^2 \cdot \varphi_3'' =$$
$$Q_{\varphi_3} + [-m_0 d_1 \varphi_1'' \cdot c_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_1) - m_0 d_2 \varphi_2'' \cdot c_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_2)$$
$$- m_0 d_1 \varphi_1'^2 \cdot c_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_1) - m_0 d_2 \varphi_2'^2 \cdot c_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)],$$

um zu erkennen, daß auf der linken Seite das Produkt aus der Winkelbeschleunigung des dritten reduzierten Systems mit dem Trägheitsmoment desselben in bezug auf die zu den Gelenkachsen parallele Achse durch seinen Schwerpunkt H_3 steht, und daß die Summe auf der rechten Seite in Rücksicht auf Formel (38) nichts anderes bedeutet als das auf die gleiche Achse bezogene resultierende Drehungsmoment aller auf das dritte reduzierte System einwirkenden Kräfte, nachdem man die nicht direkt am dritten Gliede angreifenden Kräfte parallel mit sich nach dem Gelenkmittelpunkte $G_{2,3}$ verlegt und diesen Kräften die in entgegengesetzter Richtung genommene Effektivkraft des Schwerpunktes $S_{1,2}$ für seine Bewegung relativ zu $G_{2,3}$ hinzugefügt hat. Daß die Komponenten dieser zweckmäßigerweise mit $-\overline{E}_{r_{1,2}}$ bezeichneten Effektivkraft tatsächlich die auf der rechten Seite von (79) stehenden Drehungsmomente hervorrufen, mag die umstehende Figur 14 erläutern. Bezeichnet man das resultierende Drehungsmoment aller auf das dritte reduzierte System einwirkenden Kräfte kurz mit D_{III}, so kann man (79) in der Form schreiben

(80) $$\varphi_3'' = \frac{D_{\mathrm{III}}}{m_0 k_3^2}.$$

Hieraus ist aber zunächst in bezug auf die Drehung um seinen Schwerpunkt zu ersehen, daß auch das dritte reduzierte System denselben Bewegungsgesetzen unterworfen ist, wie ein einziger frei beweglicher starrer Körper, falls man nur den Kräften des reduzierten Systems die im Gelenkmittelpunkte $G_{2,3}$ angreifend zu denkende Effektivkraft $\overline{E}_{r_{1,2}}$ hinzufügt. Dabei sind wiederum unter den Kräften des dritten reduzierten Systems außer den direkt am dritten Gliede angreifenden die nach dem Gelenkmittelpunkte $G_{2,3}$ parallel verlegten, ursprünglich am ersten und zweiten Gliede angreifenden äußeren und inneren Kräfte zu verstehen.

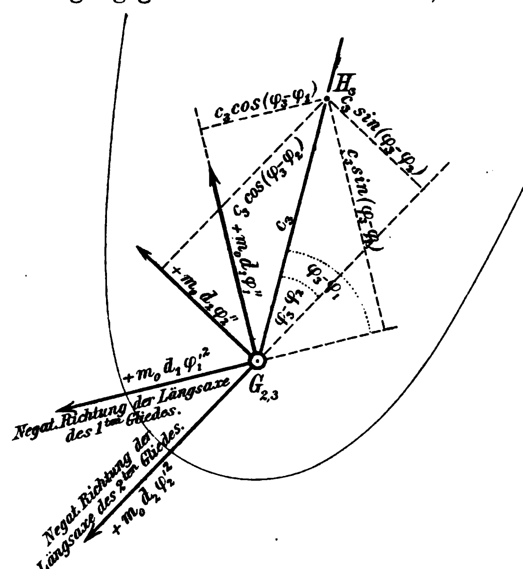


Fig. 14.

Daß schließlich auch der Schwerpunkt H_3 des dritten reduzierten Systems dieselbe Bewegung ausführt, als ob alle diese Kräfte direkt an ihm angriffen und die Masse m_0 des ganzen Systems in ihm konzentriert wäre, ist nach den beim ersten reduzierten System angestellten Überlegungen leicht zu beweisen. Die lineare Beschleunigung γ_{h_3} von H_3 ist nämlich (vgl. Fig. 3)

(81) $$\overline{\gamma}_{h_3} = \overline{\gamma}_0 + [\overline{d_1\varphi_1''} + \overline{d_2\varphi_2''} + \overline{d_1\varphi_1'^2} + \overline{d_2\varphi_2'^2}],$$

so daß man hat

(82) $$\overline{m_0\gamma_{h_3}} = \overline{m_0\gamma_0} + m_0\,[\overline{d_1\varphi_1''} + \overline{d_2\varphi_2''} + \overline{d_1\varphi_1'^2} + \overline{d_2\varphi_2'^2}],$$

oder in Rücksicht auf (77) und (38)

(83) $$\overline{m_0\gamma_{h_3}} = \sum\overline{K} + (-\overline{E}_{r_{1,2}}).$$

Es verhält sich also in der Tat das dritte reduzierte System auch betreffs der Bewegung seines Schwerpunktes genau wie ein frei beweglicher starrer Körper.

Die noch fehlende vierte Gleichung von (69) bezieht sich auf die Drehung des zweiten reduzierten Systems. Während sich die Ver-

hältnisse beim ersten und dritten reduzierten System im wesentlichen gleichen, indem bei beiden die Massen und Kräfte der übrigen Glieder nur in einem einzigen Punkte angebracht sind, nimmt das zwischen beiden liegende zweite reduzierte System insofern eine Ausnahmestellung ein, als bei ihm an zwei verschiedenen Stellen Massen, welche dem zweiten Gliede nicht angehören, in einem Punkte vereinigt anzunehmen sind. Es läßt sich nun leicht zeigen, daß auch dieses mittlere reduzierte System sich wie ein einziger frei beweglicher starrer Körper verhält.

Zunächst sei wiederum der Begriff des zweiten reduzierten Systems in bezug auf die Kräfte dahin erweitert, daß man zu den schon am zweiten Gliede angreifenden Kräften noch in $G_{1,2}$ die am ersten Gliede angreifenden Kräfte und in $G_{2,3}$ die am dritten Gliede angreifenden Kräfte hinzunimmt und alle diese Kräfte als die Kräfte des zweiten reduzierten Systems auffaßt.

Die vierte Gleichung von (69) läßt sich nun in folgender Form schreiben:

$$(84) \qquad m_0 k_2^2 \cdot \varphi_2'' =$$
$$Q_{\varphi_2} + [- m_0 d_1 \varphi_1'' \cdot c_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - m_0 d_1 \varphi_1'^2 \cdot c_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)]$$
$$+ [- m_0 c_3 \varphi_3'' \cdot d_2 \cos(\varphi_3 - \varphi_2) + m_0 c_3 \varphi_3'^2 \cdot d_2 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)].$$

Links steht wieder das Produkt aus der Winkelbeschleunigung des zweiten reduzierten Systems in das Trägheitsmoment desselben für die zu den Gelenkachsen parallele Achse durch seinen Schwerpunkt H_2. Auf der rechten Seite bedeutet Q_{φ_2} das auf die Achse durch H_2 bezogene resultierende Drehungsmoment der Kräfte des reduzierten Systems. Die noch übrig bleibenden Summanden auf der rechten Seite stellen dagegen die Drehungsmomente zweier in $G_{1,2}$ und $G_{2,3}$ angreifenden Kräfte dar, von denen die erste der Effektivkraft $\overline{E}_{r_1}$ des Schwerpunktes S_1 für die zu $G_{1,2}$ relative Bewegung desselben, und die zweite der Effektivkraft $\overline{E}_{r_3}$ des Schwerpunktes S_3 für die zu $G_{2,3}$ relative Bewegung entgegengesetzt gleich ist. Dies erkennt man daran, daß nach (50) $\overline{m_0 d_1 \varphi_1''}$ und $\overline{m_0 d_1 \varphi_1'^2}$ die Komponenten von $\overline{E}_{r_1}$ und nach (56) $\overline{m_0 c_3 \varphi_3''}$ und $\overline{m_0 c_3 \varphi_3'^2}$ die Komponenten von $\overline{E}_{r_3}$ sind. Die Lote auf die Komponenten $\overline{m_0 d_1 \varphi_1''}$ und $\overline{m_0 c_3 \varphi_3''}$ laufen bezüglich der Längsachse des ersten und dritten Gliedes parallel, bilden also mit der Längsachse des zweiten Gliedes die Winkel $(\varphi_2 - \varphi_1)$ und $(\varphi_3 - \varphi_2)$, wie man leicht aus umstehender Figur 15 in Vergleich mit Figur 1 erkennt, in welcher die Komponenten der beiden den Effektivkräften $\overline{E}_{r_1}$ und $\overline{E}_{r_3}$ entgegengesetzt gleichen Kräfte $-\overline{E}_{r_1}$ und $-\overline{E}_{r_3}$ unter Annahme positiver Winkelbeschleunigungen φ_1'' und φ_3'' eingezeichnet sind. Dagegen stehen die Lote von H_2 auf die Richtungen der beiden Komponenten $\overline{m_0 d_1 \varphi_1'^2}$ und

$\overline{m_0 c_3 \varphi_3'^2}$ auf diesen Längsachsen senkrecht. Da H_2 von $G_{1,2}$ die Entfernung c_2, und $G_{2,3}$ von H_2 die Entfernung d_2 besitzt, so sind die Längen der vier Lote bezüglich $c_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$; $d_2 \cos(\varphi_3 - \varphi_2)$; $c_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$ und $d_2 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)$. Berücksichtigt man noch den Drehungssinn, in welchem eine jede der vier Komponenten das zweite

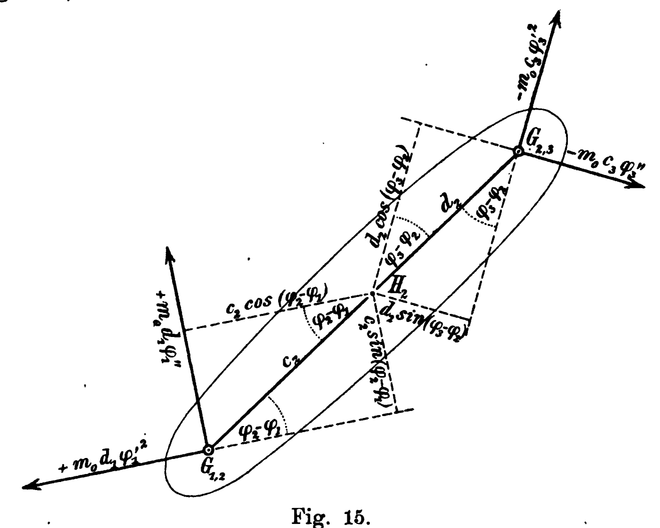


Fig. 15.

reduzierte System um die Achse durch H_2 zu drehen sucht, so erkennt man aus Figur 15, daß dieselben in der Tat mit Drehungsmomenten auf das System einwirken, welche die auf der rechten Seite von (84) stehenden Werte besitzen.

Bezeichnet man das resultierende Drehungsmoment aller am zweiten reduzierten System angreifenden Kräfte, die beiden negativen Effektivkräfte $-\overline{E}_{r_1}$ und $-\overline{E}_{r_3}$ mit eingerechnet, durch D_{II}, so kann man die vierte Bewegungsgleichung von (69) in der kurzen Form schreiben

$$(85) \qquad \varphi_2'' = \frac{D_{II}}{m_0 k_2^2}.$$

Es dreht sich also auch das zweite reduzierte System genau so um seine zu den Gelenkachsen parallele Schwerpunktsachse, wie es ein frei beweglicher starrer Körper von gleicher Masse und gleichen Trägheitsmomenten tun würde, wenn man die Kräfte des Systems um die beiden negativen relativen Effektivkräfte $-\overline{E}_{r_1}$ und $-\overline{E}_{r_3}$ vermehrt denkt.

Daß dasselbe auch für die Bewegung seines Schwerpunktes H_2 gilt, kann man leicht zeigen. Die Beschleunigung γ_{h_2} des Hauptpunktes H_2 hängt, wie ein Blick auf Figur 3 lehrt, mit der Beschleunigung γ_0 des Gesamtschwerpunktes S_0 in der Weise zusammen, daß

$$(86)\qquad \overline{\gamma_{h_2}} = \overline{\gamma_0} + [\overline{d_1\varphi_1''} + \overline{d_1\varphi_1'^2} - \overline{c_3\varphi_3''} - \overline{c_3\varphi_3'^2}].$$

Demnach hat man

$$(87)\qquad m_0\overline{\gamma_{h_2}} = m_0\overline{\gamma_0} + m_0[\overline{d_1\varphi_1''} + \overline{d_1\varphi_1'^2}] + m_0[-\overline{c_3\varphi_3''} - \overline{c_3\varphi_3'^2}],$$

woraus in Rücksicht auf (77), (50) und (56) folgt

$$(88)\qquad \overline{m_0\gamma_{h_2}} = \sum \overline{K} + (-\overline{E}_{r_1}) + (-\overline{E}_{r_3}),$$

was zu beweisen war.

Es gilt also ganz allgemein das Resultat, daß im Falle vollkommen freier Beweglichkeit des ebenen Gelenksystems jedes der drei reduzierten Systeme sich so bewegt, als ob außer den direkt an seinem Kerngliede angreifenden Kräften alle an den übrigen Gliedern angreifenden Kräfte parallel nach dem nächsten Gelenkmittelpunkte des dem System zugrunde liegenden Kerngliedes verlegt wären, wobei den Kräften die in entgegengesetzter Richtung genommenen Effektivkräfte der zu diesem Gelenkmittelpunkte relativen Bewegung zuzurechnen sind. Die dritte bis fünfte Bewegungsgleichung von (69) sind nichts anderes als der analytische Ausdruck dieser Tatsache in bezug auf die Drehungen der drei reduzierten Systeme um ihre zu den Gelenkachsen parallelen Schwerpunktsachsen.

Dieser Satz gilt, wie sich später herausstellen wird (vgl. den 8. Abschnitt), auch noch, wenn das Gelenksystem nicht mehr vollkommen frei beweglich ist, falls man nur die Beschränkungen für die Beweglichkeit durch neu hinzutretende Kräfte erzwungen denkt. So kann man beispielsweise den zur Untersuchung herangezogenen Fall bedingter Beweglichkeit, in welchem ein Punkt O_1 der Längsachse des ersten Gliedes fest bleiben soll, so daß das ganze Gelenksystem sich nur um eine zu den Gelenkachsen parallele Achse durch O_1 drehen kann, dadurch auf den Fall vollkommen freier Beweglichkeit des Gelenksystems zurückführen, daß man in O_1 eine Kraft hinzufügt, welche die Reaktion gegen den auf die feste Achse O_1 ausgeübten Druck darstellt, und daher diesem Druck entgegengesetzt gleich ist. Da diese Methode im nächsten Abschnitt ausführlich auseinandergesetzt und auf das Gelenksystem angewendet werden wird, so soll hier nicht weiter darauf eingegangen sein. Dagegen soll an dieser Stelle mitgeteilt werden, welche Deutung die Gleichungen (70), die dem angedeuteten Falle bedingter Beweglichkeit entsprechen, außerdem noch erfahren können.

Formt man die erste Gleichung von (70) so um, daß auf der linken Seite nur noch das Produkt aus der Winkelbeschleunigung φ_1'' und dem Trägheitsmoment $m_0\lambda_1^2$ des ersten reduzierten Systems in bezug auf die Achse durch O_1 allein bleibt, so erhält man auf der rechten Seite einen Ausdruck, welcher sich von der rechten Seite der

Gleichung (73) nur dadurch unterscheidet, daß überall die Hauptstrecke d_1 durch die Entfernung l_1 des festen Punktes O_1 vom Gelenkmittelpunkte $G_{1,2}$ ersetzt ist. Nach den früheren Auseinandersetzungen bei der Deutung von (73) stellt daher der auf der rechten Seite zu Q_{φ_1} hinzutretende Ausdruck das Drehungsmoment dar, welches die in $G_{1,2}$ angreifend zu denkende Kraft $-\overline{E}_{r_{2,3}}$ auf die Achse durch den festen Punkt O_1 ausübt. Da im vorliegenden Falle auch Q_{φ_1} das resultierende Drehungsmoment aller zum ersten reduzierten System gehörenden Kräfte in bezug auf die Achse durch O_1 darstellt, und, wie schon oben angeführt wurde, auch das auf der linken Seite der Gleichung stehende Trägheitsmoment derselben Achse angehört, so sagt die erste Gleichung von (70) aus, daß das erste reduzierte System sich um die feste Achse durch O_1 dreht wie ein starrer Körper von derselben Zusammensetzung, an welchem außer den zum System gehörenden Kräften noch im Punkte $G_{1,2}$ die negative Effektivkraft $-\overline{E}_{r_{2,3}}$ der zu $G_{1,2}$ relativen Bewegung des Teilschwerpunktes angreift.

Um die zweite Gleichung von (70) zu deuten, bringe man wieder alle Glieder der linken Seite mit Ausnahme des Gliedes $m_0 \lambda_2^2 \cdot \varphi_2''$ auf die rechte Seite; dann erhält man rechts einen Ausdruck, der sich von der rechten Seite von (84) nur dadurch unterscheidet, daß an Stelle von d_1 die Länge l_1 des ersten Gliedes, und an Stelle von d_2 die Länge l_2 des zweiten Gliedes getreten ist. Faßt man auch hier wie in (87) die vier zu Q_{φ_2} hinzutretenden Glieder zu je zwei in eine eckige Klammer zusammen, so ist der letzte Klammerausdruck, wie man nach dem früheren ohne weiteres erkennen wird, als das Drehungsmoment der in $G_{2,3}$ angreifend zu denkenden Kraft $-\overline{E}_{r_3}$ in bezug auf die Gelenkachse $G_{1,2}$ aufzufassen. Die Bedeutung des in der Mitte stehenden Klammerausdruckes ist dagegen eine andere als bei (84). Die in den beiden Gliedern innerhalb der Klammer auftretenden Faktoren $m_0 l_1 \varphi_1''$ und $m_0 l_1 \varphi_1'^2$ sind jetzt nicht, wie früher, die in entgegengesetzter Richtung genommenen Komponenten der zu $G_{1,2}$ relativen Effektivkraft $\overline{E}_{r_1}$ des Schwerpunktes S_1, sondern sie gehören zu einer Kraft $-\overline{m_0 g_{1,2}}$, unter $\overline{g}_{1,2}$ die Beschleunigung des Gelenkmittelpunktes $G_{1,2}$ verstanden; das negative Zeichen soll dabei andeuten, daß diese Kraft zu der Beschleunigung von $G_{1,2}$ entgegengesetzt gerichtet ist. Bei der für die Bewegung des ersten Gliedes geltenden Bedingung kann nämlich dieser Gelenkmittelpunkt nur einen Kreis um O_1 mit dem Radius l_1 beschreiben, während die Längsachse des ersten Gliedes sich mit der Winkelgeschwindigkeit φ_1' und der Winkelbeschleunigung φ_1'' um die Achse durch O_1 dreht. Die Beschleunigung von $G_{1,2}$ setzt sich daher aus der Tangentialbeschleunigung $\overline{l_1 \varphi_1''}$ und der Normalbeschleunigung $\overline{l_1 \varphi_1'^2}$ zusammen. Es ist nun leicht einzusehen, daß der ganze Klammerausdruck das Drehungsmoment der Kraft

$-\overline{m_0 g_{1,2}}$ in bezug auf die Gelenkachse $G_{1,2}$ angibt, falls man diese Kraft im Hauptpunkte des zweiten Gliedes angreifend denkt.

Da auch das resultierende Drehungsmoment Q_{φ_2} der Kräfte des zweiten reduzierten Systems und das auf der linken Seite der Gleichung stehende Trägheitsmoment $m_0 \lambda_2^2$ desselben auf die Gelenkachse $G_{1,2}$ bezogen sind, so hat man also das Resultat, daß im vorliegenden Falle bedingter Beweglichkeit des ganzen Gelenksystems das zweite reduzierte System sich so um die ihrerseits selbst in Bewegung befindliche Gelenkachse $G_{1,2}$ dreht, als ob außer den zu ihm gehörenden Kräften noch in $G_{2,3}$ die Kraft $-\overline{E}_{r_2}$ und in seinem Schwerpunkte H_2 die Kraft $-\overline{m_0 g_{1,2}}$ angriffe, wobei $\overline{g}_{1,2}$ die Beschleunigung des Gelenkmittelpunktes $G_{1,2}$ bedeutet. Die letztere in H_2 angreifend zu denkende Kraft $-\overline{m_0 g_{1,2}}$ gibt den Einfluß an, welchen die Eigenbewegung der Gelenkachse $G_{1,2}$ auf die um sie stattfindende Drehung des zweiten reduzierten Systems ausübt; wenn $G_{1,2}$ in Ruhe bleibt, so verschwindet auch diese Kraft.

Auch die dritte Gleichung von (70) läßt sich in ähnlicher Weise deuten. Bringt man in derselben wieder alle Glieder bis auf das Glied $m_0 \lambda_3^2 \cdot \varphi_3''$ auf die rechte Seite, so erhält man eine Form, welche sich von (79) auf der rechten Seite nur dadurch unterscheidet, daß d_1 und d_2 durch l_1 und l_2 ersetzt sind. Es ist nun unschwer zu erkennen, daß der zu Q_{φ_3} hinzutretende Klammerausdruck als das auf die Gelenkachse $G_{2,3}$ bezogene Drehungsmoment einer im Schwerpunkte H_3 des dritten reduzierten Systems angreifend zu denkenden Kraft $-\overline{m_0 g_{2,3}}$ aufgefaßt werden kann, wobei unter $\overline{g}_{2,3}$ die Beschleunigung des Gelenkmittelpunktes $G_{2,3}$ zu verstehen ist und durch das negative Vorzeichen angedeutet werden soll, daß die Kraft zu der Beschleunigung von $G_{2,3}$ entgegengesetzt gerichtet ist. Um dies einzusehen, braucht man nur zu berücksichtigen, daß die Bewegung des Punktes $G_{2,3}$ aus der Drehung des Punktes $G_{1,2}$ um O_1 auf einem Kreis mit dem Radius l_1 und der zu $G_{1,2}$ relativen Drehung von $G_{2,3}$ auf einem Kreis mit dem Radius l_2 zusammengesetzt ist. Die Beschleunigung $\overline{g}_{2,3}$ des Punktes $G_{2,3}$ besitzt daher die vier Komponenten $\overline{l_1 \varphi_1''}$, $\overline{l_1 \varphi_1'^2}$, $\overline{l_2 \varphi_2''}$ und $\overline{l_2 \varphi_2'^2}$.

Da nun auch das resultierende Drehungsmoment Q_{φ_3} der Kräfte des dritten reduzierten Systems, ebenso wie das Trägheitsmoment desselben, sich auf die Gelenkachse $G_{2,3}$ bezieht, so erhält man durch diese Interpretation der dritten Gleichung von (70) das Resultat, daß bei festem Punkt O_1 der Längsachse des ersten Gliedes das dritte reduzierte System sich um die bewegliche Gelenkachse $G_{2,3}$ in derselben Weise dreht, als wenn außer den zu ihm gehörenden Kräften in seinem Schwerpunkte H_3 noch eine Kraft $-\overline{m_0 g_{2,3}}$ angriffe, unter $\overline{g}_{2,3}$ die Beschleunigung der Gelenkachse $G_{2,3}$ verstanden. Diese in H_3

angreifende Kraft kommt in Wegfall, wenn $G_{2,3}$ bei der Bewegung des ganzen Gelenksystems in Ruhe bleibt. —

Aus den bisherigen Betrachtungen ist zu ersehen, daß die Bewegung eines jeden der drei Glieder infolge des Gelenkzusammenhanges mit den anderen nicht allein dadurch beeinflußt wird, daß die trägen Massen der anderen Glieder im allgemeinen mit in Bewegung gesetzt werden müssen, sondern auch dadurch, daß diese anderen Glieder in der Regel sich außerdem noch relativ zu dem Mittelpunkte des Gelenkes bewegen, durch welches sie mit dem betreffenden Gliede entweder unmittelbar oder durch Vermittelung eines anderen Gliedes in Verbindung stehen. Dem Einfluß, welchen die trägen Massen der anhängenden Glieder auf die Bewegung eines bestimmten Gliedes ausüben, wird dadurch Rechnung getragen, daß man dieselben in den nächsten Gelenkmittelpunkten konzentriert denkt und dadurch von dem betreffenden Gliede auf das reduzierte System übergeht. Der Einfluß, welchen die relativen Bewegungen der anhängenden Glieder ausüben, wird dagegen, wie sich herausgestellt hat, durch die Kräfte $-\overline{E}_r$ dargestellt, welche den Effektivkräften der Schwerpunkte der übrigen Glieder entgegengesetzt gleich sind. Besitzen diese Effektivkräfte den Wert Null, so kommen für die Bewegung der reduzierten Systeme nur noch die tatsächlich vorhandenen Kräfte, welche oben als die Kräfte der reduzierten Systeme bezeichnet worden sind, in Frage.

Ein Verschwinden der Effektivkräfte tritt unter anderem ein, wenn die an einem Gliede hängenden anderen Glieder bei der Bewegung desselben ausschließlich Translationsbewegungen ausführen. Dies ist zum Beispiel bei der Bewegung des aus Kreuzkopf, Kolbenstange und Kolben bestehenden Gleitstückes eines Schubkurbelgetriebes der Fall (vgl. den 21. Abschnitt), deshalb wirkt dieselbe auf die Bewegung der Schubstange in der Weise ein, als ob die Masse des Gleitstückes und die an dem letzteren angreifenden Kräfte direkt in der Achse des Kreuzkopfs angebracht wären.

Ein anderes Beispiel mit verschwindenden Effektivkräften stellt das auch schon in der Einleitung erwähnte Erheben auf die Zehen dar, wenn der ganze menschliche Körper mit Ausnahme des allein auf dem Boden aufstehenden Fußes dabei eine Translationsbewegung nach Maßgabe der Bewegung der Fußgelenkachse ausführt. Deshalb wirkt dieser Abschnitt des Körpers so auf den Fuß ein, als ob die ganze Masse desselben in der Achse des oberen Sprunggelenkes konzentriert wäre und alle an ihm angreifenden Kräfte ihren Angriffspunkt im Mittelpunkte des Fußgelenks hätten.

Ein Verschwinden der Effektivkraft tritt aber auch schon dann ein, wenn der Schwerpunkt, auf welchen sich die Effektivkraft bezieht, mit dem Gelenkmittelpunkte, zu welchem die Bewegung dieses Schwerpunktes relativ zu rechnen ist, dauernd zusammenfällt.

Ein Beispiel hierfür liefert das ebenfalls schon in der Einleitung erwähnte, aus Stange und beweglicher Linse bestehende physische Pendel. Es soll gerade auf dieses Beispiel später etwas ausführlicher eingegangen werden (vgl. Abschnitt 22), weil die Bewegungen eines derartigen zweigliedrigen Gelenksystems schon in erschöpfender Weise für verschiedene Fälle untersucht und abgeleitet worden sind.[1]) Das Beispiel ist aus diesem Grunde geeignet, zu zeigen, wie die im voraufgehenden auseinandergesetzte Methode der reduzierten Systeme, deren Bedeutung für die Vereinfachung der kinetischen Untersuchung von Gelenksystemen allerdings erst ganz besonders evident bei den vielgliedrigen Systemen zutage tritt (und zwar um so mehr, je größer die Anzahl der Glieder eines Systems ist), sich doch auch schon für ein verhältnismäßig so einfaches Gelenksystem von nur zwei Gliedern als recht fruchtbar erweist, indem sie gestattet, die Differentialgleichungen der Bewegung für die verschiedenen Fälle gleich fertig hinzuschreiben.

8. Elementare Ableitung der Bewegungsgleichungen.

Da das vorliegende Buch in erster Linie den Bedürfnissen der Mediziner Rechnung zu tragen hat, so soll noch ein Weg angegeben werden, auf dem man in ganz elementarer Weise und ohne alle Rechnung zu den Bewegungsgleichungen des Gelenksystems geführt wird. Es ist nicht jedermans Sache, nur einigermaßen kompliziert aussehende Formeln richtig zu deuten; daher kann es für das Verständnis der gesetzmäßigen Beziehungen zwischen den verschiedenen in Betracht kommenden Größen nur vorteilhaft sein, wenn sich zeigen läßt, daß die Formeln nichts anderes sind als der rechnerische Ausdruck für eine an und für sich einfache und aus bekannten mechanischen Gesetzen folgende Tatsache. Diese Erkenntnis dürfte gleichzeitig geeignet sein, das Interesse für derartige Fragen, wie sie in diesem Buch hauptsächlich behandelt werden, neu zu beleben; denn es ist eine beklagenswerte Erscheinung, daß das Interesse für physiologische Probleme, welche sich exakt nur mit Hilfe der Mathematik lösen lassen, vielfach im umgekehrten Verhältnis zu der Schwierigkeit der mathematischen Hilfsmittel steht.

Für eine elementare Ableitung der Bewegungsgleichungen ist, wie sich herausstellen wird, nur die Kenntnis des Prinzips der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung und einiger einfacher, aber allgemeingültiger Sätze der Mechanik erforderlich.

Vor allen Dingen stützt sich dieselbe auf den schon früher angeführten Schwerpunktssatz, nach welchem sich der Schwerpunkt

1) Vgl. Carl Neumann, Beiträge zur analytischen Mechanik. Berichte über die Verhandlungen der Königl. Sächs. Ges. d. Wissensch., math.-phys. Klasse Band 51. Mathematischer Teil 1899 Seite 371.

eines beliebigen Körpersystems stets so bewegt, als ob die Masse des ganzen Systems in ihm konzentriert wäre, und alle auf das System einwirkenden äußeren Kräfte mit ihrer Richtung und Stärke direkt in ihm angriffen. Dieser Satz gilt nicht nur, wenn das Körpersystem vollkommen frei beweglich ist, sondern auch wenn die Bewegungen der einzelnen Körper irgend welchen Bedingungen unterworfen sind. Man hat im letzteren Falle nur die Kräfte, durch welche diese Bewegungsbedingungen gewissermaßen erzwungen werden, den auf das Körpersystem einwirkenden äußeren Kräften mit zuzurechnen. Wenn beispielsweise sich ein Körper nur um eine im Raume festgestellte Achse drehen kann, so wird bei den Bewegungen desselben im allgemeinen auf die Achse ein Druck ausgeübt werden, welcher sie aus ihrer Lage herausbringen würde, wenn dies durch die Befestigung der Achse an irgend einem anderen Körper nicht unmöglich gemacht wäre. Der Druck auf die Achse ruft nun aber einen Gegendruck auf den sich um die Achse bewegenden Körper hervor, welcher nach dem Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung dem ersteren gleich ist und sich nur durch die entgegengesetzte Richtung von demselben unterscheidet. Es kommt infolgedessen zu den am Körper angreifenden äußeren Kräften noch diese Reaktionskraft an der Achse hinzu. Unter dem Einfluß aller dieser Kräfte führt aber, wie sich in jedem Falle nachweisen läßt, der Schwerpunkt des Körpers gerade die durch den obigen Schwerpunktssatz geregelte Bewegung aus.

Außer dem Schwerpunktssatze kommt für die elementare Ableitung der Bewegungsgleichungen des Gelenksystems nur noch der Satz in Frage, nach welchem ein frei beweglicher starrer Körper sich gerade so um seinen Schwerpunkt dreht, als ob der letztere nicht beweglich, sondern fest wäre. Für diese Drehung um den Schwerpunkt kommen demnach nur die Drehungsmomente der äußeren Kräfte in bezug auf Achsen durch den Schwerpunkt in Betracht. Handelt es sich um ebene Bewegung, und ist die zur Bewegungsebene senkrechte Schwerpunktsachse eine Hauptträgheitsachse des Körpers, so ist die Winkelbeschleunigung der Drehung um diese Achse direkt proportional dem resultierenden Drehungsmoment aller äußeren Kräfte und umgekehrt proportional dem Trägheitsmoment des Körpers, beide bezogen auf die zur Bewegungsebene senkrechte Achse durch den Schwerpunkt. Die Winkelbeschleunigung wird daher durch den Quotient dieser beiden Größen gemessen.

Dieser Satz stellt in gewisser Beziehung ein Pendant zu dem Schwerpunktssatze dar; denn nach dem letzteren ist die lineare Beschleunigung des Schwerpunktes direkt proportional der Resultante aller nach dem Schwerpunkte verlegt gedachten äußeren Kräfte und umgekehrt proportional der Gesamtmasse des Körpers. Es wird daher auch die lineare Beschleunigung des Schwerpunktes durch den

Quotient der Resultante der äußeren Kräfte und der Gesamtmasse des Körpers gemessen.

Betrachtet man nun beim dreigliedrigen ebenen Gelenksystem irgend eins der drei Glieder für sich allein, so konstatiert man zunächst, daß die Bewegung desselben nicht bloß von den an ihm angreifenden Kräften abhängt, wie es der Fall sein würde, wenn das Glied vollständig von den übrigen losgelöst wäre, sondern daß sie infolge des Zusammenhangs der Glieder untereinander durch die Bewegung der anderen Glieder und die auf diese direkt einwirkenden Kräfte modifiziert wird. Es ist nun unmittelbar einleuchtend, daß die Nachbarglieder des in Betracht gezogenen Gliedes allein da auf dasselbe einwirken können, wo sie mit ihm in Berührung stehen, d. h. also in den Gelenken. Die entfernteren Glieder können nur durch Vermittlung eines Zwischengliedes oder, bei mehrgliedrigen Gelenksystemen, einer zusammenhängenden Reihe von Zwischengliedern auf das eine Glied einwirken, und dann wieder nur in einem Punkte einer Gelenkachse, der unter den für das ebene dreigliedrige Gelenksystem gemachten Voraussetzungen kurz als der Gelenkmittelpunkt aufgefaßt werden kann. Es werden also bei unserem dreigliedrigen Gelenksystem (Fig. 1) auf das erste Glied die Bewegungen des zweiten und dritten Gliedes und die an denselben angreifenden Kräfte nur in $G_{1,2}$ einwirken. Ferner werden auf das zweite Glied die Bewegung des ersten Gliedes in $G_{1,2}$ und die des dritten Gliedes in $G_{2,3}$ einwirken, usf.

Diese Einwirkung der einzelnen Glieder aufeinander, welche nur eine Folge des Gelenkzusammenhanges ist, läßt sich daher in jedem Falle durch Kräfte darstellen, die in einem Gelenkmittelpunkte des in Betracht gezogenen Gliedes angreifen. Es treten demnach an jedem der drei Glieder zu den direkt an ihm angreifenden Kräften im allgemeinen noch in jedem Gelenkmittelpunkte desselben Kräfte hinzu, welche der Bewegung der anhängenden Glieder und den an den letzteren angreifenden Kräften ihren Ursprung verdanken. Unter dem Einfluß aller dieser Kräfte muß sich das betreffende Glied gerade so verhalten, als ob es von den übrigen Gliedern losgelöst sich frei im Raume bewegen könnte. Wenn es gelingt, die in den Gelenkmittelpunkten angreifend zu denkenden Kräfte der Größe und Richtung nach zu bestimmen, so ist damit das Problem der Bewegung des Gelenksystems auf die Bewegung dreier einzelner Körper, nämlich der drei dann isoliert anzunehmenden Glieder zurückgeführt.

Da das erste Glied nur durch ein Gelenk mit den anderen in Verbindung steht, so kommt zu den direkt an ihm angreifenden Kräften nur noch eine Kraft in $G_{1,2}$ hinzu. Dieselbe ist als Druck (oder Zug) aufzufassen, welcher von Seiten des zweiten Gliedes auf das erste tatsächlich ausgeübt wird und nach dem Gesetz der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung mit einem entgegengesetzt

gleichen Gegendruck (oder Gegenzug) auf das zweite Glied erwidert wird. Diese beiden einander entgegenwirkenden Druckkräfte, welche mit $\overline{\Gamma}_{1,2}$ und $-\overline{\Gamma}_{1,2}$ bezeichnet sein sollen, machen den resultierenden Gelenkdruck in $G_{1,2}$ aus. Denkt man das Gelenk $G_{1,2}$ durchtrennt, so daß das Gelenksystem in zwei Teile, nämlich das erste Glied und das aus dem zweiten und dritten System zusammengesetzte Teilsystem zerfällt, so würde sich doch das ganze Gelenksystem genau so bewegen, als ob die Gelenkverbindung nicht gelöst wäre, wenn man auf jeden der beiden Teile in $G_{1,2}$ die ihm zukommende Druckkraft einwirken ließe. Durch diese ohne weiteres einleuchtende Tatsache gewinnt man aber sofort das Mittel, die beiden entgegengesetzt gleichen Druckkräfte zu bestimmen.

Die auf das Teilsystem, welches aus dem zweiten und dritten Gliede zusammengesetzt ist, in $G_{1,2}$ einwirkende Druckkraft $-\overline{\Gamma}_{1,2}$ stellt für dieses System eine äußere Kraft dar. Nach dem Schwerpunktssatze muß sie daher im Verein mit den übrigen an dem Teilsystem angreifenden äußeren Kräften dem Schwerpunkte $S_{2,3}$ desselben seine tatsächlich vorhandene Beschleunigung $\gamma_{2,3}$ erteilen, falls man alle diese Kräfte an demselben angreifend und außerdem die aus m_2 und m_3 zusammengesetzte Masse $m_{2,3}$ des Systems in ihm konzentriert denkt. Es ist wohl zu beachten, daß es sich hierbei um die absolute Beschleunigung von $S_{2,3}$ und nicht, wie bei den früheren Betrachtungen, um die zu $G_{1,2}$ relative Beschleunigung handelt, welche dort mit $\gamma_{r_{1,2}}$ bezeichnet wurde. Wenn aber die auf das Teilsystem einwirkenden Kräfte dem Schwerpunkte $S_{2,3}$ die Beschleunigung $\gamma_{2,3}$ erteilen sollen, so muß ihre Vektorsumme gleich dem Produkt $\overline{m_{2,3}\gamma_{2,3}}$ sein. Bezeichnet man die Vektorsumme der auf das Teilsystem direkt einwirkenden äußeren Kräfte mit Ausnahme der Druckkraft $-\overline{\Gamma}_{1,2}$ durch $\sum\overline{K}_{(2,3)}$, wobei diese Summe sich also aus der Summe der am zweiten Gliede angreifenden Kräfte $\sum\overline{K}_{(2)}$ und der Summe der am dritten Glied angreifenden Kräfte $\sum\overline{K}_{(3)}$ zusammensetzt, so hat man demnach für die Druckkraft selbst die Vektordifferenz $\overline{m_{2,3}\gamma_{2,3}} - \sum\overline{K}_{(2,3)}$, welche auch in der Form

$$-\overline{\Gamma}_{1,2} = \overline{m_{2,3}\gamma_{2,3}} + \sum(-\overline{K}_{(2,3)}), \tag{89}$$

also als Vektorsumme geschrieben werden kann.

Das Produkt $\overline{m_{2,3}\gamma_{2,3}}$ stellt die Effektivkraft des Schwerpunktes für dessen absolute Bewegung im Raume dar. Bezeichnet man dieselbe zum Unterschied von der früher in Betracht gezogenen relativen Effektivkraft $\overline{E}_{r_{2,3}}$ mit $\overline{E}_{2,3}$, so kann man die auf das Teilsystem in $G_{1,2}$ einwirkende Druckkraft $-\overline{\Gamma}_{1,2}$ auch durch die Vektorsumme

$$-\overline{\Gamma}_{1,2} = \overline{E}_{2,3} + \sum(-\overline{K}_{(2,3)}) \tag{90}$$

darstellen. Es ergibt sich demnach diese Druckkraft als Resultante

aus der absoluten Effektivkraft des Schwerpunktes $S_{2,3}$ des Teilsystems und den sämtlichen in entgegengesetzter Richtung genommenen äußeren Kräften, welche außer dem Gelenkdruck noch auf dieses Teilsystem einwirken.

Dieser Druckkraft entgegengesetzt gleich ist die auf das erste Glied in $G_{1,2}$ einwirkende Druckkraft $\overline{\Gamma}_{1,2}$. Die letztere kann daher als Resultante von ebensoviel Komponenten aufgefaßt werden, welche mit den Komponenten der ersteren sämtlich an Größe übereinstimmen, aber genau die entgegengesetzten Richtungen besitzen. Das heißt aber, es setzt sich die auf das erste Glied in $G_{1,2}$ einwirkende Druckkraft $\overline{\Gamma}_{1,2}$ zusammen aus den sämtlichen am zweiten und dritten Gliede direkt angreifenden Kräften und außerdem einer Kraft, welche der absoluten Effektivkraft $\overline{E}_{2,3}$ des Teilschwerpunktes entgegengesetzt gleich und daher mit $-\overline{E}_{2,3}$ zu bezeichnen ist; sie wird also durch die Vektorsumme

$$(91) \qquad \overline{\Gamma}_{1,2} = \sum \overline{K}_{(2,3)} + (-\overline{E}_{2,3})$$

dargestellt.

Zu diesem Resultat kann man noch auf folgende Weise gelangen. Die in $G_{1,2}$ auf das erste Glied einwirkende Druckkraft $\overline{\Gamma}_{1,2}$ muß auch gerade an Größe und Richtung so beschaffen sein, daß sie zusammen mit den direkt am ersten Gliede angreifenden Kräften $\overline{K}_{(1)}$ dem Schwerpunkte S_1 seine absolute Beschleunigung γ_1 erteilt. Es muß daher die Vektorsumme dieser sämtlichen auf das erste Glied wirkenden Kräfte, die in $G_{1,2}$ angreifende Druckkraft $\overline{\Gamma}_{1,2}$ mit eingeschlossen, gleich dem Produkt $m_1\gamma_1$, d. h. also gleich der absoluten Effektivkraft $\overline{E}_1$ des Schwerpunktes S_1 sein. Die Druckkraft allein läßt sich daher durch die Vektorsumme

$$(92) \qquad \overline{\Gamma}_{1,2} = \overline{E}_1 + \sum(-\overline{K}_{(1)})$$

darstellen.

Es ist nun nur noch zu zeigen, daß diese Vektorsumme der oben unter (91) für dieselbe Druckkraft angegebenen gleich ist. Der Beweis läßt sich leicht erbringen, wenn man auf das ganze Gelenksystem zurückgreift und für dieses den Schwerpunktssatz aufstellt, welcher hier aussagt, daß die Vektorsumme der sämtlichen am Gelenksystem angreifenden äußeren Kräfte gleich der absoluten Effektivkraft $\overline{E}_0$ des Gesamtschwerpunktes S_0 ist.

Zu den äußeren Kräften des ganzen Gelenksystems gehören nun nicht alle Kräfte $\overline{K}_{(1)}$, $\overline{K}_{(2)}$ und $\overline{K}_{(3)}$, welche für je eins der drei Glieder des Systems als äußere Kräfte aufzufassen sind. Greifen z. B. an zwei Punkten verschiedener Glieder Kräfte an, welche mit ihren Richtungen in die Verbindungslinie der beiden Punkte fallen und gleiche Größe, aber entgegengesetzte Richtung besitzen, so stellt eine

jede dieser beiden entgegengesetzt gleichen Kräfte für das Glied, an welchem sie angreift, eine äußere Kraft dar; für das ganze Gelenksystem, und auch schon für ein die beiden Glieder enthaltendes Teilsystem, bedeuten dagegen dieselben keine äußeren Kräfte, sondern ein Paar innerer Kräfte, welche auf die Bewegung des Schwerpunktes dieses Systems deshalb keinen Einfluß ausüben können, weil sie sich an demselben das Gleichgewicht halten werden.

Wenn nun auch unter den Kräften $\overline{K}_{(1)}$, $\overline{K}_{(2)}$ und $\overline{K}_{(3)}$ im allgemeinen solche vorhanden sind, welche nicht mehr unter die äußeren Kräfte des ganzen Systems oder eines Teilsystems gerechnet werden können, so wird doch infolge des Umstandes, daß diese Kräfte nur paarweise auftreten und dann stets entgegengesetzt gleich sind, die Vektorsumme aller äußeren Kräfte der einzelnen Glieder von der Vektorsumme der äußeren Kräfte des ganzen Gelenksystems nicht verschieden sein. Ganz das entsprechende gilt für die äußeren Kräfte eines Teilsystems und die seiner Glieder. Bezeichnet man die Vektorsumme der äußeren Kräfte des ganzen Systems einfach durch $\sum \overline{K}$, ohne einen Index hinzuzufügen, und beachtet, daß die an einem Teilsystem angreifenden äußeren Kräfte schon bisher mit $\overline{K}_{(1,2)}$ oder $\overline{K}_{(2,3)}$ bezeichnet wurden, je nachdem das Teilsystem sich aus dem ersten und zweiten, oder aus dem zweiten und dritten Gliede zusammensetzt, so hat man demnach die Beziehungen

$$
\begin{aligned}
\sum \overline{K}_{(1)} + \sum \overline{K}_{(2)} + \sum \overline{K}_{(3)} &= \sum \overline{K}, \\
\sum \overline{K}_{(1)} + \sum \overline{K}_{(2)} \phantom{+ \sum \overline{K}_{(3)}} &= \sum \overline{K}_{(1,2)}, \\
\sum \overline{K}_{(2)} + \sum \overline{K}_{(3)} &= \sum \overline{K}_{(2,3)},
\end{aligned} \tag{93}
$$

Diesen Beziehungen sind ferner die ganz allgemein geltenden Beziehungen zwischen den verschiedenen Effektivkräften an die Seite zu stellen

$$
\begin{aligned}
\overline{m_1\gamma_1} + \overline{m_2\gamma_2} + \overline{m_3\gamma_3} &= \overline{m_0\gamma_0}, \\
\overline{m_1\gamma_1} + \overline{m_2\gamma_2} \phantom{+ \overline{m_3\gamma_3}} &= \overline{m_{1,2}\gamma_{1,2}}, \\
\overline{m_2\gamma_2} + \overline{m_3\gamma_3} &= \overline{m_{2,3}\gamma_{2,3}},
\end{aligned} \tag{94}
$$

oder in anderer Form geschrieben

$$
\begin{aligned}
\overline{E}_1 + \overline{E}_2 + \overline{E}_3 &= \overline{E}_0, \\
\overline{E}_1 + \overline{E}_2 \phantom{+ \overline{E}_3} &= \overline{E}_{1,2}, \\
\overline{E}_2 + \overline{E}_3 &= \overline{E}_{2,3},
\end{aligned} \tag{95}
$$

wobei analog den schon eingeführten Bezeichnungen noch unter $\overline{E}_2$ und $\overline{E}_3$ die absoluten Effektivkräfte der Schwerpunkte S_2 und S_3, unter $m_{1,2}$ die Massensumme $m_1 + m_2$ und unter $\overline{\gamma}_{1,2}$ und $\overline{E}_{1,2}$ die absolute Beschleunigung und absolute Effektivkraft des Teilschwerpunktes $S_{1,2}$ zu verstehen sind.

Da nach dem Schwerpunktssatze $\sum \overline{K}$ und $\overline{E}_0$ einander gleich sind, so ergeben sich aus (93) und (95) die weiteren Beziehungen

$$(96) \quad \begin{aligned} &\sum \overline{K}_{(1)} + \sum \overline{K}_{(2)} + \sum \overline{K}_{(3)} = \overline{E}_0, \\ &\sum \overline{K}_{(1,2)} + \sum \overline{K}_{(3)} = \overline{E}_{1,2} + \overline{E}_3, \\ &\sum \overline{K}_{(1)} + \sum \overline{K}_{(2,3)} = \overline{E}_1 + \overline{E}_{2,3}. \end{aligned}$$

Aus der letzten dieser Beziehungen ist unmittelbar die Gleichheit der beiden Vektorsummen (91) und (92) für die in $G_{1,2}$ auf das erste Glied einwirkenden Druckkraft $\overline{\Gamma}_{1,2}$ zu ersehen.

Es hat sich also das Resultat ergeben, daß für das erste Glied des dreigliedrigen Gelenksystems zu den direkt an ihm angreifenden Kräften $\overline{K}_{(1)}$ noch im Gelenkpunkte $G_{1,2}$ die Druckkraft $\overline{\Gamma}_{1,2}$ hinzukommt. Da durch die letztere vollkommen der Einfluß in Rechnung gezogen ist, welchen die Verbindung des ersten Gliedes mit den beiden anderen auf die Bewegung des ersten Gliedes ausübt, so muß sich unter der gemeinsamen Einwirkung der sämtlichen Kräfte $\overline{K}_{(1)}$ und der Druckkraft $\overline{\Gamma}_{1,2}$ das erste Glied genau so bewegen, als ob es ganz von den übrigen losgelöst wäre. Nach (91) setzt sich nun die Kraft $\overline{\Gamma}_{1,2}$ aus zwei wesentlich voneinander verschiedenen Bestandteilen zusammen. Der eine hängt bloß von den am zweiten und dritten Gliede angreifenden Kräften $\overline{K}_{(2,3)}$ ab, indem er direkt die Resultante dieser nach dem Punkte $G_{1,2}$ parallel verlegten Kräfte darstellt. Der andere Bestandteil stellt dagegen den Einfluß dar, den die Bewegung des zweiten und dritten Gliedes auf die Bewegung des ersten ausübt. Er zeigt, daß die Bewegung des in $G_{1,2}$ hängenden Teilsystems nur insofern auf das erste Glied einwirkt, als bei derselben der Teilschwerpunkt $S_{2,3}$ in seiner Bewegung im Raume eine Beschleunigung oder Verzögerung erfährt. Dieser mit $\gamma_{2,3}$ bezeichneten Beschleunigung ist er direkt proportional und hängt außerdem nur noch von der Masse $m_{2,3}$ des Teilsystems ab, indem er einer Kraft äquivalent ist, welche der absoluten Effektivkraft $\overline{E}_{2,3}$ des Schwerpunktes $S_{2,3}$ an Größe gleich, aber an Richtung entgegengesetzt ist.

Um die Bewegung des ersten Gliedes auf die eines einzigen von den übrigen Gliedern abgelösten Körpers zurückzuführen, hat man daher nur nötig, in dem Gelenkmittelpunkte $G_{1,2}$ die sämtlichen am zweiten und dritten Gliede angreifenden Kräfte und außerdem eine der absoluten Effektivkraft des Teilschwerpunktes $S_{2,3}$ entgegengesetzt gleiche Kraft anzubringen.

Bezeichnet man das resultierende Drehungsmoment der am ersten Gliede sowieso angreifenden Kräfte und der im Gelenkmittelpunkte $G_{1,2}$ noch hinzugefügten Komponenten der Kraft $\overline{\Gamma}_{1,2}$ in bezug auf

die zu den Gelenkachsen parallele Achse durch den Schwerpunkt S_1 des ersten Gliedes mit D_1 und versteht unter $\varkappa_1$ den Trägheitsradius des ersten Gliedes für diese Schwerpunktsachse, welche ja eine Hauptträgheitsachse für das erste Glied darstellen soll, so ergibt sich für die Winkelbeschleunigung φ_1'' des ersten Gliedes nach dem oben angeführten Satze die Beziehung

$$\varphi_1'' = \frac{D_1}{m_1 \varkappa_1^2}. \tag{97}$$

Diese Gleichung, welche analog der für das erste reduzierte System geltenden Gleichung (74) gebildet ist, in welcher zum Unterschied das auf die Achse durch H_1 bezogene resultierende Drehungsmoment der am ersten reduzierten System angreifenden Kräfte mit D_I bezeichnet wurde, stellt nur den analytischen Ausdruck für die Tatsache dar, daß unter den gemachten Voraussetzungen die Winkelbeschleunigung φ_1'' dem resultierenden Drehungsmoment D_1 direkt und dem Trägheitsmoment $m_1 \varkappa_1^2$ umgekehrt proportional ist.

Für die Beschleunigung γ_1 des Schwerpunktes S_1 ergibt sich ferner nach dem Schwerpunktssatze die Gleichung

$$\overline{\gamma_1} = \frac{\sum \overline{K_{(1)}} + \overline{\Gamma_{1,2}}}{m_1}, \tag{98}$$

deren Richtigkeit sofort aus (92) zu erkennen ist, wenn man beachtet, daß $\overline{E_1}$ mit $\overline{m_1 \gamma_1}$ identisch ist.

Die im 7. Abschnitt angeführte Interpretation der zum ersten reduzierten System gehörenden Bewegungsgleichung hatte das Resultat ergeben (vgl. Seite 59), daß die Bewegung des ersten reduzierten Systems dadurch auf die eines einzigen starren Körpers zurückgeführt wird, daß man im Gelenkmittelpunkte $G_{1,2}$ zu den sowieso zum ersten reduzierten System gehörenden äußeren Kräften des zweiten und dritten Gliedes nur noch eine Kraft hinzufügt, welche der zu $G_{1,2}$ relativen Effektivkraft des Teilschwerpunktes $S_{2,3}$ entgegengesetzt gleich ist. Es muß nun noch gezeigt werden, daß das frühere Resultat mit dem jetzt gewonnenen im Einklang steht, und daß das eine sich in das andere überführen läßt.

Denkt man das erste Glied im Gelenkmittelpunkte $G_{1,2}$ mit der Masse $m_{2,3}$ des aus dem zweiten und dritten Gliede bestehenden Teilsystems beschwert, wie es für das erste reduzierte System erforderlich ist, so hat dieser Massenpunkt eine Bewegung auszuführen, welche mit der Bewegung des Punktes $G_{1,2}$ vollkommen übereinstimmt. Um dies zu ermöglichen, ist eine an ihm angreifende Kraft von der Größe $m_{2,3} g_{1,2}$ nötig, unter $g_{1,2}$ die Beschleunigung des Gelenkmittelpunktes $G_{1,2}$ verstanden. Fügt man diese Kraft im Gelenkmittelpunkt $G_{1,2}$ den übrigen hinzu, so läßt sich dieselbe mit der Effektivkraft $-\overline{m_{2,3} \gamma_{2,3}}$

zu einer Resultante zusammensetzen, welche durch das Produkt $-m_{2,3}(\bar{\gamma}_{2,3}-\bar{g}_{1,2})$ gemessen wird. Der zweite Faktor dieses Produktes stellt nun nichts anderes dar, als die zum Gelenkmittelpunkte $G_{1,2}$ relative Beschleunigung des Teilschwerpunktes $S_{2,3}$, welche früher mit $\bar{\gamma}_{r_{2,3}}$ bezeichnet worden ist; denn die absolute Beschleunigung dieses Schwerpunktes kann natürlich als Resultante aus der zu $G_{1,2}$ relativen Beschleunigung desselben und der absoluten Beschleunigung des Gelenkmittelpunktes $G_{1,2}$ selbst aufgefaßt werden, so daß man hat

$$(99)\qquad \bar{\gamma}_{2,3}=\bar{\gamma}_{r_{2,3}}+\bar{g}_{1,2}.$$

Es ist daher das Produkt $-m_{2,3}(\bar{\gamma}_{2,3}-\bar{g}_{1,2})$ mit der Kraft $-\bar{E}_{r_{2,3}}$ identisch, welche der zu $G_{1,2}$ relativen Effektivkraft des Schwerpunktes entgegengesetzt gleich ist. Damit ist aber von ganz elementarer Seite aus der Anschluß an die frühere Interpretation der zum ersten reduzierten System gehörenden Bewegungsgleichung erreicht worden, so daß man nun rückwärts aus (97) leicht zu der durch die dritte Gleichung von (69) gegebenen Form derselben gelangen kann. Es stellt also (97) nur eine vereinfachte Form dieser Bewegungsgleichung dar.

Nach den vorstehenden Erläuterungen kann es nicht zweifelhaft sein, daß man die Bewegungen des dritten Gliedes des Gelenksystems dadurch auf diejenigen eines einzigen von den übrigen Gliedern abgelösten Körpers zurückführen kann, daß man zu den auf das dritte Glied sowieso einwirkenden Kräften $\bar{K}_{(3)}$ noch im Gelenkmittelpunkte $G_{2,3}$ die an den beiden anderen Gliedern ursprünglich angreifenden Kräfte $\bar{K}_{(1,2)}$ und außerdem eine Kraft hinzufügt, welche der absoluten Effektivkraft $\bar{E}_{1,2}$ des Teilschwerpunktes $S_{1,2}$ entgegengesetzt gleich ist. Die Resultante dieser in $G_{2,3}$ angreifenden Kräfte stellt die auf das dritte Glied einwirkende Druck- oder Zugkraft $\bar{\Gamma}_{2,3}$ dar, welche von dem Zusammenhang zwischen dem dritten Gliede und dem aus dem ersten und zweiten Gliede zusammengesetzten Teilsystem im Gelenk $G_{2,3}$ herrührt und der rückwärts auf dieses Teilsystem wirkenden Druckkraft entgegengesetzt gleich ist, so daß man die letztere mit $-\bar{\Gamma}_{2,3}$ zu bezeichnen hat. Die beiden Kräfte $\bar{\Gamma}_{2,3}$ und $-\bar{\Gamma}_{2,3}$ stellen zusammen den Gelenkdruck in $G_{2,3}$ dar, wobei man für die erstere die Vektorsumme hat

$$(100)\qquad \bar{\Gamma}_{2,3}=\sum\bar{K}_{(1,2)}+(-\bar{E}_{1,2}).$$

Unter Berücksichtigung der zweiten Relation in (96) kann man hierfür auch schreiben

$$(101)\qquad \bar{\Gamma}_{2,3}=\bar{E}_3+\sum(-\bar{K}_{(3)}),$$

ein Resultat, welches sich auch ohne weiteres aus dem Schwerpunktssatze ergibt, wenn man denselben auf die Bewegung des Schwerpunktes S_3 anwendet.

Ist D_3 das resultierende Drehungsmoment der am dritten Gliede direkt angreifenden Kräfte $\overline{K}_{(3)}$ und der im Gelenkmittelpunkte $G_{2,3}$ hinzutretenden Komponenten der Kraft $\overline{\Gamma}_{2,3}$ in bezug auf die zu den Gelenkachsen parallele Achse durch den Schwerpunkt S_3, und $\varkappa_3$ der Trägheitsradius des dritten Gliedes für diese Schwerpunktsachse, welche eine Hauptträgheitsachse des dritten Gliedes darstellt, so hat man für die Winkelbeschleunigung φ_3'' die Gleichung

$$\varphi_3'' = \frac{D_3}{m_3 \varkappa_3^2}. \tag{102}$$

Außerdem gilt für die Beschleunigung γ_3 des Schwerpunktes S_3

$$\overline{\gamma}_3 = \frac{\sum \overline{K}_{(3)} + \overline{\Gamma}_{2,3}}{m_3}; \tag{103}$$

dies ist im Grunde nur eine andre Form der Gleichung (101).

Fügt man im Punkte $G_{2,3}$ die Massensumme $m_{1,2}$ des ersten und zweiten Gliedes dem dritten Gliede hinzu, so wird aus demselben das dritte reduzierte System. Die sich gleichzeitig nötig machende Kraft $\overline{m_{1,2}\,g_{2,3}}$, unter $g_{2,3}$ die Beschleunigung des Gelenkmittelpunktes $G_{2,3}$ verstanden, setzt sich dann aber mit $-\overline{E}_{1,2}$ zu der Kraft $-\overline{E}_{r_{1,2}}$ zusammen, so daß man dadurch auf die frühere Interpretation der letzten Bewegungsgleichung in (69) geführt wird.

Was endlich das mittlere Glied des dreigliedrigen Gelenksystems anlangt, so hat man in $G_{1,2}$ die Kraft $-\overline{\Gamma}_{1,2}$ und in $G_{2,3}$ die Kraft $-\overline{\Gamma}_{2,3}$ den am zweiten Gliede angreifenden Kräften hinzuzufügen, um damit die Bewegung desselben auf die eines einzigen Körpers zurückzuführen; denn der Druck auf das Mittelglied ist in beiden Gelenken dem Druck auf das Endglied entgegengesetzt gleich. Die in $G_{1,2}$ anzubringende Kraft hat aber nach (92) die Größe

$$-\overline{\Gamma}_{1,2} = \sum \overline{K}_{(1)} + (-\overline{E}_1), \tag{104}$$

und die in $G_{2,3}$ hinzuzufügende Kraft nach (101) die Größe

$$-\overline{\Gamma}_{2,3} = \sum \overline{K}_{(3)} + (-\overline{E}_3). \tag{105}$$

Man hat also das Resultat, daß die äußeren Kräfte $\overline{K}_{(1)}$ des ersten Gliedes so auf das Mittelglied einwirken, als ob sie in $G_{1,2}$, und die äußeren Kräfte $\overline{K}_{(3)}$ des dritten Gliedes so, als ob sie in $G_{2,3}$ angriffen. Der Einfluß der Eigenbewegung des ersten und dritten Gliedes auf die Bewegung des Mittelgliedes kommt dagegen durch die in $G_{1,2}$ und $G_{2,3}$ anzubringenden negativen Effektivkräfte $-\overline{E}_1$ und $-\overline{E}_3$ zur Geltung.

Bezeichnet man mit D_2 das resultierende Drehungsmoment aller am zweiten Gliede angreifenden Kräfte, die Druckkräfte $-\overline{\Gamma}_{1,2}$ und $-\overline{\Gamma}_{2,3}$ in den Gelenkmittelpunkten $G_{1,2}$ und $G_{2,3}$ mit eingeschlossen,

im bezug auf die zu den Gelenkachsen parallele Achse durch den Schwerpunkt S_2, und mit $\varkappa_2$ den Trägheitsradius des zweiten Gliedes für dieselbe Achse, welche wiederum eine Hauptträgheitsachse des zweiten Gliedes darstellt, so hat man demnach für die Winkelbeschleunigung φ_2'' des zweiten Gliedes den Wert

$$\varphi_2'' = \frac{D_2}{m_2 \varkappa_2^2}. \tag{106}$$

Die Beschleunigung γ_2 des Schwerpunktes S_2 ergibt sich nach dem Schwerpunktssatze aus

$$\bar{\gamma}_2 = \frac{\sum \bar{K}_{(2)} + (-\bar{\Gamma}_{1,2}) + (-\bar{\Gamma}_{2,3})}{m_2}, \tag{107}$$

welche Gleichung, wie man leicht erkennt, auch als unmittelbare Folge von (104), (105), (96), (94) und (95) aufgefaßt werden kann.

Geht man vom Mittelgliede zum zweiten reduzierten System über, indem man in $G_{1,2}$ die Masse m_1 und in $G_{2,3}$ die Masse m_3 hinzugefügt denkt, so machen sich, um die richtigen Bewegungen dieser beiden Massenpunkte zu erzielen, in $G_{1,2}$ und $G_{2,3}$ noch bezüglich die beiden Kräfte $\overline{m_1 g_{1,2}}$ und $\overline{m_3 g_{2,3}}$ nötig. Die erstere setzt sich mit $-\bar{E}_1$ zu $-\bar{E}_{r_1}$ und die letztere mit $-\bar{E}_3$ zu $-\bar{E}_{r_3}$ zusammen, wie man nach den bisherigen Auseinandersetzungen leicht erkennen wird. Man gelangt also zu der früheren Interpretation der auf das zweite reduzierte System bezüglichen vierten Bewegungsgleichung von (69).

Bisher war angenommen worden, daß das Gelenksystem vollkommen frei im Raume beweglich ist. Man kann nun aber auch in jedem Falle bedingter Beweglichkeit auf dem gleichen elementaren Wege zu den Bewegungsgleichungen gelangen, wenn man nur die Kräfte, welche die Beschränkung der Bewegung des Systems erzwingen, den übrigen Kräften hinzufügt.

Als Beispiel sei wieder der Fall in Betracht gezogen, daß das erste Glied sich nur um eine im Raume feste und zu den Gelenkachsen parallele Achse durch einen Punkt O_1 seiner Längsachse (vgl. Fig. 8) drehen kann. Diese Bedingung für die Bewegung des ersten Gliedes und damit des ganzen Gelenksystems läßt sich durch eine in O_1 angreifende Kraft verwirklichen, welche nichts anderes ist als die Reaktion auf den Druck, der bei den verschiedenen Bewegungen des ganzen Systems auf diese Achse ausgeübt wird. Dieser Druck und die ihm entgegengesetzt gleiche Reaktionskraft werden dabei im allgemeinen während der Bewegung sowohl ihre Intensität als auch ihre Richtung stetig ändern.

Die Reaktionskraft gegen den Druck auf die Achse in O_1 läßt sich wiederum mit Hilfe des Schwerpunktssatzes ohne weiteres angeben. Da dieselbe wie eine äußere Kraft auf das Gelenksystem einwirkt, so muß sie im Verein mit den übrigen äußeren Kräften $\bar{K}$ des

ganzen Systems dem Gesamtschwerpunkte S_0 desselben seine Beschleunigung γ_0 erteilen. Bezeichnet man die Reaktionskraft in O_1 mit Γ_1, so ist also die Vektorsumme von $\overline{\Gamma}_1$ und $\sum \overline{K}$ gleich der Effektivkraft $\overline{E}_0$ des Gesamtschwerpunktes. Man hat infolgedessen jetzt

$$(108) \qquad \overline{\Gamma}_1 = \overline{E}_0 - \sum \overline{K}.$$

Es gelten also im vorliegenden Falle bedingter Beweglichkeit nicht mehr die Relationen (96), sondern in allen ist auf der linken Seite noch die Kraft $\overline{\Gamma}_1$ hinzuzufügen. Ferner wird auch jetzt z. B. nicht mehr durch (92) der Gelenkdruck $\overline{\Gamma}_{1,2}$ angegeben, sondern man erhält zur Bestimmung desselben die Formel

$$(109) \qquad \overline{\Gamma}_{1,2} = \overline{E}_1 + \sum(-\overline{K}_{(1)}) + (-\overline{\Gamma}_1).$$

Dagegen bleibt die Formel (91) für $\overline{\Gamma}_{1,2}$ auch jetzt noch richtig, und es lassen sich auch $\overline{E}_0$ und $\sum \overline{K}$ noch bezüglich in die Komponenten $\overline{E}_1$, $\overline{E}_{2,3}$ und $\sum \overline{K}_{(1)}$, $\sum \overline{K}_{(2,3)}$ zerlegen, denn die Beziehungen (94), (95) und (93) gelten ganz allgemein und unabhängig von etwaigen Bedingungen für die Beweglichkeit des Systems.

Führt man diese Komponenten in (108) ein, so findet man zunächst zu jeder am ersten Gliede direkt angreifenden Kraft $\overline{K}_{(1)}$ eine entgegengesetzt gleiche Kraft unter den in O_1 angreifenden Komponenten von $\overline{\Gamma}_1$. Zwei solche Kräfte bilden immer ein Kräftepaar, dessen Moment gleich dem Drehungsmoment der direkt angreifenden Kraft $\overline{K}_{(1)}$ in bezug auf die Achse durch O_1 ist. In gleicher Weise findet man zu jeder nach den früheren Auseinandersetzungen im Gelenkmittelpunkte $G_{1,2}$ angreifenden Kraft $\overline{K}_{(2)}$ oder $\overline{K}_{(3)}$ aus der Summe $\sum \overline{K}_{(2,3)}$, welche nach (91) eine Komponente von $\overline{\Gamma}_{1,2}$ darstellt, unter Berücksichtigung von (93) eine entgegengesetzt gleiche Kraft in O_1, so daß ein Kräftepaar entsteht, dessen Moment in jedem Falle gleich dem Drehungsmoment der in $G_{1,2}$ angreifenden Kraft $\overline{K}_{(2)}$ oder $\overline{K}_{(3)}$ in bezug auf die Achse durch O_1 ist.

Außer den Kräften $\overline{K}_{(2,3)}$ findet man in $G_{1,2}$ nach (91) noch die Kraft $-\overline{E}_{2,3}$ vor. Da die eine Komponente von $\overline{E}_0$ in O_1 gleich der Effektivkraft $\overline{E}_{2,3}$, also wiederum dieser in $G_{1,2}$ angreifenden Kraftkomponente entgegengesetzt gleich ist, so bilden auch diese beiden Kräfte ein Paar, dessen Moment gleich dem Drehungsmoment der in $G_{1,2}$ angreifenden Kraft $-\overline{E}_{2,3}$ in bezug auf die Achse durch O_1 ist. Schließlich bleibt nur noch die in O_1 angreifende Kraft $\overline{E}_1$ allein übrig.

Durch das Hinzufügen der Reaktionskraft $\overline{\Gamma}_1$ in O_1 hat man nun den Fall bedingter Beweglichkeit auf denjenigen vollkommen freier Beweglichkeit im Raume zurückgeführt. Es muß daher die Beziehung (97) gelten, wobei der Zähler auf der rechten Seite gleich ist dem

auf die Achse durch den Schwerpunkt S_1 bezogenen resultierenden Drehungsmoment der sämtlichen auf das erste Glied einwirkenden Kräfte, die Komponenten der in $G_{1,2}$ und O_1 angreifenden Druckkräfte $\overline{\Gamma_{1,2}}$ und $\overline{\Gamma_1}$ mit einbegriffen.

Wie eben gezeigt worden ist, setzen sich mit Ausnahme der in O_1 angreifenden Kraft $\overline{E}_1$ alle diese Kräfte zu je zwei zu Kräftepaaren zusammen. Das gesamte Drehungsmoment der beiden Kräfte eines Paares in bezug auf irgend eine zu der Ebene des Paares senkrechte Achse stimmt nun stets mit dem Moment des Kräftepaares überein, wo auch die Bezugsachse liegen möge. Das resultierende Moment aller dieser Kräftepaare sei M_1.

Zu diesem kommt nun nur noch das Drehungsmoment der in O_1 angreifenden Komponente $\overline{E}_1$ in bezug auf die zu den Gelenkachsen parallele Achse durch S_1 hinzu; dieses ist aber leicht anzugeben. Die Effektivkraft $\overline{E}_1$ wird durch das Produkt $m_1 \gamma_1$ gemessen. Da der Schwerpunkt S_1 sich im vorliegenden Falle bedingter Beweglichkeit des Systems nur auf einem Kreise um O_1 mit dem Radius $O_1 S_1$ oder r_1 bewegen kann (vgl. Fig. 8), so läßt sich die Beschleunigung γ_1 desselben in eine Tangentialkomponente und eine Normalkomponente zerlegen, von denen die erstere senkrecht zur Längsachse des ersten Gliedes gerichtet ist und die Größe $r_1 \varphi_1''$ besitzt, während die letztere in die Längsachse selbst hineinfällt und die Größe $r_1 \varphi_1'^2$ hat. Dementsprechend hat man für die in O_1 angreifend zu denkende Effektivkraft $\overline{E}_1$ zwei zueinander senkrechte Komponenten $\overline{m_1 r_1 \varphi_1''}$ und $\overline{m_1 r_1 \varphi_1'^2}$ (vgl. Fig. 16), welche diesen beiden Beschleunigungskomponenten parallel laufen. Da es sich um das Drehungsmoment von $\overline{E}_1$ in bezug auf S_1 handelt, so liefert nur die zur Längsachse senkrechte Komponente einen von Null verschiedenen Beitrag zu diesem Drehungsmoment; denn die andere geht ja in ihrer Verlängerung durch S_1 selbst hindurch.

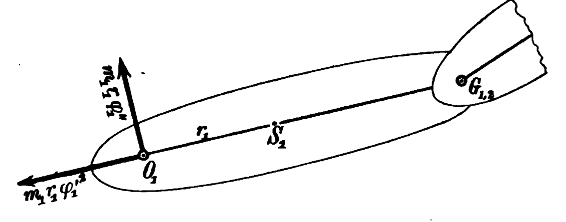


Fig. 16.

Da die zur Längsachse senkrechte Komponente von $\overline{E}_1$ im Abstande r_1 vom Schwerpunkte S_1 verläuft, so hat ihr Drehungsmoment die Größe $m_1 r_1 \varphi_1'' \cdot r_1$. Beachtet man noch, daß dieselbe bei positivem φ_1'' den Winkel φ_1 zu verkleinern sucht und daher ihr Drehungsmoment negativ zu rechnen ist, so ergibt sich schließlich die Formel

$$(110) \qquad \varphi_1'' = \frac{M_1 - m_1 r_1^2 \cdot \varphi_1''}{m_1 \varkappa_1^2}.$$

In derselben kommt zunächst auf beiden Seiten die Winkel-

beschleunigung φ_1'' vor; man schreibt die Gleichung daher besser in der Form

(111) $$\varphi_1'' = \frac{M_1}{m_1(\varkappa_1^2 + r_1^2)}.$$

Die Bedeutung derselben ist leicht zu erkennen. Da die Achse durch O_1 den Abstand r_1 von der parallelen Achse durch den Schwerpunkt S_1 besitzt, so stellt nach einem bekannten Satze über die Trägheitsmomente der Nenner auf der rechten Seite von (111) das Trägheitsmoment des ersten Gliedes für diese Achse dar. Der Zähler ist dagegen gleichbedeutend mit dem resultierenden Drehungsmoment aller auf das erste Glied einwirkenden Kräfte in bezug auf dieselbe durch O_1 gehende Achse. Dies folgt aus der Tatsache, daß die Bezugsachse für die Momente von Kräftepaaren parallel mit sich verschoben werden kann, ohne daß der Wert des resultierenden Momentes sich ändert. Man kann daher die ursprünglich durch S_1 gehende Bezugsachse nach O_1 verlegt denken. Beachtet man, daß bei allen hier in Frage kommenden Kräftepaaren immer eine Kraft Komponente von $\overline{\Gamma}_1$ ist und daher in O_1 selbst angreift, während die anderen Kräfte in ihrer Gesamtheit alle schon im Falle unbeschränkter Beweglichkeit des Gelenksystems vorhandenen Kräfte darstellen, so kann man auch sagen, daß M_1 das resultierende Drehungsmoment aller am ersten Gliede direkt angreifenden Kräfte $\overline{K}_{(1)}$ und der im Gelenkmittelpunkte $G_{1,2}$ hinzukommenden Druckkraft $\overline{\Gamma}_{1,2}$, bzw. der Komponenten $\sum \overline{K}_{(2,3)}$ und $-\overline{E}_{2,3}$ der letzteren (vgl. (91)), in bezug auf die zu den Gelenkachsen parallele Achse durch O_1 darstellt.

Da bei einem einzigen starren Körper, der um eine feste Achse drehbar ist, die Winkelbeschleunigung dieser Drehung ganz allgemein gemessen wird durch den Quotient aus dem resultierenden Drehungsmoment aller am Körper angreifenden Kräfte und dem Trägheitsmoment des Körpers, beide bezogen auf die feste Drehungsachse, so erkennt man also aus (111), daß, wie im Falle vollkommen freier Beweglichkeit, so auch in dem betrachteten Falle bedingter Beweglichkeit des Gelenksystems die Drehung des ersten Gliedes um die feste Achse durch O_1 dadurch auf die Drehung eines einzigen Körpers zurückgeführt wird, daß man den direkt am ersten Gliede angreifenden Kräften im Gelenkmittelpunkte $G_{1,2}$ die Kraft $\overline{\Gamma}_{1,2}$ hinzufügt.

Geht man vom ersten Gliede zum ersten reduzierten System über, indem man in $G_{1,2}$ die Masse $m_{2,3}$ konzentriert annimmt, und fügt gleichzeitig die zur Bewegung dieses Massenpunktes nötige Kraft $\overline{m_{2,3}g_{1,2}}$ hinzu, wobei $g_{1,2}$ die Beschleunigung des Gelenkpunktes $G_{1,2}$ bedeutet, so setzt sich diese neue Kraft mit der ebenfalls in $G_{1,2}$ angreifenden Kraft $-\overline{E}_{2,3}$ wiederum zu $-\overline{E}_{r_{2,3}}$ zusammen (vgl. hierzu Seite 77). Man gelangt auf diese Weise zu dem Resultat, daß sich

das erste reduzierte System auch im vorliegenden Falle bedingter Beweglichkeit in bezug auf die Drehung um die feste Achse durch O_1 wie ein starrer Körper von gleicher Zusammensetzung verhält, wenn man den zu dem System an und für sich gehörenden Kräften (vgl. Seite 59) noch in $G_{1,2}$ die zu diesem Gelenkmittelpunkte relative, aber in entgegengesetzter Richtung genommene Effektivkraft des Teilschwerpunktes $S_{2,3}$ hinzufügt.

Dies war aber gerade die Bedeutung der ersten Bewegungsgleichung (70). Man ist also in der Tat zu der richtigen Bewegungsgleichung des ersten reduzierten Systems gelangt.

Um die Bewegung des zweiten Gliedes im vorliegenden Falle bedingter Beweglichkeit auf die eines einzigen frei beweglichen Körpers zurückzuführen, hat man den im Gelenkmittelpunkte $G_{1,2}$ anzubringenden Kräften des ersten Gliedes noch die Kraft Γ_1 hinzuzufügen.

Man hat demnach jetzt beim zweiten Gliede außer den sowieso vorhandenen Kräften $\overline{K}_{(2)}$ noch im Gelenkmittelpunkte $G_{1,2}$ die Kräfte $\sum\overline{K}_1$, $-\overline{E}_1$ und $\overline{\Gamma}_1$ (vgl. hiermit auch Formel (109)) und im Gelenkmittelpunkte $G_{2,3}$ die Kraft $-\overline{\Gamma}_{2,3}$. Die Kraft $\overline{\Gamma}_1$ besitzt nach (108) die Komponenten $\sum(-\overline{K})$ und $\overline{E}_0$, und die Kraft $-\overline{\Gamma}_{2,3}$ kann nach (105) in die Komponenten $\sum\overline{K}_{(3)}$ und $-\overline{E}_3$ zerlegt werden. Nach (93) und (95) lassen sich die in $G_{1,2}$ angreifenden Komponenten auch durch die Komponenten $\sum(-\overline{K}_{(2)})$, $\sum(-\overline{K}_{(3)})$, $\overline{E}_2$ und $\overline{E}_3$ ersetzen, was mit der jetzt noch geltenden Formel (91) für den Druck in $G_{1,2}$ übereinstimmt. Von diesen bilden die einzelnen Kräfte $-\overline{K}_{(2)}$ mit den direkt am zweiten Gliede angreifenden Kräften $\overline{K}_{(2)}$ lauter Kräftepaare. Ferner setzt sich die in $G_{1,2}$ angreifende Komponentensumme $\sum(-\overline{K}_{(3)})$ mit der ihr entgegengesetzt gleichen Summe $\sum\overline{K}_{(3)}$ am Gelenkmittelpunkte $G_{2,3}$ zu einem Kräftepaar zusammen, und endlich bilden auch die in $G_{1,2}$ und $G_{2,3}$ angreifenden Kräfte $\overline{E}_3$ und $-\overline{E}_3$ ein Kräftepaar. Es bleibt demnach noch im Punkte $G_{1,2}$ allein die Effektivkraft $\overline{E}_2$ übrig, zu welcher keine entgegengesetzt gleiche Kraft vorhanden ist. Da sich alle andern Kräfte in ihrer Wirkung aufheben, wenn man sie nach dem Schwerpunktssatze nach S_2 verlegt, so bewegt sich also dieser Schwerpunkt in der Tat so, als ob er nur unter dem Einfluß der Effektivkraft $\overline{E}_2$ von der Größe $m_2\gamma_2$ stände.

Die Beschleunigung γ_2 des Schwerpunktes S_2 kann man nun auffassen als die Resultante der Beschleunigung $g_{1,2}$ des Gelenkmittelpunktes $G_{1,2}$ und die zu diesem Gelenkmittelpunkte relative Beschleunigung von S_2, welche durch die Vektorsumme $\overline{r_2\varphi_2''} + \overline{r_2\varphi_2'^2}$ dargestellt wird. Demnach läßt sich $\overline{E}_2$ ersetzen durch

$$(112)\qquad \overline{E}_2 = \overline{m_2 g_{1,2}} + \overline{m_2 r_2 \varphi_2''} + \overline{m_2 r_2 \varphi_2'^2}.$$

Die Komponente $\overline{m_2 g_{1,2}}$ würde, wenn sie allein wirkte, dem Schwer-

punkte S_2 eine Bewegung erteilen, welche mit der Bewegung von $G_{1,2}$ übereinstimmt. Die beiden anderen Komponenten von $\overline{E}_2$ rufen dagegen zusammen die zum Gelenkmittelpunkte $G_{1,2}$ relative Beschleunigung von S_2 hervor, die allein eine Folge der Drehung des zweiten Gliedes um die Gelenkachse $G_{1,2}$ ist.

Die Beschleunigung $g_{1,2}$ des Gelenkmittelpunktes $G_{1,2}$ besitzt infolge der Drehung des ersten Gliedes um O_1 die Tangentialkomponente $l_1 \varphi_1''$, welche senkrecht zur Längsachse des ersten Gliedes gerichtet ist, und die Normalkomponente $l_1 \varphi_1'^2$, welche in die Längsachse selbst fällt und nach O_1 gerichtet ist (vgl. Fig. 17). Demnach zerfällt auch $m_2 g_{1,2}$ in zwei Komponenten von diesen Richtungen, deren erstere die

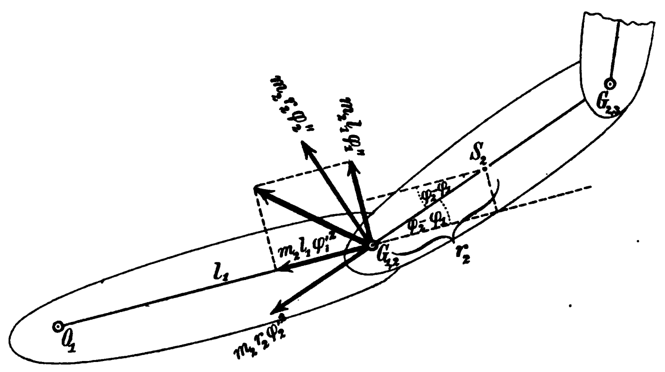


Fig. 17.

Größe $m_2 l_1 \varphi_1''$, und deren letztere die Größe $m_2 l_1 \varphi_1'^2$ besitzt. Die Drehungsmomente, welche diese beiden Komponenten auf die zu den Gelenkachsen parallele Achse durch den Schwerpunkt S_2 ausüben, sind, wie man aus Figur 17 leicht bestätigen wird, bezüglich $-m_2 l_1 \varphi_1'' \cdot r_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$ und $-m_2 l_1 \varphi_1'^2 \cdot r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$. Beide Drehungsmomente besitzen das negative Vorzeichen, da sie bei positiver Winkelbeschleunigung φ_1'' und im Falle, daß $\varphi_2 > \varphi_1$ ist, beide das zweite Glied im Sinne einer Verkleinerung des Winkels φ_2 (vgl. Fig. 8), d. h. hier im Sinne des Uhrzeigers zu drehen suchen.

Von den noch übrig bleibenden Komponenten der in $G_{1,2}$ angreifenden Kraft $\overline{E}_2$ ist die zu $G_{1,2}$ relative Tangentialkomponente von der Größe $m_2 r_2 \varphi_2''$ senkrecht zur Längsachse des zweiten Gliedes gerichtet, während die entsprechende relative Normalkomponente von der Größe $m_2 r_2 \varphi_2'^2$ die Richtung dieser Längsachse selbst besitzt. Aus diesem Grunde übt die erstere auf die Achse durch S_2 das Drehungsmoment $-m_2 r_2 \varphi_2'' \cdot r_2$ aus, während die letztere infolge des Umstandes, daß ihre Richtung durch S_2 selbst hindurchgeht, mit keinem Drehungsmoment auf diese Achse einwirkt.

Bezeichnet man das resultierende Moment der oben angeführten,

durch die Kräfte $\sum \overline{K}_{(2)}$, $\sum \overline{K}_{(3)}$ und $-\overline{E}_3$ hervorgerufenen Kräftepaare zunächst mit M_2, so erhält man demnach für die Winkelbeschleunigung φ_2'' des zweiten Gliedes die Gleichung

$$(113) \qquad \varphi_2'' = \frac{M_2 - [m_2 l_1 \varphi_1'' \cdot r_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + m_2 l_1 \varphi_1'^2 \cdot r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)] - m_2 r_2 \varphi_2'' \cdot r_2}{m_2 \varkappa_2^2}.$$

Löst man diese Gleichung nach φ_2'' auf und bezeichnet den in eckige Klammer gesetzten Ausdruck im Zähler von (113) mit $D_{1,2}$, so erhält man

$$(114) \qquad \varphi_2'' = \frac{M_2 - D_{1,2}}{m_2 (\varkappa_2^2 + r_2^2)}.$$

In derselben hat der Nenner die Bedeutung des Trägheitsmomentes des zweiten Gliedes in bezug auf die Gelenkachse $G_{1,2}$; denn die letztere hat vom Schwerpunkte S_2 den Abstand r_2. Das im Zähler stehende resultierende Moment M_2 der Kräftepaare kann auch als das auf dieselbe Gelenkachse bezogene resultierende Drehungsmoment der am zweiten Gliede direkt angreifenden Kräfte $\overline{K}_{(2)}$ und der Komponenten $\sum \overline{K}_{(3)}$ und $-\overline{E}_3$ der in $G_{2,3}$ angreifenden Druckkraft $-\overline{\Gamma}_{2,3}$ angesehen werden. Schließlich kann auch $-D_{1,2}$ als das Drehungsmoment einer Kraft in bezug auf dieselbe Gelenkachse aufgefaßt werden. Denkt man sich nämlich im Schwerpunkte S_2 eine Kraft angebracht, welche der auf $G_{1,2}$ wirkenden Druckkomponente $\overline{m_2 g_{1,2}}$ entgegengesetzt gleich und daher mit $-\overline{m_2 g_{1,2}}$ zu bezeichnen ist, so wird diese Kraft auf die Gelenkachse $G_{1,2}$ mit einem Drehungsmoment einwirken, das nach den obigen Auseinandersetzungen gerade durch $-D_{1,2}$ gemessen wird.

Es ergibt sich daher aus (114) das Resultat, daß im vorliegenden Falle bedingter Beweglichkeit des ganzen Gelenksystems das zweite Glied sich infolge des Zusammenhanges mit den beiden anderen so um die bewegliche Achse $G_{1,2}$ dreht, wie es ein starrer Körper um eine ruhende Achse tun würde, an welchem außer den Kräften $\overline{K}_{(2)}$ noch im Gelenkmittelpunkte $G_{2,3}$ die Kraft $-\overline{\Gamma}_{2,3}$ und im Schwerpunkte S_2 die Kraft $-\overline{m_2 g_{1,2}}$ angriffe. Die in $G_{2,3}$ hinzugekommene Kraft veranschaulicht den Einfluß, welchen das am zweiten Gliede hängende dritte Glied auf die Drehung des zweiten ausübt; denn denkt man das dritte Glied fort, so verschwinden auch die beiden Komponenten $\sum \overline{K}_3$ und $-\overline{E}_3$ dieser Kraft. Die in S_2 angreifend zu denkende Kraft $-\overline{m_2 g_{1,2}}$ stellt dagegen den Einfluß dar, welchen die Eigenbewegung der Gelenkachse $G_{1,2}$ auf die Drehungen des zweiten Gliedes um diese Achse ausübt und ist im Grunde eine Folge des Zusammenhanges des zweiten Gliedes mit dem ersten; denn bleibt im besonderen Falle diese Achse in Ruhe, so verschwindet ihre Beschleunigung $g_{1,2}$ und damit auch die Kraft in S_2.

Die Notwendigkeit der Einführung der in S_2 angreifenden Kraft

— $\overline{m_2 g_{1,2}}$, wenn man die Drehung des zweiten Gliedes um die Gelenkachse $G_{1,2}$ unabhängig von der Eigenbewegung der letzteren untersuchen will, kann man sich auch auf folgende Weise klar machen.

Wenn im Schwerpunkte eines frei beweglichen Körpers eine Kraft angreift, so wird dieselbe dem Körper nur eine Translationsbewegung erteilen, dagegen wird sie weder eine Drehung desselben um seinen Schwerpunkt hervorrufen, noch eine durch andere Kräfte schon bewirkte Drehung irgendwie ändern können. Infolge der Einführung der Druckkräfte in $G_{1,2}$ und $G_{2,3}$ verhält sich nun das zweite Glied wie ein einziger frei beweglicher Körper, bei welchem der Punkt $G_{1,2}$ desselben durch das Zusammenwirken der verschiedenen Kräfte gerade die Beschleunigung $g_{1,2}$ erfahren hat. Will man nun die Drehung des zweiten Gliedes um $G_{1,2}$ für sich allein der Untersuchung unterziehen, so kann man es in der Weise machen, daß man auf das Glied eine Kraft einwirken läßt, welche die Beschleunigung $g_{1,2}$ des Gelenkpunktes $G_{1,2}$ gerade vernichtet, so daß also die Gelenkachse $G_{1,2}$ im Raume an seiner Stelle bleibt, ohne aber gleichzeitig an der Drehbewegung des zweiten Gliedes etwas zu ändern. Dies läßt sich aber gerade durch die in S_2 angreifende Kraft $-\overline{m_2 g_{1,2}}$ erreichen. Dabei setzt sich diese Kraft mit der in $G_{1,2}$ selbst angreifenden Druckkomponente zu einem Kräftepaar zusammen, dessen Moment eben durch den negativen Klammerausdruck in (113) gemessen wird.

Geht man wiederum zum zweiten reduzierten System über, indem man in $G_{1,2}$ die Masse m_1 und in $G_{2,3}$ die Masse m_3 dem zweiten Gliede hinzufügt, so muß man gleichzeitig in $G_{1,2}$ eine Kraft von der Größe $\overline{m_1 g_{1,2}}$ und in $G_{2,3}$ eine Kraft von der Größe $\overline{m_3 g_{2,3}}$ angreifend denken, damit die Bewegung des zweiten Gliedes hierdurch nicht geändert wird. Die erstere setzt sich zunächst mit der in $G_{1,2}$ angreifenden Kraftkomponente $\overline{m_2 g_{1,2}}$ zu der Kraft $\overline{(m_1 + m_2) g_{1,2}}$, und die letztere mit der in $G_{2,3}$ angreifenden Kraft $-\bar{E}_3$ zu der Kraft $-\bar{E}_{r_3}$ zusammen; denn es gilt natürlich die Beziehung

(115) $$\bar{E}_3 = \overline{m_3 g_{2,3}} + \bar{E}_{r_3}.$$

Man hat jetzt also nicht mehr in $G_{2,3}$ die Kraft $-\bar{E}_3$, welche mit der in $G_{1,2}$ vorhandenen Kraftkomponente $+\bar{E}_3$ sich zu einem Kräftepaar zusammensetzt, sondern man muß von der letzteren die Komponente $+\bar{E}_{r_3}$ absondern und diese mit der in $G_{2,3}$ angreifenden Kraft $-\bar{E}_{r_3}$ zu einem Kräftepaar zusammennehmen. Dann bleibt aber nach (115) in $G_{1,2}$ noch die Komponente $\overline{m_3 g_{2,3}}$ übrig.

Die Beschleunigung $\bar{g}_{2,3}$ läßt sich als Resultante aus der Beschleunigung $\bar{g}_{1,2}$ des Gelenkmittelpunktes $G_{1,2}$ und der zu $G_{1,2}$ relativen Beschleunigung von $G_{2,3}$ auffassen. Die letztere setzt sich aber aus der relativen Tangentialbeschleunigung $\overline{l_2 \varphi_2''}$ und der relativen

Normalbeschleunigung $\overline{l_2\varphi_2'^2}$ zusammen, so daß man hat

$$(116)\qquad \overline{m_3 g_{2,3}} = \overline{m_3 g_{1,2}} + \overline{m_3 l_2 \varphi_2''} + \overline{m_3 l_2 \varphi_2'^2}.$$

Von diesen drei Komponenten von $\overline{m_3 g_{2,3}}$ faßt man nun zweckmäßiger Weise die erste mit der ebenfalls in $G_{1,2}$ angreifenden Kraft $\overline{(m_1 + m_2) g_{1,2}}$ zu $\overline{m_0 g_{1,2}}$ zusammen. Die beiden anderen Komponenten setzen sich mit den letzten beiden Komponenten der ebenfalls in $G_{1,2}$ angreifenden Kraft $\overline{E}_2$ (vgl. (112)) nach der zweiten Relation von (2) zu $\overline{m_0 c_2 \varphi_2''}$ und $\overline{m_0 c_2 \varphi_2'^2}$ zusammen.

Als Resultat dieser Betrachtung hat sich also ergeben, daß im vorliegenden Falle bedingter Beweglichkeit am zweiten reduzierten System außer den durch die Kräfte $\sum \overline{K}_{(2)}$ und $\sum \overline{K}_{(3)}$ hervorgerufenen Kräftepaaren die folgenden Kräfte angreifen: Zunächst in $G_{1,2}$ die relative Effektivkraft $+\overline{E}_{r_3}$ und in $G_{2,3}$ die derselben entgegengesetzt gleiche Kraft $-\overline{E}_{r_3}$, welche die erstere zu einem Kräftepaar ergänzt; ferner in $G_{1,2}$ die Kraft $\overline{m_0 g_{1,2}}$ und die beiden Kräfte $\overline{m_0 c_2 \varphi_2''}$ und $\overline{m_0 c_2 \varphi_2'^2}$. Hierbei kann wiederum die Kraft $\overline{m_0 g_{1,2}}$ durch die beiden Komponenten $\overline{m_0 l_1 \varphi_1''}$ und $\overline{m_0 l_1 \varphi_1'^2}$ ersetzt werden, von denen die erstere zur Längsachse des ersten Gliedes senkrecht gerichtet ist, während die letztere die Richtung dieser Längsachse selbst besitzt. Unter dem Einfluß aller dieser Kräftepaare und Kräfte wird das zweite reduzierte System sich um die zu den Gelenkachsen parallele Achse durch seinen Schwerpunkt H_2 wie ein starrer Körper drehen mit einer Winkelbeschleunigung φ_2'', deren Größe durch folgende der Formel (113) entsprechend gebildete Beziehung gemessen wird:

$$(117)\qquad \varphi_2'' = \frac{M_2' - [m_0 l_1 \varphi_1'' \cdot c_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + m_0 l_1 \varphi_1'^2 \cdot c_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)] - m_0 c_2 \varphi_2'' \cdot c_2}{m_0 k_2^2},$$

unter M_2' das resultierende Moment der durch die Kräfte $\sum \overline{K}_{(2)}, \sum \overline{K}_{(3)}$ und die relative Effektivkraft $-\overline{E}_{r_3}$ hervorgerufenen Kräftepaare und unter k_2, wie früher, den Trägheitsradius des zweiten reduzierten Systems für die Achse durch seinen Schwerpunkt H_2 verstanden. Der in eckige Klammer eingeschlossene Ausdruck im Zähler von (117) sei mit $D_{1,2}'$ bezeichnet. Bringt man dann die Formel (117) auf die Form

$$(118)\qquad \varphi_2'' = \frac{M_2' - D_{1,2}'}{m_0 (k_2^2 + c_2^2)}$$

und beachtet, daß nach Seite 41 der Nenner das Trägheitsmoment $m_0 \lambda_2^2$ des zweiten reduzierten Systems für die Gelenkachse $G_{1,2}$ darstellt, so wird man durch die im Anschluß an (114) angestellten Betrachtungen zu der früher auf Seite 66 gegebenen Interpretation der zweiten Gleichung (70) geführt. Man hat damit wiederum gewisser-

maßen auf synthetischem Wege den Anschluß an die frühere analytische Ableitung dieser Bewegungsgleichung erzielt.

Da die Verhältnisse sich beim mittelsten der drei Glieder des Gelenksystems am kompliziertesten gestalten, so ist die Ableitung der zu diesem Gliede gehörenden Gleichung besonders ausführlich auseinandergesetzt worden. Die Behandlung der Bewegung des dritten Gliedes läßt sich dafür um so schneller erledigen.

Wenn das ganze Gelenksystem sich nur um die Achse durch O_1 drehen kann, so wirkt auf das dritte Glied in $G_{2,3}$ eine Druckkraft ein, welche sich nicht nur, wie im Falle freier Beweglichkeit, aus den Komponenten $\sum \overline{K}_{(1,2)}$ und $-\overline{E}_{1,2}$ zusammensetzt, sondern für welche noch die Reaktionskraft $\overline{\Gamma}_1$ mit den Komponenten $\overline{E}_0$ und $-\sum \overline{K}$ (vgl. (108)) hinzutritt. Die Komponentensummen $\sum \overline{K}_{(1,2)}$ und $-\sum \overline{K}$ lassen sich nach (93) zu $\sum(-\overline{K}_{(3)})$ zusammenfassen, und die beiden Komponenten $\overline{E}_0$ und $-\overline{E}_{1,2}$ ergeben nach (95) die Resultante $\overline{E}_3$. Zu dem gleichen Resultat gelangt man auch nach dem Schwerpunktssatz, wenn man bei der Bemessung dieser Druckkraft auf die Bewegung des Schwerpunktes S_3 Rücksicht nimmt. Man erkennt dann, daß dieselbe im vorliegenden Falle noch durch (101) richtig angegeben wird, während natürlich (100) seine Gültigkeit verloren hat.

Alle einzelnen Kräfte $-\overline{K}_{(3)}$ setzen sich mit den am dritten Gliede direkt angreifenden Kräften $\overline{K}_{(3)}$ zu Kräftepaaren zusammen.

Die außerdem in $G_{2,3}$ angreifende Kraft $\overline{E}_3$, welche mit $\overline{m_3 \gamma_3}$ identisch ist, läßt sich zunächst in drei Komponenten zerlegen, wenn man berücksichtigt, daß die Beschleunigung $\overline{\gamma_3}$ des Schwerpunktes S_3 sich aus der Beschleunigung $\overline{g_{2,3}}$ des Gelenkmittelpunktes $G_{2,3}$ und der zu $G_{2,3}$ relativen Beschleunigung des Schwerpunktes S_3 zusammensetzt. Da die letztere in die zur Längsachse des dritten Gliedes senkrechte Tangentialbeschleunigung $\overline{r_3 \varphi_3''}$ und die in diese Längsachse selbst fallende Normalbeschleunigung $\overline{r_3 \varphi_3'^2}$ zerfällt, so hat man demnach

$$\overline{E}_3 = \overline{m_3 g_{2,3}} + \overline{m_3 r_3 \varphi_3''} + \overline{m_3 r_3 \varphi_3'^2}. \tag{119}$$

Auch die Beschleunigung $\overline{g_{2,3}}$ läßt sich weiter zerlegen, nämlich in die Beschleunigung $\overline{g_{1,2}}$ des Gelenkmittelpunktes $G_{1,2}$ und die zu $G_{1,2}$ relative Beschleunigung von $G_{2,3}$. Die erstere setzt sich aus der zur Längsachse des ersten Gliedes senkrechten Tangentialbeschleunigung $\overline{l_1 \varphi_1''}$ und der in diese Längsachse fallenden Normalbeschleunigung $\overline{l_1 \varphi_1'^2}$, die letztere aus der zur Längsachse des zweiten Gliedes senkrechten Tangentialbeschleunigung $\overline{l_2 \varphi_2''}$ und der in diese Längsachse fallenden Normalbeschleunigung $\overline{l_2 \varphi_2'^2}$ zusammen. Beachtet man noch, daß die Längsachse des dritten Gliedes mit der des ersten den Winkel $(\varphi_3 - \varphi_1)$ und mit der des zweiten Gliedes den Winkel $(\varphi_2 - \varphi_1)$

bildet (vgl. Fig. 8), so erhält man schließlich für die Winkelbeschleunigung φ_3'' des dritten Gliedes die Beziehung

$$(120)\quad \varphi_3'' = \frac{\begin{array}{c} M_3 - [m_3 l_1 \varphi_1'' \cdot r_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_1) + m_3 l_1 \varphi_1'^2 \cdot r_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_1) + m_3 l_2 \varphi_2'' \cdot r_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_2) \\ + m_3 l_2 \varphi_2'^2 \cdot r_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)] - m_3 r_3 \varphi_3'' \cdot r_3 \end{array}}{m_3 \varkappa_3^2},$$

in welcher M_3 das resultierende Moment der durch die Kräfte $\overline{K}_{(3)}$ hervorgerufenen Kräftepaare bedeuten soll. Löst man diese Gleichung nach φ_3'' auf und bezeichnet dabei das in der eckigen Klammer stehende Drehungsmoment mit $D_{2,3}$, so ergibt sich

$$(121)\quad \varphi_3'' = \frac{M_3 - D_{2,3}}{m_3(\varkappa_3^2 + r_3^2)}.$$

Der Nenner auf der rechten Seite stellt das Trägheitsmoment des dritten Gliedes in bezug auf die Gelenkachse $G_{2,3}$ dar. Von den beiden im Zähler stehenden Momenten läßt sich das erste als das resultierende Drehungsmoment der sämtlichen am dritten Gliede direkt angreifenden Kräfte $\overline{K}_{(3)}$ und das letzte unter Berücksichtigung des negativen Vorzeichens als das Drehungsmoment einer im Schwerpunkte S_3 angreifenden Kraft $-\overline{m_3 g_{2,3}}$ auffassen, beide ebenfalls bezogen auf die Gelenkachse $G_{2,3}$.

Die Formel (121) läßt daher erkennen, daß die Drehung des dritten Gliedes so um die ruhend gedachte Gelenkachse $G_{2,3}$ stattfindet, als ob außer den direkt an dem Gliede angreifenden Kräften noch in seinem Schwerpunkte eine Kraft angebracht wäre, welche entgegengesetzt gleich der Kraft $\overline{m_3 g_{2,3}}$ ist, unter $\overline{g_{2,3}}$ die Beschleunigung der Gelenkachse selbst verstanden — ein Resultat, welches man nach den bisherigen Betrachtungen voraussagen konnte. Da die Achse $G_{2,3}$ in Wirklichkeit nicht ruht, so kommt zu dieser Drehung des dritten Gliedes noch eine Translation desselben nach Maßgabe der Bewegung von $G_{2,3}$ hinzu.

Der Übergang zum dritten reduzierten System gestaltet sich in diesem Falle sehr einfach. Fügt man in $G_{2,3}$ die Massen m_1 und m_2 hinzu, so macht sich gleichzeitig in demselben Punkte die Kraft $\overline{(m_1 + m_2) g_{2,3}}$ nötig, um die Bewegung des dritten Gliedes nicht hierdurch zu beeinflussen. Diese Kraft setzt sich aber mit der Komponente $\overline{m_3 g_{2,3}}$ von $\overline{E}_3$ zu $\overline{m_0 g_{2,3}}$ zusammen. Gleichzeitig kann man nach der letzten Relation von (2) $m_3 r_3$ durch $m_0 c_3$ ersetzen und daher die beiden noch in $G_{2,3}$ angreifenden Komponenten von $\overline{E}_3$ in der Form $\overline{m_0 c_3 \varphi_3''}$ und $\overline{m_0 c_3 \varphi_3'^2}$ schreiben. Der Schwerpunkt H_3 des dritten reduzierten Systems besitzt von $G_{2,3}$ den Abstand c_3. Man erhält daher aus (120) die entsprechende Formel für das dritte reduzierte System, indem man im Zähler der rechten Seite überall m_3 durch m_0 und r_3 durch c_3 und gleichzeitig das Trägheitsmoment im Nenner durch das Trägheitsmoment $m_0 k_3^2$ des dritten reduzierten Systems für

die Achse durch H_3 ersetzt. Geht man dann zu der Form (121) über, so erhält man im Nenner $m_0(k_3^2 + c_3^2)$, was nichts anderes ist als das Trägheitsmoment $m_0 \lambda_3^2$ des dritten reduzierten Systems für die Gelenkachse $G_{2,3}$. Man gelangt auf diese Weise in der Tat zu der früher (vgl. Seite 67) angeführten Interpretation der letzten Gleichung von (70).

Es ist im Vorhergehenden in allen Fällen zuletzt nur deshalb noch auf das reduzierte System eingegangen worden, um dadurch zu zeigen, daß man auf dem eingeschlagenen Wege schließlich zu der früher aus den allgemeinen Lagrangeschen Gleichungen abgeleiteten Form der Bewegungsgleichungen des Gelenksystems gelangt. Hiervon abgesehen hat sich auf elementarem Wege gegenüber der früher im 7. Abschnitt erörterten eine neue Interpretation der Bewegungsgleichungen ergeben, welche die reduzierten Systeme außer Betracht läßt und sich auf die Bewegung der einzelnen Glieder selbst bezieht. Wenn auch die Form der Gleichungen, welche sich im Anschluß an diese Deutung ergibt, im allgemeinen komplizierter ist als beim Zugrundelegen der reduzierten Systeme, so besitzt die neue Interpretation doch für manche Anwendungen der Bewegungsgleichungen auf bestimmte Probleme der Bewegungsphysiologie eine ganz besondere Bedeutung. Dies ist vor allen Dingen der Fall, wenn es gelingt, für eine bestimmte Bewegung eines Organismus durch geeignete Versuche empirisch die Bahnen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Schwerpunkte aller einzelnen Körperteile festzustellen. Dann hat man damit ohne weiteres auch die absoluten Effektivkräfte dieser Schwerpunkte gewonnen und hat nun an der Hand dieser Kenntnis die Möglichkeit, die Bewegung jedes einzelnen Gliedes für sich zu untersuchen, ohne noch weitere Rücksicht auf den Zusammenhang mit den übrigen Gliedern nehmen zu müssen, als es durch die Heranziehung der Effektivkräfte schon geschehen ist.

Allerdings beziehen sich die bisher gewonnenen Resultate zunächst nur auf ein ebenes dreigliedriges Gelenksystem; sie können daher vorläufig auch nur auf Organismen Anwendung finden, welche sich bei bestimmten Bewegungen wie ein solches dreigliedriges Gelenksystem verhalten. In den nächsten Abschnitten wird sich zeigen, inwieweit die für das dreigliedrige ebene System gefundenen Resultate auf das n-gliedrige ebene Gelenksystem und auf räumliche Gelenksysteme übertragen und für dieselben verallgemeinert werden können.

B. Das n-gliedrige ebene und das räumliche Gelenksystem.

Durch die eingehende Untersuchung des dreigliedrigen ebenen Gelenksystems ist der Weg vorgezeichnet, auf dem man bei einem ebenen System von mehr als drei Gliedern und auch beim allgemeinen räumlichen Gelenksystem auf einfache Weise zu den Bewegungsgleichungen gelangen kann. Es liegt in der Natur solcher komplizierterer Gelenksysteme, daß ihre Bewegungsgleichungen nicht nur verhältnismäßig zahlreich sind, sondern auch im allgemeinen recht verwickelten Bau aufweisen, und zwar um so mehr, je größer die Anzahl der Glieder des Systems ist, je größere Bewegungsfreiheit bei einem räumlichen Gelenksystem in den Gelenken herrscht, und je mehr Freiheitsgrade infolgedessen das ganze System besitzt.

Zunächst lassen sich die am dreigliedrigen ebenen System gewonnenen Resultate, wie sich herausstellen wird, mutatis mutandis ohne Mühe auf das allgemeine aus n Gliedern bestehende ebene Gelenksystem bei lauter Scharniergelenken mit parallelen Gelenkachsen und entsprechend einfacher Massenverteilung in den Gliedern übertragen. Damit ist dann aber die Grundlage für eine exakte kinetische Untersuchung aller derjenigen Gelenksysteme am menschlichen und tierischen Körper gewonnen, bei welchen die vereinfachenden Voraussetzungen über die Art der Gelenkbewegungen und die Massenverteilung innerhalb der als starr aufgefaßten Körperteile mit genügender Genauigkeit erfüllt sind.

Von den Bewegungen des ganzen Körpers sind es namentlich die Lokomotionsbewegungen, insbesondere die des menschlichen Ganges, welche wenigstens annähernd den gemachten Voraussetzungen entsprechen. Wenn auch der menschliche Körper beim Gehen seitliche Schwankungen ausführt, die an verschiedenen Stellen des Körpers verschieden groß ausfallen, so treten dieselben an Ausdehnung doch beträchtlich hinter den Bewegungen zurück, welche von vielen Abschnitten des Körpers in der Richtung nach vorn und auch in vertikaler Richtung ausgeführt werden. Man kommt daher den tatsächlichen Verhältnissen schon ziemlich nahe, wenn man den Gang als eine ebene Bewegung auffaßt, bei der alle Körperteile sich parallel einer im Raume festen Vertikalebene, der sogenannten Gangebene, bewegen. Die Auffassung des Ganges als ebene Bewegung involviert

aber zugleich die Annahme, daß beim Gehen in allen Gelenken nur Bewegungen um parallele, zur Gangebene senkrechte Achsen ausgeführt werden. Da auch die übrigen vereinfachenden Voraussetzungen beim menschlichen Körper nahezu erfüllt sind, so lassen sich also die für das allgemeine ebene Gelenksystem geltenden Bewegungsgleichungen der kinetischen Untersuchung des menschlichen Ganges in erster Annäherung zugrunde legen.

Es gibt aber noch zahlreiche andere Fragen der Bewegungsphysiologie, insbesondere solche aus der Muskelmechanik, welche die Kenntnis der Bewegungsgleichungen der ebenen Gelenksysteme voraussetzen. Schließlich können auch viele Untersuchungen aus der technischen Mechanik diese Kenntnis nicht entbehren, wenn es sich auch bei den in den Maschinen verwendeten Gelenksystemen in der Regel um viel einfachere Verhältnisse handelt, insofern die Bewegungen derselben mit wenig Ausnahmen, dem Zwecke der Maschine entsprechend, zwangläufige sind, so daß also das ganze System überhaupt nur einen Grad der Freiheit besitzt.

Die ebenen Bewegungen des menschlichen und tierischen Körpers oder einzelner Abschnitte derselben bilden nun nur einen Spezialfall, der sich jedoch fast niemals ganz exakt verwirklicht findet. Genau genommen führt der Mensch bei seinen verschiedenen Lokomotionsbewegungen und Arbeitsleistungen räumliche Bewegungen aus. Darauf weist auch schon der Umstand hin, daß die großen hierbei hauptsächlich in Frage kommenden Gelenke, welche die Hauptteile der Extremitäten untereinander und mit dem Rumpfe verbinden, ausnahmslos mehr wie einen Grad der Freiheit besitzen. So ist der Oberarm mit dem aus Schulterblatt, Schlüsselbein und Brustbein bestehenden Schultergürtel, ebenso wie der Oberschenkel mit dem Becken, mit drei Graden der Freiheit beweglich verbunden. Der Unterarm kann sich gegen den Oberarm, ebenso wie der Unterschenkel gegen den Oberschenkel mit zwei Graden der Freiheit bewegen, und, wenn man die ganze Hand auf ihre Beweglichkeit gegen den Unterarm und den ganzen Fuß auf seine Beweglichkeit gegen den Unterschenkel untersucht, so findet man in beiden Fällen wiederum zwei Grade von Bewegungsfreiheit. Es werden sich daher beispielsweise schon die Bewegungen des Unterarms gegen den Oberarm, ebenso wie die Bewegungen des ganzen Armes gegen den Schultergürtel oder des ganzen Beins gegen das Becken im allgemeinen als räumliche Bewegungen herausstellen.

Zur Untersuchung der räumlichen Bewegungen des menschlichen Körpers reichen naturgemäß die für die ebenen Gelenksysteme aufgestellten Bewegungsgleichungen nicht aus. Es müssen daher im folgenden auch noch die Bewegungsgleichungen räumlicher Gelenksysteme abgeleitet und damit die notwendigen Unterlagen für die ki-

netische Untersuchung der allgemeinsten Bewegungen des menschlichen und tierischen Körpers und seiner Teile geschaffen werden.

Da im Raume sich alle Verhältnisse komplizierter gestalten als in der Ebene, so ist es ratsam, dabei von dem zweigliedrigen räumlichen Gelenksystem auszugehen und zunächst für dieses die Bewegungsgleichungen aufzustellen. Die am zweigliedrigen System gewonnenen Resultate lassen dann schon die charakteristischen Unterschiede zwischen den Bewegungen räumlicher und ebener Gelenksysteme erkennen, so daß die zuletzt auf das n-gliedrige räumliche System ausgedehnte Untersuchung keine wesentlich neuen Gesichtspunkte mehr zutage fördert und die Ergebnisse derselben sich leicht deuten lassen.

Das ebene Gelenksystem von n Gliedern besitzt $n+2$ Grade der Freiheit, falls die ebene Bewegung desselben keinerlei einschränkenden Bedingungen unterworfen ist, und nicht mehrere Glieder untereinander eine geschlossene kinematische Kette bilden. Damit steht in Einklang, daß eine beliebige Stellung des Systems durch $n+2$ allgemeine Koordinaten eindeutig bestimmt ist; denn dieselbe ist gegeben, sobald man die zwei ebenen Koordinaten eines Punktes des Systems und außerdem für jedes der n Glieder einen Richtungswinkel kennt. In der Wahl des Punktes hat man dabei ziemliche Freiheit. Derselbe kann mit dem in seiner Lage gegenüber den einzelnen Gliedern veränderlichen Gesamtschwerpunkte zusammenfallen, er kann aber auch in einem der n Glieder eine feste Lage besitzen. Das letztere wird man wählen, wenn im gegebenen Falle ein bestimmter Punkt eines Gliedes eine von vornherein genau bekannte Bewegung ausführt, dessen Koordinaten man dann zweckmäßigerweise als zwei der allgemeinen Koordinaten des Systems gelten läßt; im übrigen wird man die erstere Wahl bevorzugen, weil die Bewegung des Gesamtschwerpunktes sich nach bekannten mechanischen Gesetzen aus den äußeren Kräften ableiten läßt. Bleibt im besonderen Falle ein Punkt eines Gliedes bei der Bewegung des ganzen Systems fest, so wird man natürlich die Koordinaten dieses Punktes zur Bestimmung der Lage des ebenen Gelenksystems verwenden; da dieselben konstant bleiben, so hat man dann nur n veränderliche allgemeine Koordinaten, oder mit anderen Worten, es besitzt das System in diesem Falle nur noch n Grade von Bewegungsfreiheit.

So groß die Anzahl der Freiheitsgrade des Systems ist, so groß ist auch die Anzahl der Bewegungsgleichungen. Es sind daher im Falle vollkommen freier Beweglichkeit des n-gliedrigen ebenen Gelenksystems $n+2$ Gleichungen, in dem Falle, daß ein Punkt eines Gliedes fest bleibt, nur n Gleichungen aufzustellen. Gruppieren sich mehrere Glieder eines ebenen Gelenksystems zu einer geschlossenen kinematischen Kette, ein Fall, welcher bei Getrieben der Maschine die Regel ist, in organischen Gelenksystemen jedoch nur ausnahmsweise

vorkommt, so wird durch diesen Umstand gewöhnlich die Bewegungsfreiheit des ganzen Systems wesentlich heruntergedrückt, so daß also eine viel geringere Anzahl von Bewegungsgleichungen erforderlich wird. Die bei den Maschinen verwendeten Getriebe besitzen infolge der Kettenbildung in der Regel überhaupt nur noch einen Grad von Bewegungsfreiheit; es genügt daher bei diesen eine einzige Gleichung zur vollständigen Formulierung des Bewegungsvorganges. Man erkennt hieraus auch, daß die zahlreichen Arbeiten über die Kinetik der Getriebe der Untersuchung der allgemeinen n-gliedrigen Gelenksysteme nur wenig nützen können, da sie sich nur mit einem ganz speziellen Fall, dem einfachsten, der überhaupt möglich ist, befassen.

Das räumliche Gelenksystem von n Gliedern besitzt im allgemeinen viel mehr Grade der Freiheit als das ebene. Für die Anzahl derselben ist nicht allein die Zahl der Glieder maßgebend, sondern vor allen Dingen auch die Bewegungsfreiheit in den Gelenken, welche die einzelnen Glieder untereinander verbinden. Da in der Regel die in der organischen Natur auftretenden Gelenke nicht mehr als drei Grade der Freiheit aufweisen, so wäre der allgemeinste Fall dadurch charakterisiert, daß alle Gelenke mit drei Graden von Bewegungsfreiheit behaftet sind. Ist ein derartiges räumliches Gelenksystem keinerlei einschränkenden Bedingungen für seine Bewegung und die seiner Glieder unterworfen, treten also insbesondere dabei nicht mehrere Glieder zu einer geschlossenen kinematischen Kette zusammen, so besitzt das ganze System $3n + 3$ Grade der Freiheit. Eine beliebige Stellung desselben im Raume kann also nur durch $3n + 3$ allgemeine Koordinaten eindeutig bestimmt werden; davon geben drei die Lage eines Punktes des Systems an, und je drei beziehen sich auf die Orientierung eines jeden der n Glieder im Raume. Es können daher drei der Bestimmungsstücke als die rechtwinkligen räumlichen Koordinaten eines Punktes gedeutet werden, während die übrigen $3n$ Größen Richtungskoordinaten, also Winkel darstellen.

Entsprechend der Anzahl der allgemeinen Koordinaten wären also in dem angenommenen Falle freiester Beweglichkeit des ganzen Gelenksystems nicht weniger als $3n + 3$ Bewegungsgleichungen, also nahezu dreimal so viel wie für das ebene Gelenksystem, aufzustellen. Während man beim dreigliedrigen ebenen System mit fünf Bewegungsgleichungen auskam, verlangt demnach das dreigliedrige räumliche Gelenksystem schon deren zwölf im Falle freiester Beweglichkeit. Es ist weiterhin leicht einzusehen, daß die Festlegung eines Punktes in einem der n Glieder die Anzahl der Bewegungsgleichungen des räumlichen Systems um drei vermindert, so daß nur noch $3n$ Gleichungen übrig bleiben, während im gleichen Falle das ebene System nur n Gleichungen, also genau den dritten Teil erforderte.

Der Fall, daß alle Gelenke des Systems drei Grade der Freiheit

besitzen, findet sich nun bei den organischen Gelenksystemen fast nicht vor. In der Regel kommen nur einigen Gelenken drei Grade der Freiheit zu, während die anderen geringere Beweglichkeit aufweisen. Durch diesen Umstand wird natürlich auch die Bewegungsfreiheit des ganzen Gelenksystems verringert. Denkt man beispielsweise die ganze untere Extremität des Menschen aus den drei als starr aufgefaßten Teilen: Oberschenkel, Unterschenkel und Fuß zusammengesetzt, so kann sich dieselbe, weil das Hüftgelenk drei, das Kniegelenk und Fußgelenk dagegen nur zwei Grade der Freiheit besitzen, relativ zum festgestellten Becken im ganzen mit sieben Graden der Freiheit bewegen. Eine kinetische Untersuchung der Beinbewegungen gegenüber dem im Raum fixierten Becken müßte sich also auf sieben Bewegungsgleichungen stützen. Dabei würde es sich jedoch nicht um den allgemeinsten Fall der Bewegung des gegliederten Beins handeln, da ja das Becken und damit der Mittelpunkt des Hüftgelenks als fixiert angenommen wurden. Gibt man diesem Gelenkmittelpunkte auch noch freie Beweglichkeit im Raume, wie er sie tatsächlich bei den Bewegungen des ganzen Körpers besitzt, so kommen zu den sieben Graden der Freiheit noch drei hinzu. Die Anzahl der nötigen Bewegungsgleichungen beträgt demnach bei ganz freier Beweglichkeit des Beins zehn; sie ist also gerade doppelt so groß, als wenn man sich bei der Untersuchung auf ebene Bewegungen des Beins beschränken würde, wozu man beispielsweise bei der Untersuchung der nahezu ebenen Schwingungsbewegung des Beins beim Gehen berechtigt ist.

Alle die Fälle beschränkterer Beweglichkeit des räumlichen Gelenksystems können aber als Sonderfälle des Gelenksystems mit lauter Gelenken von drei Graden der Freiheit aufgefaßt werden. Man hat daher die zu den ersteren gehörenden Bewegungsgleichungen schon mit gewonnen, wenn man die zu dem Falle freiester Beweglichkeit gehörenden Gleichungen aufgestellt hat. Dies gilt auch insbesondere für die schon abgeleiteten Bewegungsgleichungen des ebenen dreigliedrigen Gelenksystems, wie man aus den später mitzuteilenden Resultaten erkennen wird. Aus diesem Grunde soll im folgenden zunächst an der Annahme festgehalten werden, daß die sämtlichen Gelenke des jeweils in Betracht gezogenen Systems nur einen festen Gelenkmittelpunkt, im übrigen aber drei Grade der Freiheit besitzen.

Für die Untersuchung des ebenen dreigliedrigen Gelenksystems erwies sich die Einführung der reduzierten Systeme und der Hauptpunkte der einzelnen Glieder als von großer Bedeutung. Infolge derselben nahmen nicht nur die an und für sich verhältnißmäßig komplizierten Formeln eine möglichst einfache Gestalt an, was natürlich für die Anwendung derselben von ganz besonderer Wichtigkeit ist,

sondern es gewann auch die ganze Untersuchung von vornherein an Anschaulichkeit und Klarheit.

Die Zusammensetzung der reduzierten Systeme und die Lage der Hauptpunkte, welche mit den Schwerpunkten der reduzierten Systeme identisch sind, hing nun im Prinzip durchaus nicht davon ab, daß nur drei Glieder vorhanden waren und die Gelenke zwischen den einzelnen Gliedern nur einen Grad von Bewegungsfreiheit besaßen. Es steht daher zu erwarten, daß den reduzierten Systemen und Hauptpunkten für die aus mehr als drei Gliedern zusammengesetzten ebenen und für die räumlichen Gelenksysteme eine ganz entsprechende Bedeutung zukommen wird. Es läßt sich sogar voraussagen, daß der Nutzen ihrer Einführung, der sich ja bei dem dreigliedrigen ebenen Gelenksystem vor allen Dingen in einer wesentlichen Vereinfachung der kinetischen Untersuchung kund gab, bei den mehrgliedrigen ebenen, und vor allen Dingen bei den räumlichen Gelenksystemen infolge der an und für sich viel komplizierteren Verhältnisse noch viel mehr zutage treten wird.

Um die Bedeutung der reduzierten Systeme und Hauptpunkte für die kinetische Untersuchung der komplizierteren Gelenksysteme würdigen zu können, muß zunächst nachgewiesen werden, daß ihre für das spezielle dreigliedrige ebene Gelenksystem aufgefundenen Eigenschaften auch beim allgemeinen n-gliedrigen ebenen und räumlichen Gelenksystem Geltung besitzen. Dieser Beweis soll im nächsten Abschnitt ganz allgemein geführt werden.

9. Über die allgemein gültigen Eigenschaften der reduzierten Systeme und Hauptpunkte.

Die einzige Voraussetzung, welche für das allgemeine räumliche Gelenksystem im Interesse der Bestimmtheit der aus ihm hervorgehenden reduzierten Systeme gemacht werden soll, ist die, daß nach Durchtrennung irgend einer Gelenkverbindung des Systems das letztere in zwei nicht mehr miteinander zusammenhängende Teile zerfällt. Diese Voraussetzung ist damit gleichbedeutend, daß an dem Gelenksystem sich keine geschlossenen kinematischen Ketten vorfinden und auch das ganze System nicht selbst eine solche geschlossene Kette bildet; denn es ist leicht einzusehen, daß die sämtlichen Glieder immer noch in irgend einer Weise zusammenhängen werden, falls man ein Gelenk innerhalb einer solchen kinematischen Kette durchtrennt. Beim menschlichen Körper und den tierischen Körpern, für deren kinetische Untersuchung sich die Methode der reduzierten Systeme vor allen Dingen sehr fruchtbar erweist, ist mit wenig Ausnahmen, wie schon oben erwähnt wurde, diese notwendige Voraussetzung erfüllt; bei den Maschinen dagegen in der Regel nicht. Man kann aber auch im letzteren Falle die reduzierten Systeme verwenden und die Zusammen-

setzung derselben stets zu einer eindeutig bestimmten Aufgabe machen, wenn man entweder ein an und für sich ruhendes Glied einer kinematischen Kette für die Betrachtung ganz aus dem Gelenksystem ausschaltet, oder, falls kein solches Glied vorhanden ist, an je einem Gelenk innerhalb einer solchen Kette die Verbindung gelöst denkt und dann die Annahme macht, daß bei den Bewegungen des ganzen Systems die mit dem Mittelpunkte dieses Gelenks zusammenfallenden Punkte der beiden benachbarten Glieder immer gerade die gleiche Bewegung ausführen, ohne doch miteinander in direktem Zusammenhange zu stehen; natürlich muß man dann zugleich den Einfluß dieser Gelenkverbindung auf die Bewegung der beiden Nachbarglieder durch an diesen angreifende äußere Kräfte ersetzt denken. Da die vorliegende Arbeit in erster Linie dem Zwecke dienen soll, die Grundlage für weitere Untersuchungen über die Kinetik des menschlichen und tierischen Körpers und seiner Teile zu bilden, so mögen vorläufig die Fälle räumlicher Gelenksysteme mit geschlossenen kinematischen Ketten außer Betracht bleiben.

Mit Ausnahme der hiermit gestellten Voraussetzung und der schon früher angeführten Annahme, daß alle Gelenke wenigstens einen festen Gelenkpunkt haben, der kurz als Gelenkmittelpunkt bezeichnet sein mag, soll das räumliche Gelenksystem keinerlei weiteren einschränkenden Bedingungen unterworfen sein. Insbesondere ist es durchaus zulässig, daß wie beim Rumpf des Menschen ein Glied des Systems mit mehr als zwei Gliedern in Gelenkverbindung ist, wie ja andererseits auch Glieder vorhanden sein müssen, die nur mit einem einzigen Gliede in einem Gelenk zusammenhängen. Die letzteren Glieder mögen Endglieder heißen. Am menschlichen Körper stellen der Kopf, sowie die beiden Hände und Füße solche Endglieder dar, falls man die letzteren als starr auffaßt. Berücksichtigt man dagegen die Bewegungen in den Finger- und Zehengelenken, so stellen dann die Nagelglieder der sämtlichen Finger und Zehen Endglieder des ganzen Gelenksystems dar. Endlich ist auch der Fall nicht auszuschließen, daß in einem Gelenk mehr wie zwei Glieder miteinander verbunden sind.

Das Prinzip der Bildung eines reduzierten Systems wird nach den Auseinandersetzungen im 1. Abschnitt klar sein. Man hat sich einfach alle Gelenke an dem Gliede, welches den Kern des reduzierten Systems bilden und daher wieder kurz als Kernglied bezeichnet sein soll, durchtrennt zu denken. Dann fällt an jedem Gelenk ein Teil des ganzen Systems ab, so daß zuletzt nur noch das Kernglied von allen anderen losgelöst übrig bleibt. Im Mittelpunkte eines jeden dieser durchtrennten Gelenke hat man sich dann die Masse des an ihm abgefallenen Abschnittes des ganzen Gelenksystems konzentriert zu denken und dem Kerngliede hinzuzufügen, so daß also schließlich infolge der

Beschwerung durch alle diese Massenpunkte das Kernglied die Gesamtmasse des ganzen Gelenksystems erhalten hat. Da die Massen in den Mittelpunkten der Gelenke des Korngliedes angebracht sind, so wird die Zusammensetzung des reduzierten Systems in keiner Weise durch die Stellung und Bewegung der übrigen Glieder beeinflußt. Es verhält sich also das reduzierte System wie ein einziger starrer Körper. Der Schwerpunkt desselben hat daher eine feste Lage innerhalb des Kerngliedes; er stellt den Hauptpunkt des letzteren dar. Wenn es auch im Interesse der bequemeren Bestimmung der Lage dieses Hauptpunktes innerhalb des Kerngliedes zweckmäßig ist, außer den in den Gelenkmittelpunkten angebrachten Massen der übrigen Glieder auch noch die Masse des Kerngliedes selbst in seinem eignen Schwerpunkte konzentriert zu denken, so hat man doch nicht aus dem Auge zu verlieren, daß zum Begriff des reduzierten Systems durchaus gehört, daß die Verteilung der Masse des Kerngliedes innerhalb desselben nicht geändert wird. Wie schon aus den Untersuchungen des ebenen dreigliedrigen Gelenksystems hervorgeht, spielen die Trägheitsmomente eines reduzierten Systems eine wesentliche Rolle in den Formeln. Diese würden natürlich ganz andere Werte annehmen, wenn man die Masse des Kerngliedes auch, wie es für die Konstruktion des Hauptpunktes bequem ist, in seinem eigenen Schwerpunkte konzentriert annehmen wollte. Das Trägheitsmoment des reduzierten Systems für irgend eine Achse wird stets auf die Weise erhalten, daß man zu dem ursprünglich vorhandenen Trägheitsmoment des Kerngliedes für diese Achse die Trägheitsmomente der sämtlichen in den Gelenkmittelpunkten des Kerngliedes konzentriert gedachten Massen hinzufügt.

Verlegt man weiterhin jede nicht direkt am Kerngliede angreifende Kraft ohne Änderung ihrer Größe und Richtung nach demjenigen Gelenkmittelpunkte des Kerngliedes, welcher innerhalb des Gelenksystems ihrem Angriffspunkte am nächsten liegt, so sollen wieder alle diese parallel verschobenen Kräfte zusammen mit den direkt am Kerngliede angreifenden als die am entsprechenden reduzierten Systeme angreifenden Kräfte aufgefaßt werden. Diese Kräfte gehören daher ebenso zum Begriff eines reduzierten Systems wie die nach den einzelnen Gelenkmittelpunkten des Kerngliedes verlegt gedachten Massen der angrenzenden Teilsysteme.

Die Vereinfachung der Untersuchung, welche durch die Einführung der reduzierten Systeme und Hauptpunkte erzielt wird, gründet sich auf eine Reihe von Eigenschaften derselben, die schon in den früheren Abschnitten für das ebene dreigliedrige Gelenksystem abgeleitet worden sind. Dieselben besitzen nun ganz allgemeine Gültigkeit für jedes beliebige räumliche System, wie im folgenden bewiesen werden soll. Es sind dies einmal der enge Zusammenhang der reduzierten Systeme, d. h. also der Hauptpunkte der Glieder, sowohl mit dem

Gesamtschwerpunkte des ganzen Gelenksystems, als auch mit den Schwerpunkten der Teilsysteme, in welche das ganze System durch Trennung einzelner Gelenkverbindungen zerlegt werden kann — ein Zusammenhang, welcher eine möglichst einfache Bestimmung des Ortes wie auch der Bewegung des Gesamtschwerpunktes und der Schwerpunkte der Teilsysteme ermöglicht. Es ist dies weiterhin die Eigenschaft der Hauptpunkte, daß jede Drehung eines Gliedes um eine beliebige durch seinen Hauptpunkt hindurchgehende Achse mit gleichzeitiger Translationsbewegung aller übrigen Glieder den Gesamtschwerpunkt des ganzen Gelenksystems an seiner Stelle läßt — eine Eigenschaft, welche vor allen Dingen eine sehr einfache Ableitung des Ausdrucks für die lebendige Kraft relativ zum Gesamtschwerpunkte des ganzen Systems ermöglicht. Es ist fernerhin die Eigenschaft eines jeden Hauptpunktes, als Angriffspunkt für die Kraft zu dienen, mit welcher die Schwere auf das Glied, dem der Hauptpunkt angehört, infolge des Zusammenhanges mit den übrigen Gliedern einwirkt — eine Eigenschaft, die es ermöglicht, in einfacher Weise die Elementararbeiten zu bestimmen, welche die Schwere bei irgend welchen Verrückungen des Systems leistet. Und es ist dies noch eine Reihe enger Beziehungen zwischen den Hauptpunkten und den Elementarbeiten der übrigen äußeren und inneren Kräfte des Systems bei den verschiedenen Verrückungen desselben, welche ebenso wie die Haupteigenschaft der reduzierten Systeme, eine sehr einfache und anschauliche Deutung der Bewegungsgleichungen zu ermöglichen, besser erst nach der Ableitung der Bewegungsgleichungen des räumlichen Gelenksystems ausführlich besprochen werden.

a) Zusammenhang zwischen den Hauptpunkten und dem Gesamtschwerpunkte des allgemeinen Gelenksystems.

Den Zusammenhang zwischen den Hauptpunkten der Glieder eines beliebigen räumlichen Gelenksystems und dem Gesamtschwerpunkte desselben kann man am besten beurteilen, wenn man sich zunächst die Verhältnisse an einem besonders einfachen ebenen n-gliedrigen Gelenksystem vergegenwärtigt, welches sich als die Verallgemeinerung des bisher eingehend untersuchten ebenen dreigliedrigen Systems darstellt.

Die einzelnen Glieder desselben seien durch lauter Scharniergelenke mit parallelen Achsen so untereinander verbunden, daß außer den beiden Endgliedern jedes mit zwei andern, aber niemals mit mehr als zwei verbunden ist. Die Schwerpunkte der sämtlichen Glieder sollen alle in einer einzigen zu den Gelenkachsen senkrechten Ebene liegen und die Schnittpunkte der Scharnierachsen mit dieser Ebene als Gelenkmittelpunkte aufgefaßt werden. Die Verbindungslinie der beiden Gelenkmittelpunkte eines inneren Gliedes möge wieder als die Längsachse dieses Gliedes bezeichnet sein; dieselbe soll bei jedem Gliede

durch den Schwerpunkt desselben hindurchgehen. Für die beiden Endglieder soll die von dem einen Gelenkmittelpunkte ausgehende und bis an das Ende O_1 bzw. O_n des Gliedes fortgeführte Längsachse ebenfalls den Schwerpunkt enthalten. Unter diesen Voraussetzungen bilden die n Glieder eine fortlaufende kinematische Kette, die aber offen ist, da die Endglieder nicht etwa miteinander direkt noch durch ein weiteres Gelenk verbunden sein sollen. Da die Gestalt der einzelnen Glieder für die folgenden Betrachtungen ohne Belang ist, so wird das Gelenksystem am einfachsten durch den gebrochenen Linienzug der n Längsachsen zur Darstellung gebracht, so wie es in Figur 18 auf Seite 102 für ein sechsgliedriges Gelenksystem geschehen ist. Die aufeinanderfolgenden Glieder sollen von einem Endgliede an fortlaufend numeriert werden, und die Richtung, in welcher diese Numerierung ausgeführt worden ist, möge innerhalb eines jeden Gliedes sowohl für die Längsachse desselben als auch für die einzelnen auf der Längsachse abgegrenzten Strecken die positive Richtung bezeichnen, und daher das Vorzeichen dieser Strecken bestimmen. Ist j die Nummer, welche einem Gliede zukommt, so sollen alle Strecken innerhalb dieses Gliedes, so wie auch alle anderen auf dasselbe sich beziehenden Größen, wie die Massen, Trägheitsmomente, Trägheitsradien usw., diese Nummer als Index tragen. Unter der Länge eines Gliedes werde bei den inneren Gliedern die Entfernung der beiden das Glied begrenzenden Gelenkmittelpunkte und bei den beiden äußeren Gliedern (Endgliedern) die Entfernung des einen Gelenkmittelpunktes vom äußersten Endpunkte der Längsachse verstanden; dieselbe sei mit l_j bezeichnet. Durch den Schwerwunkt S_j eines jeden Gliedes wird seine Länge l_j in zwei Teile zerlegt; derjenige Teil von l_j, auf welchen man bei Durchlaufung des Linienzuges der Längsachsen in positiver Richtung zuerst stößt, sei mit r_j, der andere mit s_j bezeichnet. Es gilt also für diese drei dem $j$ten Gliede angehörenden Strecken die Beziehung

(122) $$r_j + s_j = l_j.$$

Da der Schwerpunkt S_j des $j$ten Gliedes auf der Längsachse desselben liegen soll, so muß dies nach der Bedeutung der Hauptpunkte auch für den Hauptpunkt H_j desselben Gliedes der Fall sein. Es wird daher auch durch den Hauptpunkt die Länge eines Gliedes in zwei Strecken zerlegt, für welche schon früher die Bezeichnung Hauptstrecken des $j$ten Gliedes eingeführt worden ist. Dieselben seien mit c_j und d_j bezeichnet, wobei wiederum die erstere bei positiver Durchlaufung der Längsachsen zuerst angetroffen werden soll. Auch für die Hauptstrecken gilt die Beziehung

(123) $$c_j + d_j = l_j.$$

Bezeichnet man mit m_0 die Gesamtmasse des ganzen Gelenksystems, mit m_j die Masse des $j$ten Gliedes, so folgen unmittelbar

aus der Bedeutung der Hauptpunkte als Schwerpunkte der reduzierten Systeme zwischen den Hauptstrecken c_j und d_j einerseits und den Strecken l_j, r_j und s_j andererseits die Beziehungen

$$(124)\qquad \begin{aligned} m_0 c_j &= m_j r_j + (m_{j+1} + m_{j+2} + \cdots m_n) l_j \\ m_0 d_j &= m_j s_j + (m_1 + m_2 + \cdots m_{j-1}) l_j. \end{aligned}$$

Setzt man μ_j für das Verhältnis der Masse m_j des $j$ten Gliedes zu der Gesamtmasse m_0 des Gelenksystems, welches auch dem Verhältnis des Gewichtes G_j des $j$ten Gliedes zu dem Gesamtgewichte G_0 gleich ist, und bezeichnet die Summe einer Reihe dieser Verhältniszahlen μ, welche zu mehreren direkt aufeinanderfolgenden Gliedern gehören, einfach dadurch, daß man dem μ die beiden Indizes durch ein Komma voneinander getrennt beilegt, welche zum ersten und letzten Gliede der Summe gehören, so lassen sich die obigen Beziehungen auch kurz in der einfachen Form schreiben:

$$(125)\qquad \begin{aligned} c_j &= \mu_j r_j + \mu_{j+1,n} l_j \\ d_j &= \mu_j s_j + \mu_{1,j-1} l_j. \end{aligned}$$

Unter Verwendung dieser Formeln lassen sich die Hauptstrecken c_j und d_j für alle n Glieder ohne Mühe berechnen.

Als Beispiel für diese Berechnung möge ein bestimmtes sechsgliedriges Gelenksystem herangezogen werden, welches den gemachten Voraussetzungen entspricht. Die Längen l, die Schwerpunktsabstände r und s, und die Gewichte G der einzelnen Glieder mögen die in folgender Tabelle angegebenen Werte besitzen.

Nummer des Gliedes	Länge l des Gliedes in cm	Schwerpunktsabstände des Gliedes in cm		Gewicht des Gliedes in kg
	l	r	s	G
1	45,5	25,5	20	8,888
2	34	17,5	16,5	9,672
3	42,5	22	20,5	10,382
4	37	18	19	12,001
5	43	22,5	20,5	12,627
6	45	21	24	11,669

Für das Gesamtgewicht G_0 ergibt sich hieraus der Wert von 65,239 kg. Ferner berechnet man für die Verhältniszahlen μ und die in den Formeln auftretenden Summen derselben

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 0{,}1362 & & & & \\ \mu_2 &= 0{,}1483 & \mu_{1,2} &= 0{,}2845 & \mu_{2,6} &= 0{,}8638 \\ \mu_3 &= 0{,}1591 & \mu_{1,3} &= 0{,}4436 & \mu_{3,6} &= 0{,}7155 \\ \mu_4 &= 0{,}1840 & \mu_{1,4} &= 0{,}6276 & \mu_{4,6} &= 0{,}5564 \\ \mu_5 &= 0{,}1936 & \mu_{1,5} &= 0{,}8212 & \mu_{5,6} &= 0{,}3724. \\ \mu_6 &= 0{,}1788 & & & & \end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich endlich für die 6 Paare von Hauptstrecken die Größen:

$$c_1 = 42{,}78 \text{ cm} \qquad d_1 = 2{,}72 \text{ cm}$$
$$c_2 = 26{,}92 \text{ cm} \qquad d_2 = 7{,}08 \text{ cm}$$
$$c_3 = 27{,}15 \text{ cm} \qquad d_3 = 15{,}35 \text{ cm}$$
$$c_4 = 17{,}09 \text{ cm} \qquad d_4 = 19{,}91 \text{ cm}$$
$$c_5 = 12{,}04 \text{ cm} \qquad d_5 = 30{,}96 \text{ cm}$$
$$c_6 = 3{,}75 \text{ cm} \qquad d_6 = 41{,}25 \text{ cm}.$$

In Figur 18 findet sich der Streckenzug der Längsachsen dieses sechsgliedrigen Systems für eine beliebige Stellung desselben in $^1/_{10}$ natürlicher Größe mit den eingetragenen Schwerpunkten und Hauptpunkten aufgezeichnet.

Mit Hilfe der Hauptstrecken läßt sich nun auch beim n-gliedrigen ebenen Gelenksystem die Lage des Gesamtschwerpunktes S_0

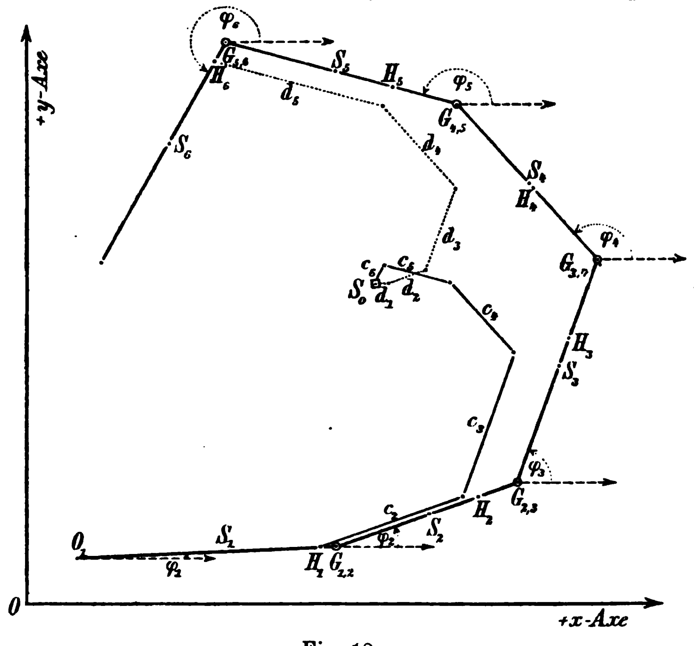


Fig. 18.

für jede Stellung der Längsachsen zueinander leicht finden. Man braucht nur beispielsweise von H_1 aus die Vektorsumme der zu den fünf übrigen Gliedern gehörenden Hauptstrecken c zu bilden, so wie es in Figur 18 ausgeführt ist. Anstatt von H_1 auszugehen, kann man auch irgend einen anderen Hauptpunkt zum Ausgangspunkte nehmen; nur muß man dann die Vektorsumme der fünf den übrigen Gliedern

angehörenden Hauptstrecken bilden, welche innerhalb des Gelenksystems dem Gliede, von dessen Hauptpunkte man ausgeht, am nächsten liegen und dabei die Hauptstrecken in einer von diesem Gliede abgewendeten Richtung nehmen. So hat man von H_3 aus die Vektorsumme $-\bar{d}_1 - \bar{d}_2 + \bar{c}_4 + \bar{c}_5 + \bar{c}_6$ zu bilden. Von H_6 aus muß man dagegen die fünf in negativer Richtung zu nehmenden, zum ersten bis fünften Glied gehörenden Hauptstrecken d geometrisch addieren; auch das letztere ist in Figur 18 ausgeführt worden.

Der Beweis dieses Satzes gründet sich wiederum auf den schon früher (vgl. (6) auf Seite 14) angeführten Lehrsatz, nach welchem der von einem beliebigen Punkte O aus nach dem Gesamtschwerpunkte S_0 gezogene Vektor gleich der Summe aller nach den Schwerpunkten S_j der n Glieder gezogenen Vektoren ist, nachdem man einen jeden der letzteren im Verhältnis μ_j der Masse m_j seines Gliedes zu der Gesamtmasse m_0 des Systems verkleinert hat. Für das n-gliedrige System lautet derselbe also

$$(126) \qquad \overline{OS_0} = \sum_1^n{}^j \mu_j \cdot \overline{OS_j},$$

wobei wiederum die Striche über den von O ausgehenden Strecken andeuten sollen, daß es sich um eine Vektorsumme handelt. Nimmt man als Ausgangspunkt den freien Endpunkt O_1 der Längsachse des ersten Gliedes und ersetzt jeden von O_1 nach einem Einzelschwerpunkte S_j gezogenen Vektor durch die zwischen O_1 und S_j sich erstreckende Vektorsumme auf dem Streckenzug der Längsachsen, so läßt sich in Rücksicht auf (125) nach dem früher für das ebene dreigliedrige Gelenksystem ausführlich auseinandergesetzten Beweis der obige Satz leicht einsehen. Man braucht zu diesem Zwecke nur alle Glieder der Vektorsumme auf der rechten Seite von (126) zusammenzufassen, welche sich auf Strecken mit gleichem Index beziehen.

Es ergibt sich zunächst

$$(127) \qquad \overline{O_1 S_0} = \sum_1^n{}^j \bar{c}_j.$$

Da der erste Vektor $\bar{c}_1$ der Summe auf der rechten Seite von O_1 nach dem Hauptpunkte H_1 führt, so folgt für den von H_1 nach S_0 gezogenen Vektor

$$(128) \qquad \overline{H_1 S_0} = \sum_2^n{}^j \bar{c}_j.$$

Auf ganz entsprechende Art wird man durch (126) zu der Konstruktion des Gesamtschwerpunktes S_0 von irgend einem anderen Hauptpunkte aus geführt. Wählt man zu diesem Zwecke als Aus-

gangspunkt O einen der beiden Gelenkmittelpunkte des Gliedes, dem der Hauptpunkt angehört, so erhält man bei geeigneter Zusammenfassung mit Hilfe von (125) zunächst eine Summe von Vektoren, von denen einer den Verbindungsvektor des betreffenden Gelenkmittelpunktes mit dem Hauptpunkte darstellt; läßt man diesen Vektor fort, so erhält man dann von dem Hauptpunkte selbst den oben angegebenen Vektorzug bis S_0. Natürlich kann man auch gleich diesen Hauptpunkt zum Ausgangspunkt in (126) wählen; dann verschwindet der zu seinem Gliede gehörende Vektor von vornherein.

Will man umgekehrt vom Gesamtschwerpunkte S_0 unter Verwendung der Hauptstrecken zu dem Einzelschwerpunkte eines beliebigen der n Glieder, etwa des $h$ten Gliedes, übergehen, so hat man nur den vom Hauptpunkte dieses Gliedes nach S_0 führenden Vektorzug vom Gesamtschwerpunkte aus in umgekehrter Richtung zu durchlaufen und zuletzt noch den Vektor hinzuzufügen, welcher vom Hauptpunkte des $h$ten Gliedes nach seinem Schwerpunkte S_h führt. Bezeichnet man allgemein mit f_{jh} diejenige Hauptstrecke des $j$ten Gliedes, welche vom Hauptpunkte desselben nach dem Mittelpunkte desjenigen am $j$ten Gliede befindlichen Gelenks geht, durch welches das $j$te Glied in unmittelbarer oder doch wenigstens mittelbarer Verbindung mit dem $h$ten Gliede steht, und versteht insbesondere unter f_{hh} den Vektor vom Hauptpunkte des $h$ten Gliedes nach dem Schwerpunkte desselben, so kann man diese Vektorsumme kurz in der Form schreiben

$$\overline{S_0 S_h} = \sum_1^n {}^j \overline{f_{jh}}. \qquad (129)$$

Für das durch Figur 18 dargestellte sechsgliedrige Gelenksystem haben die Hauptstrecken f_{jh} die aus der folgenden Tabelle zu ersehenden Werte, falls man allgemein unter e_h wieder den Abstand des $h$ten Hauptpunktes vom zugehörigen Schwerpunkte, unter c_h den Abstand des Hauptpunktes vom ersten Gelenkmittelpunkte und unter d_h den Abstand des zweiten Gelenkmittelpunktes vom Hauptpunkte des $h$ten Gliedes versteht, wobei infolge der Festsetzung über die positive Richtung der Längsachsen der erste Gelenkmittelpunkt den Anfang und der zweite Gelenkmittelpunkt das Ende der Längsachse des $h$ten Gliedes bilden soll.

h	f_{1h}	f_{2h}	f_{3h}	f_{4h}	f_{5h}	f_{6h}
1	$-e_1$	$-c_2$	$-c_3$	$-c_4$	$-c_5$	$-c_6$
2	$+d_1$	$-e_2$	$-c_3$	$-c_4$	$-c_5$	$-c_6$
3	$+d_1$	$+d_2$	$-e_3$	$-c_4$	$-c_5$	$-c_6$
4	$+d_1$	$+d_2$	$+d_3$	$-e_4$	$-c_5$	$-c_6$
5	$+d_1$	$+d_2$	$+d_3$	$+d_4$	$-e_5$	$-c_6$
6	$+d_1$	$+d_2$	$+d_3$	$+d_4$	$+d_5$	$-e_6$

Bei dieser Anordnung der Tabelle stehen die 6 Vektoren, welche den von S_0 nach S_h führenden Vektorzug zusammensetzen, in jedem Falle in der Tabelle horizontal nebeneinander.

Die vorstehenden Betrachtungen waren in keiner Weise davon abhängig, daß die 6 Glieder des Gelenksystems von Figur 18 durch Scharniergelenke untereinander verbunden sein sollten. Der gefundene Zusammenhang zwischen den Hauptpunkten und dem Gesamtschwerpunkte und alle daraus abgeleiteten Folgerungen werden daher ihre Gültigkeit behalten, wenn das der Betrachtung zugrunde gelegte sechsgliedrige Gelenksystem nicht mehr eben ist, und die Gelenke desselben mehrere Freiheitsgrade besitzen.

Es ist daher nur noch erforderlich nachzuweisen, daß die engen Beziehungen zwischen den Hauptpunkten und dem Gesamtschwerpunkte auch allgemein für räumliche Gelenksysteme gelten, welche den bisher gemachten vereinfachenden Voraussetzungen über die Zusammensetzung und Natur des Systems nicht entsprechen, bei denen also insbesondere an einem Glied mehr als zwei andere hängen, und durch ein Gelenk mehr als zwei Glieder miteinander in Verbindung stehen können.

Zur Fixierung der Ideen soll der Beweisführung das durch Figur 19 angedeutete sehr allgemeine räumliche Gelenksystem zugrunde gelegt werden. Man wird ohne weiteres einsehen, daß die an dasselbe anknüpfenden Betrachtungen sich in ganz entsprechender Weise auf jedes andere System anwenden lassen, und daß daher die Allgemeingültigkeit des Beweises nicht dadurch beeinträchtigt wird, daß derselbe an einem bestimmten System geführt wird. Das durch Figur 19 veranschaulichte Gelenksystem besteht aus nicht weniger als 20 Gliedern, welche in bestimmter Weise mit den Nummern 1 bis 20 versehen sind. Die zu einem Gliede gehörende Nummer soll auch dem Schwerpunkte und Hauptpunkte, sowie der Masse desselben als Index beigelegt werden, während jeder Gelenkmittelpunkt mehrere Indizes besitzt, nämlich die Nummern aller Glieder, die in dem betreffenden Gelenk miteinander zusammenhängen. Unter den 20 Gliedern befinden sich fünf, welche mit mehr als zwei anderen Gliedern gelenkig verbunden sind, nämlich 3, 4, 5, 9 und 15. Das räumliche Polygon, welches die an einem dieser fünf Glieder befindlichen Gelenkmittelpunkte verbindet, ist in Figur 19 gezeichnet und durch Schraffierung hervorgehoben worden, um eine Verwechselung mit einer geschlossenen kinematischen Kette zu vermeiden. Es kommt in dem System außerdem ein Gelenk vor, in welchem mehr als zwei Glieder zusammenstoßen; dasselbe verbindet die Glieder 3, 4 und 15. Demnach hängt das Glied 3 mit den vier Gliedern 1, 2, 4 und 15, das Glied 4 ebenfalls mit vier Gliedern, nämlich 3, 5, 9 und 15, ferner das Glied 5 mit den drei Gliedern 4, 6 und 7, das Glied 9 mit den vier Gliedern

4, 10, 11 und 14, und endlich das Glied 15 mit den sechs Gliedern 3, 4, 16, 17, 19 und 20 direkt durch ein Gelenk zusammen. Endlich gibt es in dem System nicht weniger als 11 sogenannte Endglieder, die nur ein einziges Gelenk besitzen, nämlich 1, 2, 6, 8, 10, 13, 14, 16, 18, 19 und 20; bei diesen ist der Gelenkmittelpunkt durch eine Gerade mit dem Schwerpunkte verbunden worden. Bei den dann noch übrig bleibenden vier Gliedern 7, 11, 12 und 17, welche nur zwei Gelenke tragen, sind die Mittelpunkte der letzteren durch eine Gerade

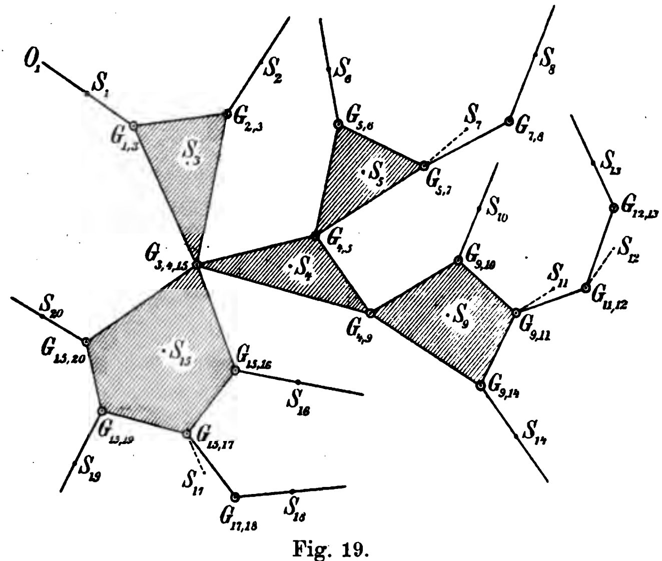


Fig. 19.

verbunden. Diese Gerade soll jedoch, um keine vereinfachenden Annahmen zu machen, nicht den Schwerpunkt des Gliedes enthalten; der letztere ist daher noch besonders durch eine unterbrochen gezeichnete Linie mit einem der beiden Gelenkmittelpunkte des Gliedes verbunden worden. Im übrigen finden sich in Figur 20 keine weiteren Umrisse der einzelnen Glieder eingezeichnet, um dieselbe dadurch nicht unklar zu machen. Die einzelnen Gelenke können 1, 2 oder 3 Freiheitsgrade besitzen, und die ganze Figur ist natürlich nicht in der Ebene der Zeichnung, sondern räumlich zu denken.

Für ein derartiges kompliziertes Gelenksystem gilt nun die Beziehung (126) ebenfalls. Nimmt man beispielsweise als Ausgangspunkt der nach dem Gesamtschwerpunkte S_0 einerseits und den Schwerpunkten S_j der einzelnen Glieder andererseits gezogenen Vektoren den freien Endpunkt O_1 der von $G_{1,3}$ nach dem Schwerpunkte S_1 gezogenen Geraden, so hat man also für die Ableitung der Vektorsumme auf der rechten Seite der Gleichung (126) die sämtlichen Schwerpunkte S_j mit diesem Punkte verbunden zu denken und einen

jeden Vektor mit dem Verhältnis μ_j der Masse m_j des $j$ten Gliedes zu der Gesamtmasse m_0 des ganzen Systems zu multiplizieren. Um zu dem in Frage stehenden Satz über den Zusammenhang der Hauptpunkte H_j zu gelangen, hat man dann nur noch nötig, jeden dieser Vektoren $\overline{O_1 S_j}$ durch eine Summe von Vektoren zu ersetzen, die man dadurch erhält, daß man von O_1 innerhalb des Systems nach S_j eine gebrochene Linie zieht, die über die Mittelpunkte aller zwischen dem ersten und $j$ten Glied eingeschalteten Gelenke hindurchgeht und nur an diesen Gelenkmittelpunkten Ecken besitzt. Setzt man dabei noch fest, daß dieser Vektorzug nur so viel Gelenkmittelpunkte passieren soll, als unbedingt nötig ist, so ist er damit vollkommen bestimmt.

Für die Verbindung des Punktes O_1 mit dem Schwerpunkte S_2 erhält man z. B. die Vektorsumme:

$$\overline{O_1 G_{1,3}} + \overline{G_{1,3} G_{2,3}} + \overline{G_{2,3} S_2},$$

für die Verbindung von O_1 mit S_5 die Vektorsumme:

$$\overline{O_1 G_{1,3}} + \overline{G_{1,3} G_{3,4,15}} + \overline{G_{3,4,15} G_{4,5}} + \overline{G_{4,5} S_5},$$

für die Verbindung von O_1 mit S_{12} die Vektorsumme:

$$\overline{O_1 G_{1,3}} + \overline{G_{1,3} G_{3,4,15}} + \overline{G_{3,4,15} G_{4,9}} + \overline{G_{4,9} G_{9,11}} + \overline{G_{9,11} G_{11,12}} + \overline{G_{11,12} S_{12}},$$

für die Verbindung von O_1 mit S_{18} die Vektorsumme:

$$\overline{O_1 G_{1,3}} + \overline{G_{1,3} G_{3,4,15}} + \overline{G_{3,4,15} G_{15,17}} + \overline{G_{15,17} G_{17,18}} + \overline{G_{17,18} S_{18}}$$

usf. Es würde zu weit führen, wollte man alle diese Vektorsummen hier niederschreiben. An der Hand der Figur 19 überzeugt man sich leicht, daß man stets zu einer ganz bestimmten Summe von Vektoren geführt wird, und daß dies auch bei jedem anderen Gelenksystem, mag es so kompliziert sein wie es wolle, immer nur auf eine einzige ganz bestimmte Art möglich ist, sofern nur die oben gemachte Voraussetzung erfüllt ist, daß das System keine geschlossenen kinematischen Ketten enthält.

Denkt man sich nun für das durch Figur 19 dargestellte Gelenksystem in der angegebenen Weise die sämtlichen von O_1 nach den zwanzig Einzelschwerpunkten S_j gehenden Vektorzüge ausgeführt, so kann man folgendes konstatieren.

Mit Ausnahme des von O_1 nach S_1 gehenden Vektors passieren alle Vektorzüge den Gelenkmittelpunkt $G_{1,3}$. Es haben also dieselben den Vektor $\overline{O_1 G_{1,3}}$ gemeinsam. Beachtet man nun, daß die einzelnen Teile des nach S_j gehenden Vektorzuges mit der Verhältniszahl μ_j zu multiplizieren sind, und faßt aus der ganzen Vektorsumme die innerhalb des Gliedes 1 liegenden Vektoren für sich zusammen, so erhält man die Vektorsumme

(130) $$\mu_1 \cdot \overline{O_1 S_1} + \mu_{2,20} \cdot \overline{O_1 G_{1,3}},$$

wobei nach der früheren Festsetzung für die fortlaufende Summe aller Verhältniszahlen μ vom zweiten bis zum zwanzigsten Gliede kurz $\mu_{2,20}$ gesetzt ist. Man kann auch sagen $\mu_{2,20}$ ist die Summe aller Zahlen μ, welche zu den Gliedern des Systems gehören, die vom ersten Gliede abfallen, sobald man das Gelenk $G_{1,3}$ durchtrennt; das sind aber im vorliegenden Fall die sämtlichen anderen Glieder.

Der Hauptpunkt H_1 des ersten Gliedes stellt den Schwerpunkt des ersten reduzierten Systems dar. Das letztere wird dadurch erhalten, daß man in $G_{1,3}$ die Massen der sämtlichen bei Durchtrennung von $G_{1,3}$ abfallenden Glieder konzentriert und dem ersten Gliede hinzugefügt denkt; das sind aber hier die Massen $m_2, m_3, m_4 \ldots m_{20}$. Nach dem allgemein gültigen Satze (126) erhält man daher für den Vektor $\overline{O_1 H_1}$, welcher den Ausgangspunkt O_1 mit dem Hauptpunkte H_1 des ersten Gliedes verbindet, gerade den Ausdruck (130).

Während innerhalb des ersten Gliedes von jedem nach einem Schwerpunkte S_j gehenden Vektorzug wenigstens ein Teil verläuft, enthält das zweite Glied aus der ganzen Summe nur den Vektor $\overline{G_{2,3} S_2}$; dieser ist mit der Zahl μ_2 zu multiplizieren, so daß man erhält

(131) $$\mu_2 \cdot \overline{G_{2,3} S_2}.$$

Dieses Produkt stellt aber gerade den von $G_{2,3}$ nach dem Hauptpunkte H_2 gezogenen Vektor $\overline{G_{2,3} H_2}$ dar, was man unmittelbar daraus erkennt, daß bei der Zusammensetzung des zweiten reduzierten Systems mit Ausnahme von m_2 die sämtlichen Massen der übrigen Glieder in $G_{2,3}$ selbst konzentriert anzunehmen sind.

Im dritten Gliede verlaufen dreierlei verschiedene Vektoren der ganzen Summe, nämlich die Vektoren $\overline{G_{1,3} G_{2,3}}$, $\overline{G_{1,3} S_3}$ und $\overline{G_{1,3} G_{3,4,15}}$; dieselben gehen also alle drei vom Gelenkmittelpunkte $G_{1,3}$ aus. Der Vektor $\overline{G_{1,3} G_{2,3}}$ kommt nur in dem von O_1 nach S_2 führenden, und der Vektor $\overline{G_{1,3} S_3}$ nur in dem von O_1 nach S_3 gehenden Vektorzuge vor; der erstere ist also allein mit μ_2, der letztere allein mit μ_3 zu multiplizieren. Der Vektor $\overline{G_{1,3} G_{3,4,15}}$ tritt dagegen als Bestandteil der sämtlichen nach dem vierten bis zum zwanzigsten Schwerpunkte führenden Vektorzüge auf; derselbe ist daher mit der Summe sämtlicher μ mit Ausnahme der drei ersten zu multiplizieren. Bezeichnet man diese letztere Summe wiederum kurz durch $\mu_{4,20}$, so erhält man aus der ganzen Vektorsumme für das dritte Glied den Bestandteil

(132) $$\mu_2 \cdot \overline{G_{1,3} G_{2,3}} + \mu_3 \cdot \overline{G_{1,3} S_3} + \mu_{4,20} \cdot \overline{G_{1,3} G_{3,4,15}}.$$

Beachtet man, daß beim dritten reduzierten System in $G_{1,3}$ die Masse m_1, in $G_{2,3}$ die Masse m_2 und in $G_{3,4,15}$ die Massen $m_4, m_5, m_6, \cdots m_{20}$ konzentriert zu denken sind, und daß der Schwerpunkt dieses Systems mit dem Hauptpunkte H_3 des dritten Gliedes identisch

ist, so erkennt man aus (126), daß (132) mit dem Vektor $\overline{G_{1,3}H_3}$ übereinstimmt.

So kann man Schritt für Schritt weitergehen und zeigen, daß der Teil der ganzen Vektorsumme, welcher nur Vektoren enthält, die zu einem bestimmten der zwanzig Glieder gehören, allemal die Bedeutung des von einem Gelenkmittelpunkte dieses Gliedes nach dem Hauptpunkte desselben gehenden Vektors besitzt. Welcher Gelenkmittelpunkt des betreffenden Gliedes, das die Nummer j tragen soll, dabei in Frage kommt, ist leicht zu erkennen. Es ist derjenige, welcher dem von O_1 nach dem Schwerpunkte S_j dieses Gliedes gehenden Vektorzuge angehört. Man kann von ihm sagen, daß er innerhalb des ganzen Gelenksystems dem ersten Gliede am nächsten liegt, oder mit anderen Worten, daß er im System die Verbindung des $j$ten Gliedes mit dem ersten herstellt; denn wenn man das betreffende Gelenk durchtrennt, so wird dadurch auch die Verbindung mit dem ersten Gliede unterbrochen, was bei Durchtrennung eines anderen Gelenkes des $j$ten Gliedes nicht der Fall sein würde.

Faßt man, um nur noch ein Beispiel anzuführen, alle Glieder der ganzen Vektorsumme zusammen, welche dem neunten Gliede angehören, so findet man viererlei verschiedene Vektoren, nämlich $\overline{G_{4,9}S_9}$, $\overline{G_{4,9}G_{9,10}}$, $\overline{G_{4,9}G_{9,11}}$ und $\overline{G_{4,9}G_{9,14}}$. Wie man sieht, gehen dieselben alle vom Gelenkmittelpunkte $G_{4,9}$ aus; dieser gehört aber gerade zu demjenigen Gelenk, welches im System die Verbindung des neunten Gliedes mit dem ersten herstellt. Der Vektor $\overline{G_{4,9}S_9}$ kommt allein in dem von O_1 nach S_9 führenden Vektorzuge vor, er ist also nur mit μ_9 zu multiplizieren. Der Vektor $\overline{G_{4,9}G_{9,10}}$ gehört nur dem von O_1 nach S_{10}, und der Vektor $\overline{G_{4,9}G_{9,14}}$ nur dem von O_1 nach S_{14} führenden Vektorzuge an; der erstere ist daher mit μ_{10}, der letztere mit μ_{14} zu multiplizieren. Dagegen ist der Vektor $\overline{G_{4,9}G_{9,11}}$ gemeinsamer Bestandteil der nach S_{11}, S_{12} und S_{13} führenden Vektorzüge und ist daher mit der Summe $\mu_{11} + \mu_{12} + \mu_{13}$ zu multiplizieren, für welche kurz $\mu_{11,13}$ geschrieben werden soll. Demnach gehört zu dem neunten Gliede die Vektorsumme

$$(133) \quad \mu_9 \cdot \overline{G_{4,9}S_9} + \mu_{10} \cdot \overline{G_{4,9}G_{9,10}} + \mu_{11,13} \cdot \overline{G_{4,9}G_{9,11}} + \mu_{14} \cdot \overline{G_{4,9}G_{9,14}}.$$

Beim neunten reduzierten System sind in $G_{4,9}$ die Massen aller Glieder angebracht, welche nach Durchtrennung dieses Gelenks von dem neunten Gliede abfallen würden. Da der Vektor nach dem Hauptpunkte des neunten Gliedes von eben diesem Gelenkmittelpunkte ausgeht, so ist es nicht nötig, diese Massen besonders aufzuführen. Außerdem findet sich in $G_{9,10}$ die Masse m_{10}, in $G_{9,11}$ die Massensumme $m_{11} + m_{12} + m_{13}$ und in $G_{9,14}$ die Masse m_{14} konzentriert. Der nach dem Schwerpunkte H_9 des neunten reduzierten Systems von $G_{4,9}$ ausgezogene Vektor besitzt daher nach (126) gerade den Wert (133).

Bezeichnet man die von den Gelenkmittelpunkten eines Gliedes nach seinem Hauptpunkte gezogenen Vektoren wieder als Hauptstrecken dieses Gliedes, wobei also dieselben beim allgemeinen räumlichen Gelenksystem, sofern nichts anderes ausdrücklich angegeben ist, stets in der Richtung vom Gelenkmittelpunkte nach dem Hauptpunkte verstanden sein sollen, und sagt von einer Hauptstrecke, daß sie innerhalb des Gelenksystems einem anderen Gliede am nächsten liegt, wenn sie gerade von dem Gelenk ausgeht, welches im System die unmittelbare oder mittelbare Verbindung der beiden Glieder herstellt, so kann man die auf der rechten Seite von (126) stehende Vektorsumme im vorliegenden Falle ersetzen durch die Vektorsumme von $\overline{O_1 H_1}$ und den sämtlichen zu den neunzehn übrigen Gliedern gehörenden Hauptstrecken, welche innerhalb des Systems dem ersten Gliede am nächsten liegen. Nimmt man als Ausgangspunkt nicht O_1, sondern den Hauptpunkt H_1 des ersten Gliedes, so verschwindet der erste Vektor, und man hat von H_1 aus nur noch die Vektorsumme der neunzehn Hauptstrecken zu bilden, um zu dem Gesamtschwerpunkte S_0 des ganzen Systems zu gelangen.

Daß man zu ganz entsprechenden Ergebnissen kommen muß, wenn man nicht von O_1, sondern vom freien Endpunkte eines der übrigen Endglieder ausgeht, ist ohne weiteres klar; es kommen dann nur in den einzelnen Gliedern Hauptstrecken in Frage, die im allgemeinen an anderen Gelenkmittelpunkten beginnen, nämlich immer an denen, welche innerhalb des Systems dem Ausgangsgliede am nächsten liegen. Es erübrigt daher nur noch zu untersuchen, wie sich die Verhältnisse stellen, wenn man von einem im Inneren des Systems befindlichen Gliede ausgeht und als Anfangspunkt der einzelnen Vektoren in (126) etwa einen an diesem Gliede befindlichen Gelenkmittelpunkt nimmt.

Setzt man zum Beispiel in (126) für O den Gelenkmittelpunkt $G_{4,9}$ und bildet von diesem aus sowohl den geradlinigen Vektor nach dem Gesamtschwerpunkte S_0, als auch die innerhalb des Systems über die zwischenliegenden Gelenkmittelpunkte führenden Vektorzüge nach den Einzelschwerpunkten S_j, so wird man bei geeigneter Gruppierung der Glieder auf der rechten Seite von (126) ebenfalls zu einer einfachen Konstruktion des Gesamtschwerpunktes mit Hilfe der Hauptstrecken geführt. Denn es läßt sich nach den bisherigen Auseinandersetzungen leicht einsehen, daß die aus der ganzen Vektorsumme herausgegriffenen Glieder, welche nur Vektoren mit dem gleichen Index enthalten, zusammen eine Hauptstrecke des Gliedes von diesem Index ergeben, und zwar diejenige Hauptstrecke, welche innerhalb des Systems dem Ausgangspunkte $G_{4,9}$ am nächsten liegt. Es kommt dabei auf dasselbe hinaus, ob man den Gelenkmittelpunkt $G_{4,9}$ dem vierten oder dem neunten Gliede zurechnet. Vergleicht

man den vorliegenden Fall mit dem zuerst betrachteten, bei welchem der Punkt O_1 des ersten Gliedes den Ausgangspunkt für alle Vektorzüge bildete, so erkennt man, daß jetzt nur bei den Gliedern 1, 3 und 4 andere Hauptstrecken auftreten, während man bei den übrigen Gliedern ohne Ausnahme zu den früheren Hauptstrecken geführt wird. An diesen drei Gliedern kommen jetzt in Frage bezüglich die Hauptstrecken $\overline{G_{1,3}H_1}$, $\overline{G_{3,4,15}H_3}$ und $\overline{G_{4,9}H_4}$, während sich z. B. beim neunten Gliede wie im ersten Falle die Hauptstrecke $\overline{G_{4,9}H_9}$ einstellt. Geht man nicht von $G_{4,9}$ aus, sondern vom Hauptpunkte H_4, so verschwindet die Hauptstrecke $\overline{G_{4,9}H_4}$, während die übrigen Hauptstrecken sich nicht ändern; man hat daher von H_4 nur die Summe der letzteren Hauptstrecken, welche zu den übrigen neunzehn Gliedern gehören, zu bilden, um zu dem Gesamtschwerpunkte S_0 zu gelangen. Wählt man dagegen H_9 als Ausgangspunkt, so verschwindet $\overline{G_{4,9}H_9}$, und es bleibt wiederum nur noch die Summe der neunzehn Hauptstrecken übrig, welche zu den sämtlichen anderen Gliedern gehören und innerhalb des Systems dem neunten Gliede am nächsten liegen. Das Prinzip der Konstruktion des Gesamtschwerpunktes bleibt also genau dasselbe, wenn man von dem Hauptpunkte eines inneren Gliedes, als wenn man von dem Hauptpunkte eines Endgliedes ausgeht. Es gilt daher ganz allgemein der

Satz: Bei jedem beliebigen räumlichen Gelenksystem wird man stets zu dem Gesamtschwerpunkte geführt, wenn man vom Hauptpunkte irgend eines der n Glieder aus die Vektorsumme der $n-1$ zu den übrigen Gliedern gehörenden Hauptstrecken bildet, welche innerhalb des Systems dem Gliede, von dessen Hauptpunkt man ausgeht, am nächsten liegen; dabei ist jede Hauptstrecke in der von dem betreffenden Gliede abgewendeten Richtung zu nehmen.

b) *Zusammenhang zwischen den Hauptpunkten und den Schwerpunkten der Teilsysteme.*

Es ist zweckmäßig, sich auch die Beziehungen zwischen den Hauptpunkten der Glieder und den Hauptpunkten und Schwerpunkten der Teilsysteme zunächst am ebenen n-gliedrigen Gelenksystem klar zu legen. Die Verallgemeinerung auf das allgemeine räumliche Gelenksystem ist dann leicht zu verstehen. Es mag der Betrachtung wieder das durch Figur 18 veranschaulichte ebene sechsgliedrige Gelenksystem zugrunde gelegt werden. In Figur 20 ist dasselbe in der früheren Weise noch einmal mit dem von H_1 nach dem Gesamtschwerpunkte S_0 führenden Vektorzuge aufgezeichnet worden Die Eckpunkte dieses Vektorzuges, welche hier mit $H_{1,2}$, $H_{1,3}$, $H_{1,4}$ und $H_{1,5}$ bezeichnet sind, haben eine ganz bestimmte Bedeutung für verschiedene aus dem ganzen Gelenksystem abzusondernde Teilsysteme, welche nach

den früheren Auseinandersetzungen über das dreigliedrige Gelenksystem leicht zu erkennen ist.

So stellt $H_{1,2}$ den Hauptpunkt des aus dem ersten und zweiten Gliede bestehenden Systems dar. Derselbe hat nur so lange eine feste Lage in diesem zweigliedrigen Teilsystem, als die beiden Glieder zueinander fest gestellt sind, so daß sie sich wie ein einziger starrer Körper verhalten; bei Beweglichkeit des Gelenks $G_{1,2}$ stellt $H_{1,2}$ da-

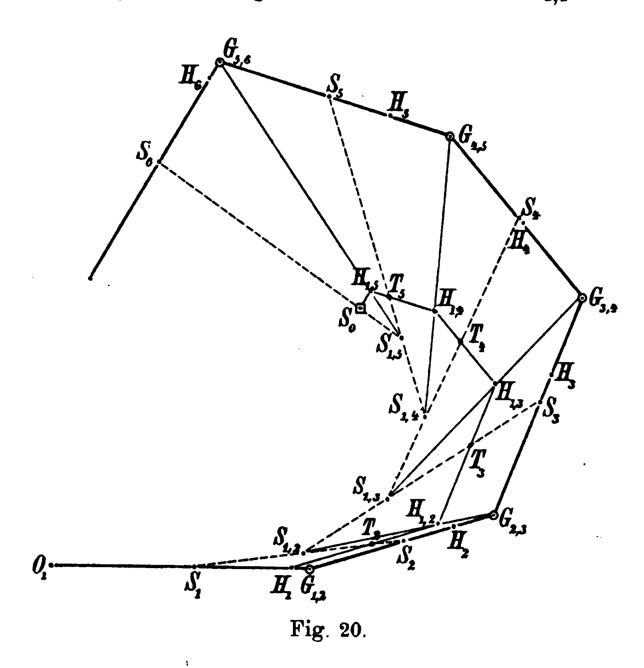


Fig. 20.

gegen einen gegen beide Glieder veränderlichen Punkt dar. Daß derselbe als Hauptpunkt des Gelenksystems der zwei ersten Glieder aufgefaßt werden muß, geht unmittelbar aus seiner Beziehung zum Gesamtschwerpunkte S_0 hervor. Denn man gelangt zu S_0, indem man von $H_{1,2}$ aus die Vektorsumme der zu den vier übrigen Gliedern gehörenden Hauptstrecken bildet, welche innerhalb des Systems dem ersten und zweiten Gliede am nächsten liegen. Daraus ergibt sich aber rückwärts, daß er der Schwerpunkt des aus den beiden ersten Gliedern zusammengesetzten reduzierten Systems ist, d. h. des Massensystems, welches man erhält, indem man in $G_{2,3}$ die Massen m_3, m_4, m_5 und m_6 konzentriert und dem zweiten Gliede, und damit dem aus dem ersten und zweiten Gliede bestehenden Gelenksystem hinzugefügt denkt. Um $H_{1,2}$ zu finden, hätte man also $G_{2,3}$ mit dem Schwerpunkte $S_{1,2}$ des aus den beiden ersten Gliedern bestehenden Gelenksystems zu verbinden und diese Verbindungslinie im Verhältnis

$$(m_1 + m_2) : (m_3 + m_4 + m_5 + m_6)$$

zu teilen. Hieraus geht aber hervor, daß $S_{1,2}$ auf der Verlängerung der Strecke $G_{2,3} H_{1,2}$ liegt, und zwar so, daß

$$(134) \qquad G_{2,3} S_{1,2} = \frac{1}{\mu_{1,2}} \cdot G_{2,3} H_{1,2}.$$

Wie $H_{1,2}$ als veränderlicher Hauptpunkt des aus dem ersten und zweiten Gliede bestehenden Gelenksystems aufzufassen ist, so hat $H_{1,3}$ die Bedeutung des natürlich ebenfalls veränderlichen Hauptpunktes des Systems der drei ersten Glieder. Weiterhin stellen $H_{1,4}$ und $H_{1,5}$ die veränderlichen Hauptpunkte der Teilsysteme dar, welche sich aus den vier ersten und aus den fünf ersten Gliedern zusammensetzen. Davon kann man sich ohne alle Rechnung überzeugen, wenn man von dem Gesamtschwerpunkte S_0 aus rückwärts zu den Hauptpunkten übergeht. Da man von H_1 zu S_0 gelangt, indem man von H_1 die Vektorsumme $\sum_2^6 \bar{c}_j$ bildet, so wird man rückwärts zu H_1 geführt, wenn man von S_0 aus diese fünf Hauptstrecken in entgegengesetzter Richtung aneinander setzt, also die Vektorsumme $-\sum_6^2 \bar{c}_j$ bildet. Wenn man nun einige aufeinanderfolgende Glieder zu einem System vereinigt denkt, so wird hierdurch die Lage der Hauptpunkte und die Größe der Hauptstrecken bei den übrigen Gliedern in keiner Weise geändert. Das folgt ohne weiteres aus der Zusammensetzung der reduzierten Systeme, welche zu diesen letzteren Gliedern gehören. Nimmt man also z. B. die drei ersten Glieder zu einem System zusammen, so muß man zu dem Hauptpunkte desselben gelangen, wenn man von S_0 aus die in entgegengesetzter Richtung zunehmenden Hauptstrecken c_6, c_5 und c_4 nacheinander abträgt; derselbe fällt also, wie man aus den Figuren 20 und 18 erkennt, mit $H_{1,3}$ zusammen. Faßt man die vier ersten Glieder oder die fünf ersten Glieder für sich zu einem System zusammen, so hat man von S_0 aus entweder die Vektorsumme $-(\bar{c}_6 + \bar{c}_5)$ oder nur den Vektor $-\bar{c}_6$ abzutragen. Man kommt dann auf $H_{1,4}$ oder $H_{1,5}$, so daß also diese Punkte in der Tat die veränderlichen Hauptpunkte dieser beiden Systeme darstellen. Würde man schließlich alle sechs Glieder des Systems zusammennehmen, so käme man auf diese Weise zu dem Resultat, daß der Gesamtschwerpunkt S_0 mit dem Hauptpunkte des ganzen Gelenksystems identisch ist. Das stimmt aber vollständig mit der Bedeutung der Hauptpunkte als Schwerpunkte der reduzierten Systeme überein; denn das zu dem System der sechs Glieder gehörende reduzierte System ist von dem ganzen Gelenksystem nicht verschieden.

Da das zu dem Teilsystem der drei ersten Glieder gehörende re-

duzierte System dadurch erhalten wird, daß man in $G_{3,4}$ die Massensumme $m_4 + m_5 + m_6$ konzentriert denkt, so muß der Schwerpunkt $S_{1,3}$ dieses Teilsystems auf der Verlängerung von $G_{3,4}H_{1,3}$ liegen, und zwar so, daß

$$G_{3,4}S_{1,3} = \frac{1}{\mu_{1,3}} \cdot G_{3,4}H_{1,3}. \tag{135}$$

Bei der Zusammensetzung des zu dem Teilsystem der vier ersten Glieder gehörenden reduzierten Systems hat man in $G_{4,5}$ die Massen m_5 und m_6 zu konzentrieren und dem Gelenksystem der vier ersten Glieder hinzuzufügen. Deshalb liegt $H_{1,4}$ auf der Verbindungslinie von $G_{4,5}$ und $S_{1,4}$ so, daß

$$G_{4,5}S_{1,4} = \frac{1}{\mu_{1,4}} \cdot G_{4,5}H_{1,4}. \tag{136}$$

Schließlich erkennt man auch, daß $G_{5,6}$, $H_{1,5}$ und $S_{1,5}$ in gerader Linie liegen müssen, und daß

$$G_{5,6}S_{1,5} = \frac{1}{\mu_{1,5}} \cdot G_{5,6}H_{1,5}. \tag{137}$$

Hieraus ergibt sich also ein sehr einfaches Mittel, von dem Hauptpunkte eines aus mehreren aufeinanderfolgenden Gliedern bestehenden Teilsystems zu dem Schwerpunkte des letzteren zu gelangen. Die Lage des betreffenden Systemhauptpunktes, welche sich mit den Gelenkstellungen ändert, ist aber leicht mit Hilfe der Hauptstrecken abzuleiten, wie man aus Figur 20 erkennt. Man braucht zu diesem Zwecke nur von dem Hauptpunkte eines Gliedes dieses Teilsystems aus die Vektorsumme der zu den übrigen Gliedern desselben gehörenden Hauptstrecken zu bilden, welche innerhalb des Teilsystems dem Gliede, von dessen Hauptpunkt man ausgeht, am nächsten liegen. Die Hauptpunkte der Teilsysteme hängen also auf genau dieselbe Weise mit den Hauptpunkten ihrer Glieder zusammen, wie der Gesamtschwerpunkt mit den Hauptpunkten der sämtlichen Glieder. Der Schwerpunkt des ganzen Gelenksystems stellt daher gewissermaßen nur einen Spezialfall eines Systemhauptpunktes dar. Es ist infolgedessen kein Wunder, wenn die Hauptpunkte der einzelnen Glieder und die Systemhauptpunkte in der Kinetik der Gelenksysteme eine gleich wichtige Rolle spielen, wie der Schwerpunkt in der Kinetik eines einzigen starren Körpers.

Außer zu den Systemhauptpunkten stehen die Schwerpunkte der Teilsysteme auch noch in enger Beziehung zu bestimmten Punkten auf den Hauptstrecken c_j, welche den in Figur 20 angegebenen Vektorzug von H_1 nach S_0 zusammensetzen. Verbindet man S_1 mit $S_{1,2}$, so geht die Verlängerung dieser Verbindungslinie natürlich durch S_2. Gleichzeitig schneidet dieselbe aber die von H_1 ausgehende Haupt-

strecke $\overline{H_1 H_{1,2}}$ in einem Punkte T_2, dessen Lage auf dieser Hauptstrecke von den Gelenkstellungen ganz unabhängig ist; derselbe teilt daher die Hauptstrecke in einem bestimmten Verhältnis. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $S_1 H_1 T_2$ und $S_1 G_{1,2} S_2$ in Figur 20 und der Bedeutung von H_1 als Schwerpunkt des ersten reduzierten Systems folgt unmittelbar, daß

(138) $$H_1 T_2 = \mu_{2,6} r_2 .$$

Ferner ergibt sich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $S_{1,2} H_{1,2} T_2$ und $S_{1,2} G_{2,3} S_2$ in Rücksicht auf die oben angeführte Beziehung zwischen $S_{1,2}$ und $H_{1,2}$

(139) $$T_2 H_{1,2} = \mu_{3,6} s_2 .$$

Die Länge der Hauptstrecke $\bar{c}_2$ läßt sich daher darstellen durch die Summe

(140) $$c_2 = \mu_{2,6} r_2 + \mu_{3,6} s_2 .$$

Zu dem gleichen Resultat würde man auch aus der ersten Gleichung von (124) gelangen, wenn man für j den Wert 2 und nach (122) für l_2 die Summe $r_2 + s_2$ einsetzte.

Verbindet man weiterhin $S_{1,2}$ mit $S_{1,3}$, so schneidet die Verlängerung dieser Verbindungslinie, welche schließlich durch S_3 hindurchgeht, die Hauptstrecke $\overline{H_{1,2} H_{1,3}}$ in einem festen Punkte T_3 (vgl. Fig. 20), welcher deren Länge c_3 in die beiden Bestandteile $\mu_{3,6} r_3$ und $\mu_{4,6} s_3$ zerlegt, so daß man hat

(141) $$c_3 = \mu_{3,6} r_3 + \mu_{4,6} s_3 .$$

Ebenso erkennt man leicht aus Figur 20, daß die Verlängerung von $\overline{S_{1,3} S_{1,4}}$ die Hauptstrecke $\overline{H_{1,3} H_{1,4}}$ in einem bestimmten Punkte T_4, und die Verlängerung von $\overline{S_{1,4} S_{1,5}}$ die Hauptstrecke $\overline{H_{1,4} H_{1,5}}$ in einem festen Punkte T_5 trifft. Durch diese beiden Punkte werden die Längen c_4 und c_5 dieser beiden Hauptstrecken in je zwei Bestandteile zerlegt, sowie es durch die beiden Formeln

(142) $$\begin{aligned} c_4 &= \mu_{4,6} r_4 + \mu_{5,6} s_4 \\ c_5 &= \mu_{5,6} r_5 + \mu_6 s_5 \end{aligned}$$

angegeben ist.

Die Kenntnis der Teilpunkte T_j ist unter Umständen von Wert, wenn man auf einfache Weise zu den Schwerpunkten der Teilsysteme gelangen will. So ergibt sich $S_{1,2}$ als Schnittpunkt der Verbindungslinien $\overline{S_2 T_2}$ und $\overline{S_3 T_3}$, ferner $S_{1,3}$ als Schnittpunkt von $\overline{S_3 T_3}$ und $\overline{S_4 T_4}$ usw. Der Vorteil dieser Konstruktion der Schwerpunkte $S_{1,2}$, $S_{1,3}$ usw. liegt darin, daß man nicht erst genötigt ist, eine Strecke in bestimmtem Verhältnis zu vergrößern. Zur Kontrolle der Genauigkeit, kann man natürlich auch noch die Verbindungslinien $\overline{G_{2,3} H_{1,2}}$,

$\overline{G_{3,4}H_{1,3}}$ usw. ziehen, da man sowieso die Systemhauptpunkte aufsuchen muß, wenn man die Teilpunkte T_j verwenden will.

Handelt es sich um die Schwerpunkte der aus dem 6. und 5. Gliede, oder aus dem 6., 5. und 4. Gliede usw. zusammengesetzten Teilsysteme, so geht man zweckmäßigerweise von dem in H_6 beginnenden Zug der Vektoren $-\bar{d}_j$ aus (vgl. Fig. 18) und findet auf diesen Teilpunkte, welche in ganz entsprechendem Sinne zu verstehen und zu verwenden sind wie die Teilpunkte T_j.

Da bei der Ableitung des geschilderten Zusammenhanges zwischen den Hauptpunkten und Schwerpunkten der aus dem ganzen Gelenksystem herausgegriffenen Teilsysteme wiederum in keiner Weise darauf Rücksicht genommen wurde, daß die einzelnen Glieder durch Scharniergelenke mit parallelen Achsen verbunden sein sollten, so wird derselbe noch bestehen bleiben, wenn man die Gelenke als solche von zwei und drei Freiheitsgraden mit festem Gelenkmittelpunkte auffaßt, und somit von dem ebenen n-gliedrigen Gelenksystem zu einem räumlichen von entsprechender Zusammensetzung übergeht. Es ist daher nur noch nötig, zu zeigen, daß eine ganz gleiche Beziehung zwischen den Hauptpunkten und den Schwerpunkten der Teilsysteme eines jeden beliebigen räumlichen Gelenksystems bestehen muß.

Um diesen Nachweis zu führen, soll wieder auf das sehr allgemeine durch Figur 19 veranschaulichte System zurückgegriffen werden. Da die Anzahl der Teilsysteme, welche man hier aus dem ganzen System absondern kann, infolge der großen Anzahl der Glieder und der Mannigfaltigkeit der Gelenkverbindungen ungeheuer groß ist, so wird es genügen, den angedeuteten Zusammenhang zwischen Hauptpunkten und Schwerpunkten an einem einzigen möglichst vielgliedrigen Teilsystem festzustellen. Es soll zu diesem Zwecke das größere der beiden Systeme in Betracht gezogen werden, in welche das ganze Gelenksystem zerfällt, wenn man die Gelenkverbindung $G_{4,9}$ durchtrennt. Dasselbe setzt sich aus den Gliedern 1 bis 8 und 15 bis 20 zusammen. Denkt man sich dieses Teilsystem bei irgend einer Stellung seiner einzelnen Glieder zueinander für einen Augenblick als starr, so verhält sich dasselbe wie ein einziges Glied des ganzen Gelenksystems; außer demselben sind dann nur noch die sechs Glieder 9 bis 14 vorhanden, von denen das Glied 9 mit dem als erstes Glied aufzufassenden Teilsystem durch das Gelenk $G_{4,9}$ zusammenhängt. Zur Konstruktion des Gesamtschwerpunktes S_0 des ganzen Gelenksystems hat man in diesem Falle nur sieben Hauptpunkte nötig, nämlich den Hauptpunkt H_t des genannten Teilsystems und die sechs Hauptpunkte H_9, H_{10}, H_{11}, H_{12}, H_{13} und H_{14} der Glieder 9 bis 14; die letzteren haben innerhalb der sechs Glieder genau dieselbe Lage wie in dem Falle freier Beweglichkeit der sämtlichen zwanzig Glieder des Systems; denn die aus diesen sechs Gliedern hervorgehenden sechs reduzierten

Systeme sind ganz davon unabhängig, ob das Teilsystem starr ist oder selbst ein Gelenksystem darstellt. Zur Konstruktion von S_0 hat man daher von H_t aus die Vektorsumme der zu den Gliedern 9 bis 14 gehörenden Hauptstrecken zu bilden, welche innerhalb des Gelenksystems dem Gelenk $G_{4,9}$ am nächsten liegen, und zwar in einer von diesem Gelenk abgekehrten Richtung. Trägt man rückwärts vom Gesamtschwerpunkte S_0 aus diese sechs Hauptstrecken in umgekehrter Richtung nacheinander ab, so muß man infolgedessen zum Hauptpunkte H_t des Teilsystems gelangen, gleichgültig wie die Glieder desselben zueinander gestellt sind.

Andererseits gelangt man aber auch zu dem Hauptpunkte H_t, wenn man von dem Hauptpunkte irgend eines Gliedes des Teilsystems ausgeht und die Vektorsumme aller zu den übrigen Gliedern des Teilsystems gehörenden Hauptstrecken bildet, welche innerhalb des Teilsystems dem betreffenden Gliede am nächsten liegen, und zwar wiederum in einer von diesem Gliede abgewendeten Richtung. Dies geht unmittelbar daraus hervor, daß H_t einen Eckpunkt des ganzen Vektorzuges darstellt, den man zur Konstruktion des Gesamtschwerpunktes vom Hauptpunkte irgend eines Gliedes des Teilsystems aus in der Weise bildet, daß die zu den Gliedern 9 bis 14 gehörenden Hauptstrecken zuletzt kommen.

Der Hauptpunkt H_t hat nun die Bedeutung des Schwerpunktes des reduzierten Systems, welches aus dem betreffenden Teilsystem hervorgeht. Zur Bildung des letzteren hat man nur in $G_{4,9}$ die Massen der sechs Glieder 9 bis 14 konzentriert und dem System hinzugefügt zu denken. Daher muß H_t auf der Verbindungslinie des Gelenkmittelpunktes $G_{4,9}$ mit dem Schwerpunkte S_t des Teilsystems liegen und dieselbe im umgekehrten Verhältnis der Summe der sechs Massen m_9 bis m_{14} und der Masse des Teilsystems teilen. Bezeichnet man die erstere kurz mit $m_{9,14}$ und die letztere mit m_t, so hat man also

$$(143) \qquad G_{4,9}H_t : H_tS_t = m_t : m_{9,14}.$$

Beachtet man, daß $m_t + m_{9,14}$ der Gesamtmasse m_0 des ganzen Gelenksystems gleich ist, und bezeichnet mit μ_t kurz das Verhältnis $m_t : m_0$, so erkennt man leicht, daß aus (143) hervorgeht

$$(144) \qquad G_{4,9}S_t = \frac{1}{\mu_t} \cdot G_{4,9}H_t.$$

Diese Beziehung stellt sich direkt als Verallgemeinerung der für das oben in Betracht gezogene ebene Gelenksystem geltenden Beziehungen (134) bis (137) dar. Man hat daher die ganz allgemein gültigen Sätze:

Satz: Denkt man sich bei einem beliebigen ebenen oder räumlichen Gelenksystem alle Glieder zu einem Teilsystem

zusammengefaßt, welche beim Durchtrennen eines Gelenks vom ganzen System abfallen würden, so erhält man den in seiner Lage veränderlichen Hauptpunkt dieses Teilsystems, indem man von dem Hauptpunkte eines Gliedes des Teilsystems aus die Vektorsumme der zu den übrigen Gliedern des Teilsystems gehörenden Hauptstrecken bildet, welche innerhalb des Systems dem Gliede, von dessen Hauptpunkte man ausgeht, am nächsten liegen, und zwar in einer von diesem Gliede abgewendeten Richtung.

Den Zusammenhang zwischen dem Hauptpunkte und dem Schwerpunkte eines Teilsystems ergibt der folgende

Satz: Der Schwerpunkt eines solchen im vorigen Satze näher bezeichneten Teilsystems liegt stets auf der Verlängerung des Vektors, welcher den Mittelpunkt des Trennungsgelenks mit dem Hauptpunkte des Teilsystems verbindet. Sein Abstand vom Mittelpunkte des Trennungsgelenks verhält sich zum Abstand des Hauptpunktes von demselben Gelenkmittelpunkte wie die Masse des ganzen Gelenksystems zur Masse des Teilsystems.

c) *Beziehungen der Hauptpunkte zu den Verrückungen des allgemeinen räumlichen Gelenksystems.*

Wie beim ebenen dreigliedrigen System, so gilt auch für das allgemeine räumliche Gelenksystem, daß die Hauptpunkte in naher Beziehung zu bestimmten Verrückungen des ganzen Systems relativ zum Gesamtschwerpunkte stehen. Erteilt man nämlich irgend einem Gelenksystem eine Verrückung, bei welcher nur ein Glied durch Drehen seine Orientierung im Raume ändert, während alle anderen Glieder reine Translationsbewegungen ausführen, und verlangt, daß dabei der Gesamtschwerpunkt an seiner Stelle bleibt, so muß die Drehung des betreffenden Gliedes um eine Achse durch seinen Hauptpunkt stattfinden. Die Drehung dieses Gliedes braucht durchaus nicht unendlich klein zu sein; auch bei beliebig ausgedehnter Drehung um Achsen durch den Hauptpunkt eines Gliedes mit gleichzeitiger Translation aller anderen Glieder behält der Gesamtschwerpunkt seinen Ort im Raume bei.

Auf Grund des unter 9a) geschilderten Zusammenhanges zwischen den Hauptpunkten und dem Gesamtschwerpunkte ist diese Tatsache unmittelbar einzusehen. Erteilt man beispielsweise dem durch Fig. 18 dargestellten Gelenksystem eine Drehung um eine Achse durch den Hauptpunkt H_1 des ersten Gliedes und läßt für die anderen Glieder, welche dabei natürlich nicht in Ruhe bleiben können, nur Translationsbewegung zu, so werden mit Ausnahme der Längsachse des ersten Gliedes alle Längsachsen ihre Richtung im Raume beibehalten und nur Parallelverschiebungen erfahren. Daraus folgt aber ohne weiteres,

daß der vom festbleibenden Punkte H_1 aus nach dem Gesamtschwerpunkte S_0 führende Vektorzug der Hauptstrecken c_2 bis c_6 bei der Bewegung vollkommen ungeändert, und daher der Endpunkt S_0 desselben an seiner Stelle bleibt. Das gilt sowohl, wenn das Gelenksystem eben ist, als wenn die Gelenke mehrere Freiheitsgrade besitzen. Im ersten Falle kann natürlich die Drehung des ersten Gliedes nur um eine zu den Scharnierachsen parallele Achse durch H_1 stattfinden. Beim räumlichen Gelenksystem kann dagegen die durch H_1 gehende Drehungsachse ganz beliebige Richtung besitzen. Voraussetzung ist dabei nur, daß die übrigen Glieder tatsächlich die Drehung des einen mit Translationsbewegung begleiten können. Das ist aber sicher der Fall, wenn, wie zunächst angenommen wurde, die sämtlichen Gelenke des räumlichen Gelenksystems drei Freiheitsgrade besitzen. Es ist auch gar nicht nötig, daß die Achse durch H_1 ihre Richtung bei einer endlichen Drehung des ersten Gliedes beibehält. Auch wenn die Drehung um H_1 ganz allgemeiner Natur ist, indem sie um stetig wechselnde instantane Achsen stattfindet, wird doch der Gesamtschwerpunkt an seiner Stelle bleiben, wenn alle anderen Glieder nur Translationsbewegungen ausführen.

Daß das gleiche gilt, wenn man ein anderes Glied um seinen Hauptpunkt dreht und den übrigen dabei nur Translationsbewegungen gestattet, erkennt man unmittelbar, wenn man den zum Gesamtschwerpunkte führenden Vektorzug an dem Hauptpunkte dieses Gliedes beginnen läßt.

Bisher wurde nur das durch Fig. 18 dargestellte Gelenksystem, welches sowohl als eben als auch als räumlich aufgefaßt werden konnte, in Rücksicht gezogen. Man überzeugt sich aber leicht, daß bei jedem beliebigen räumlichen Gelenksystem genau dieselben Beziehungen zwischen den Hauptpunkten und den Verrückungen des ganzen Systems um den Gesamtschwerpunkt gelten. Dreht man z. B. das vierte Glied des durch Figur 19 dargestellten Systems um seinen Hauptpunkt H_4 und läßt dabei alle neunzehn anderen Glieder nur Translationsbewegungen machen, so werden die Richtungen der zu diesen neunzehn Gliedern gehörenden Hauptstrecken, welche innerhalb des Systems dem vierten Gliede am nächsten liegen, bei dieser Bewegung des ganzen Gelenksystems ungeändert bleiben. Da H_4 selbst fest ist, so wird daher auch der von H_4 nach S_0 führende Vektorzug trotz der Bewegung im Raume fest bleiben, und es wird insbesondere der Gesamtschwerpunkt S_0 seinen Ort beibehalten.

Aus diesem Zusammenhang zwischen den Hauptpunkten und den angedeuteten Bewegungen des Gelenksystems relativ zum Gesamtschwerpunkte geht hervor, daß man die allgemeinste Verrückung des ganzen Systems um seinen Schwerpunkt S_0 aus n derartigen Drehungen je eines Gliedes um seinen Hauptpunkt mit gleichzeitigen Translationen

aller anderen Glieder zusammengesetzt denken kann. Für die Translationsbewegung eines Gliedes ist dabei immer die Bewegung desjenigen Gelenkmittelpunktes des allein sich drehenden Gliedes maßgebend, welcher dem die Translation ausführenden Gliede innerhalb des Systems am nächsten liegt. Dieser Gelenkmittelpunkt bewegt sich aber auf einer Kugelfläche um den ruhenden Hauptpunkt, deren Radius die denselben mit dem Hauptpunkte verbindende Hauptstrecke ist.

d) *Folgerungen für die Kinetik der räumlichen Gelenksysteme.*

Wenn ein Glied sich dreht, während alle anderen mit ihm zusammenhängenden Glieder Translationsbewegungen ausführen, so verhalten sich die letzteren in kinetischer Beziehung genau so, als ob ihre Massen in dem ihnen am nächsten liegenden Gelenkmittelpunkte des sich drehenden Gliedes konzentriert wären. Man wird also auch durch diese Betrachtungen wieder zu den reduzierten Systemen geführt.

Auch das Verhalten der Kräfte bei diesen Verrückungen entspricht in jeder Beziehung den Eigenschaften der reduzierten Systeme. Greift eine Kraft nicht an dem Gliede an, welches um seinen Hauptpunkt gedreht wird, sondern an einem der übrigen in Translationsbewegung begriffenen Glieder, so wird ihr Angriffspunkt eine Bahn beschreiben, welche mit der Bahn des ihm innerhalb des Systems am nächsten liegenden Gelenkmittelpunktes des sich drehenden Gliedes kongruent ist. Diese Kraft wird daher bei der Verrückung die gleiche Elementararbeit leisten, als wenn sie in gleicher Richtung und Stärke direkt an diesem Gelenkmittelpunkte angriffe. Zu dem Begriffe des reduzierten Systems gehörte es aber, daß jede nicht am Kerngliede angreifende Kraft parallel nach demjenigen Gelenkmittelpunkte des Kerngliedes verlegt werden mußte, welcher ihrem Angriffspunkte innerhalb des Gelenksystems am nächsten liegt.

Wendet man dieses Ergebnis auf die in den Schwerpunkten der einzelnen Glieder angreifend zu denkenden Gewichtskräfte an, so erkennt man aus der Bedeutung der Hauptpunkte als Schwerpunkte der reduzierten Systeme leicht, daß die nach den Gelenkmittelpunkten des allein gedrehten Gliedes verlegten Gewichtskräfte sich mit der im Schwerpunkte dieses Gliedes direkt angreifenden Gewichtskraft zu einer Resultante zusammensetzen, welche dem Gewicht des ganzen Gelenksystems gleich ist und im Hauptpunkte des sich drehenden Gliedes angreift. Da dieser Hauptpunkt bei der Verrückung fest bleibt, so leistet also die Schwere bei derselben überhaupt keine Arbeit — ein Resultat, welches von vornherein zu erwarten war, weil ja der Gesamtschwerpunkt S_0 des Gelenksystems bei der betreffenden Verrückung seine Lage im Raume beibehält.

Man sieht also, alle bisher besprochenen Eigenschaften der redu-

zierten Systeme und Hauptpunkte, welche oben zunächst für das ebene dreigliedrige Gelenksystem bewiesen worden sind, behalten ihre volle Gültigkeit bei jedem beliebigen räumlichen Gelenksystem. Es ist daher zu erwarten, daß die reduzierten Systeme für die Ableitung der Bewegungsgleichungen aller räumlichen Gelenksysteme dieselbe fundamentale Bedeutung besitzen werden wie bei den ebenen Systemen.

10. Die lebendige Kraft und die Bewegungsgleichungen des n-gliedrigen ebenen Gelenksystems.

a) Ableitung der lebendigen Kraft des n-gliedrigen ebenen Gelenksystems.

In der Ebene der Längsachsen des n-gliedrigen ebenen Gelenksystems sei ein rechtwinkliges Koordinatensystem (xy) festgelegt, so wie es in Figur 18 für das sechsgliedrige System angedeutet ist. Die Koordinaten des Gesamtschwerpunktes S_0 in diesem System seien x_0, y_0, und die positive Richtung der Längsachse des $j$ten Gliedes bilde mit der positiven Richtung der X-Achse den Winkel φ_j. Dann ist durch x_0, y_0 und die n Winkel φ_j die Stellung des Gelenksystems eindeutig bestimmt. Bezeichnet man mit x_0', y_0' die in der Richtung der beiden Koordinatenachsen genommenen Komponenten der Geschwindigkeit v_0 des Gesamtschwerpunktes S_0, und mit φ_j' die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher die Längsachse des $j$ten Gliedes bei irgend einer Bewegung des Systems ihre Richtung in der für alle Längsachsen gemeinsamen Bewegungsebene ändert, so läßt sich die lebendige Kraft des n-gliedrigen Systems in ganz entsprechender Weise durch diese Geschwindigkeiten x_0', y_0' und φ_j' ausdrücken, wie es sich früher beim dreigliedrigen System herausgestellt hatte.

Es ist hierbei wiederum zweckmäßig, den von der Bewegung des Gesamtschwerpunktes S_0 herrührenden Teil der lebendigen Kraft von demjenigen abzusondern, welcher der Bewegung des Systems um seinen Schwerpunkt entspricht. Jener sei, wie früher, als die äußere, dieser als die innere lebendige Kraft des Gelenksystems bezeichnet.

Die äußere lebendige Kraft besitzt den Wert

$$\frac{1}{2} m_0 (x_0'^2 + y_0'^2), \tag{145}$$

unter m_0 die Gesamtmasse des Systems verstanden.

Zur Berechnung der inneren lebendigen Kraft muß man zunächst die Geschwindigkeit v_h bestimmen, welche der Einzelschwerpunkt S_h des $h$ten Gliedes relativ zum Gesamtschwerpunkte S_0 besitzt. Bezeichnet m_h die Masse des $h$ten Gliedes und $\varkappa_h$ den Trägheitsradius desselben in bezug auf die zu den Scharnierachsen parallele Achse durch seinen Schwerpunkt S_h, so kann man nach den ausführlichen Auseinandersetzungen beim dreigliedrigen Gelenksystem nicht im Zweifel sein, daß die innere lebendige Kraft des Systems durch die Summe

$$(146) \qquad \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}^{h}\, m_h[v_h^2 + \varkappa_h^2 \cdot \varphi_h'^2]$$

gemessen wird. Man hat daher für die gesamte lebendige Kraft T des n-gliedrigen ebenen Gelenksystems den Wert

$$(147) \qquad T = \frac{1}{2}\, m_0(x_0'^2 + y_0'^2) + \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}^{h}\, m_h[v_h^2 + \varkappa_h^2 \cdot \varphi_h'^2].$$

Jede zu S_0 relative Geschwindigkeit v_h eines Schwerpunktes S_h läßt sich nun leicht durch die n Winkelgeschwindigkeiten φ_j' ausdrücken, wenn man beachtet, daß nach (129) von dem Gesamtschwerpunkte S_0 nach dem Schwerpunkte S_h ein Vektorzug von n Hauptstrecken f_{jh} führt, von denen jede einem anderen Gliede angehört und dabei der Längsachse dieses Gliedes parallel läuft. Von den beiden Indizes, mit welchen eine Hauptstrecke f_{jh} versehen ist, gibt der erste an, zu welchem Gliede dieselbe gehört, und der zweite, nach welchem Gelenkmittelpunkte sie hingerichtet ist. Denn dieser zweite Index bezeichnet auch die Nummer eines Gliedes; der fragliche Gelenkmittelpunkt des $j$ten Gliedes ist dann der, welchem das $h$te Glied innerhalb des Systems am nächsten liegt. Hiervon macht nur die Hauptstrecke f_{jj} eine Ausnahme, bei welcher der zweite Index dem ersten gleich ist; diese hat die Bedeutung des vom Hauptpunkte H_j des $j$ten Gliedes nach dem Schwerpunkte S_j desselben Gliedes führenden Vektors. Da bei dem in Betracht gezogenen n-gliedrigen Gelenksystem jedes Glied höchstens zwei, die beiden Endglieder sogar nur einen Gelenkmittelpunkt besitzen, so können die zu demselben Gliede gehörenden Hauptstrecken f_{jh}, welche also in dem Index j übereinstimmen, für die n Werte von h höchstens dreierlei verschiedene Größen annehmen. Nach den für die Hauptstrecken schon früher eingeführten Bezeichnungen ist nämlich f_{jh} gleich $-c_j$, $-e_j$ oder $+d_j$, je nachdem h kleiner, gleich oder größer als j ist.

Nach diesen Angaben wird man imstande sein, für jeden Wert von n eine Tabelle für die Hauptstrecken f_{jh} in derselben Weise aufzustellen, wie es in der Tabelle auf Seite 104 für das sechsgliedrige System ausgeführt worden ist.

Bei der Bewegung des Gelenksystems relativ zu S_0 dreht sich nun jede der n Hauptstrecken, welche nach (129) den Vektor $\overline{S_0 S_h}$ zusammensetzen, um ihren S_0 am nächsten liegenden Endpunkt. Da jede Hauptstrecke f_{jh} dabei stets der Längsachse des $j$ten Gliedes parallel bleibt, so muß sie diese Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit φ_j' ausführen. Beachtet man dies, so erkennt man ohne weiteres, daß die zum Gesamtschwerpunkte S_0 relative Geschwindigkeit $\overline{v_h}$ des Schwerpunktes S_h sich aus den Komponenten $\overline{f_{1h} \cdot \varphi_1'}$, $\overline{f_{2h} \cdot \varphi_2'}$, $\overline{f_{3h} \cdot \varphi_3'}$, $\ldots$,

$\overline{f_{nh} \cdot \varphi_n'}$ zusammensetzt, welche der Reihe nach zu der Längsachse des 1., 2., 3., ..., $n$ten Gliedes senkrecht sind. Man hat daher für v_h die Vektorsumme

$$(148) \qquad \bar{v}_h = \sum_1^n {}^j \overline{f_{jh} \cdot \varphi_j'},$$

wobei zu beachten ist, daß in der Summe der Index h einen konstanten Wert besitzt und nur der Index j alle Werte von 1 bis n annimmt. Man hat also z. B. beim sechsgliedrigen ebenen Gelenksystem nur alle Hauptstrecken in der Tabelle auf Seite 104, welche in der zu dem bestimmten Werte von h gehörenden Horizontalreihe stehen, bezüglich mit $\varphi_1', \varphi_2', \ldots, \varphi_6'$ zu multiplizieren und dann alle diese Produkte geometrisch zu addieren, um die relative Geschwindigkeit des zu dem betreffenden Werte von h gehörenden Schwerpunktes S_h zu erhalten.

Da die einzelnen Vektoren, welche nach (148) v_h zusammensetzen, bezüglich zu den Längsachsen mit gleichem Index j senkrecht gerichtet sind, so bilden sie untereinander die gleichen Winkel, wie ihre zugehörigen Längsachsen. Die letzteren lassen sich aber leicht durch die Winkel φ, bestimmen, um welche die Längsachsen gegen die X-Achse des Koordinatensystems geneigt ist. So bildet die Längsachse des $i$ten Gliedes mit der des $k$ten Gliedes den Winkel $(\varphi_i - \varphi_k)$. Um den gleichen Winkel sind daher auch die Geschwindigkeitskomponenten $\overline{f_{ih} \cdot \varphi_i'}$ oder $\overline{f_{kh} \cdot \varphi_k'}$ gegeneinander geneigt, wenn f_{ih} und f_{kh} das gleiche Vorzeichen besitzen; bei verschiedenem Vorzeichen dieser beiden Hauptstrecken handelt es sich dagegen um den Supplementswinkel zu dem Winkel der Längsachsen.

Betrachtet man dies, so erhält man aus (148) nach dem allgemeinen Kosinussatz für das Quadrat von v_h den Wert

$$(149) \qquad v_h^2 = \sum_1^n {}^j f_{jh}^2 \cdot \varphi_j'^2 + 2 \sum_1^{n-1} {}^i \sum_2^n {}^k f_{ih} f_{kh} \cos(\varphi_i - \varphi_k) \cdot \varphi_i' \varphi_k',$$

wobei in der Doppelsumme nur i stets kleiner als k bleiben muß.

Vermehrt man den Wert für v_h^2 um $\varkappa_h^2 \cdot \varphi_h'^2$ und multipliziert diese Summe mit $\frac{1}{2} m_h$, so erhält man zunächst den Beitrag, welchen das $h$te Glied infolge seiner zu S_0 relativen Bewegung zur inneren lebendigen Kraft des ganzen Gelenksystems beisteuert. Die ganze innere lebendige Kraft stellt sich demnach als Summe von n solchen Beiträgen dar, welche den Werten $h = 1, 2, 3 \ldots n$ entsprechen (vgl. (147)).

Denkt man alle n Beiträge zusammengeschrieben und alle Glieder zusammengefaßt, welche entweder das gleiche Quadrat einer bestimmten Winkelgeschwindigkeit φ_j' oder das Produkt derselben

beiden Winkelgeschwindigkeiten φ_i' und φ_k' als gemeinsamen Faktor aufweisen, so erscheint als Faktor von $\frac{1}{2}\varphi_j'^2$ die Summe

(150) $$m_j \varkappa_j^2 + \sum_1^n {}^h m_h f_{jh}^2$$

und als Faktor von $\cos(\varphi_i - \cos\varphi_k) \cdot \varphi_i' \varphi_k'$ die Summe

(151) $$\sum_1^n {}^h m_h f_{ih} f_{kh}$$

Aus der Bedeutung der Größen f_{ih} geht nun hervor, daß die Summe $m_j \varkappa_j^2 + \sum_1^n {}^h m_h f_{jh}^2$ wieder das Trägheitsmoment des $j$ten reduzierten Systems in bezug auf die zur Bewegungsebene senkrechte Achse durch den Hauptpunkt H_j des $j$ten Gliedes ist, so daß man dafür $m_0 k_j^2$ schreiben kann, wenn unter k_j der zugehörige Trägheitsradius[1]) verstanden wird.

Ferner ergibt sich ganz allgemein, daß die Summe $\sum_1^n {}^h m_h f_{ih} f_{kh}$ durch das negative Produkt $-m_0 f_{ik} f_{ki}$ ersetzt werden kann. Zu diesem Resultat gelangt man auf folgende Weise:

Es ist stets $i < k$. Die Summe der Massen, welche am $i$ten Gliede in entgegengesetzter Richtung als das $k$te Glied hängen, sei m_i', die Summe der Massen, welche am $k$ten Gliede in entgegengesetzter Richtung als das $i$te Glied hängen, sei m_k'; die Massen des $i$ten und $k$ten Gliedes selbst seien m_i und m_k und die Summe der dann noch übrig bleibenden, zwischen dem $i$ten und dem $k$ten Gliede befindlichen Massen sei m_{ik}. An dem $i$ten Gliede hat man drei Hauptstrecken zu unterscheiden: diejenige, welche das Gelenk in der Richtung nach dem $k$ten Gliede mit H_i verbindet, f_{ik}, diejenige, welche das entgegengesetzte Gelenk mit H_i verbindet, sie soll mit $f_{ii'}$ bezeichnet sein, und die Strecke f_{ii} zwischen dem $i$ten Hauptpunkte H_i und dem $i$ten Schwerpunkte S_i. Desgleichen hat man am $k$ten Gliede drei Hauptstrecken, f_{ki}, $f_{kk'}$ und f_{kk} zu unterscheiden, wo f_{ki} das dem $i$ten Gliede zugekehrte Gelenk, $f_{kk'}$ das entgegengesetzte Gelenk und f_{kk} den Schwerpunkt S_k mit dem Hauptpunkte H_k verbindet.

Es sind daher die

den Schwerpunkten der Massensumme m_i' zugeordneten Hauptstrecken: $f_{ii'}$ und f_{ki}

den Schwerpunkten der Masse m_i zugeordneten Hauptstrecken: f_{ii} und f_{ki},

1) Dieser Trägheitsradius k_j darf natürlich nicht mit dem gleichzeitig in den Formeln verwendeten Index k verwechselt werden.

den Schwerpunkten der Massensumme m_{ik} zugeordneten Hauptstrecken: f_{ik} und f_{ki},
den Schwerpunkten der Masse m_k zugeordneten Hauptstrecken: f_{ik} und f_{kk},
den Schwerpunkten der Massensumme m_k' zugeordneten Hauptstrecken: f_{ik} und $f_{kk'}$, und man hat

$$\sum_1^n{}^h m_h f_{ih} f_{kh} = m_i' f_{ii'} f_{ki} + m_i f_{ii} f_{ki} + m_{ik} f_{ik} f_{ki} + m_k f_{ik} f_{kk} + m_k' f_{ik} f_{kk'}.$$

Nun ist infolge der Bedeutung der Hauptpunkte als Schwerpunkte der reduzierten Systeme

$$m_i' f_{ii'} + m_i f_{ii} = -(m_k' + m_k + m_{ik}) f_{ik}$$
$$m_k f_{kk} + m_k' f_{kk'} = -(m_{ik} + m_i + m_i') f_{ki}.$$

Setzt man diese Werte ein, so ergibt sich

$$\sum_1^n{}^h m_h f_{ih} f_{kh} = -(m_k' + m_k + m_{ik} - m_{ik} + m_{ik} + m_i + m_i') f_{ik} f_{ki}$$

und da $m_k' + m_k + m_{ik} + m_i + m_i' = m_0$ ist,

$$(152) \qquad \sum_1^n{}^h m_h f_{ih} f_{kh} = -m_0 f_{ik} f_{ki},$$

wie oben behauptet wurde.

Man erhält daher schließlich als Wert für die gesamte lebendige Kraft T des n-gliedrigen ebenen Gelenksystems im Falle freier Beweglichkeit desselben

$$(153) \quad T = \tfrac{1}{2} m_0 \Big[x_0'^2 + y_0'^2 + \sum_1^n{}^j k_j^2 \cdot \varphi_j'^2 - 2 \sum_1^{n-1}{}^i \sum_2^n{}^k f_{ik} f_{ki} \cos(\varphi_i - \varphi_k) \cdot \varphi_i' \varphi_k' \Big],$$

wo in der Doppelsumme immer i kleiner als k sein muß.

Nun hat für $i < k$ die Hauptstrecke f_{ik} nach den obigen Auseinandersetzungen den Wert $+d_i$ und f_{ki} den Wert $-c_k$. Daher kann der Ausdruck für T im Falle freier Beweglichkeit des n-gliedrigen ebenen Gelenksystems auch in der Form geschrieben werden

$$(154) \quad T = \tfrac{1}{2} m_0 \Big[x_0'^2 + y_0'^2 + \sum_1^n{}^j k_j^2 \cdot \varphi_j'^2 + 2 \sum_1^{n-1}{}^i \sum_2^n{}^k d_i c_k \cos(\varphi_i - \varphi_k) \cdot \varphi_i' \varphi_k' \Big],$$

wo wieder stets $i < k$ bleiben muß.

Dies ist aber die direkte Verallgemeinerung der für das dreigliedrige ebene Gelenksystem gefundenen Formel (62) auf Seite 41.

Zur Berechnung der Trägheitsradien k_j hat man nach (150)

unter Berücksichtigung der speziellen Werte der Hauptstrecken f_{jh} die Beziehung

$$(155)\quad m_0 k_j^2 = m_j(\varkappa_i^2 + e_j^2) + (m_1 + m_2 + \cdots m_{j-1}) c_j^2 + (m_{j+1} + m_{j+2} + \cdots m_n) d_j^2,$$

während die Hauptstrecken c_j und d_j sich nach Formel (124) aus den die Dimensionen und Massenverteilung der Glieder des Gelenksystems bestimmenden Größen l_j, r_j und s_j berechnen lassen.

Die Geschwindigkeit des Gesamtschwerpunktes und die aus derselben resultierende äußere lebendige Kraft lassen sich auf Grund der Beziehungen des Gesamtschwerpunktes zu den Hauptpunkten der einzelnen Glieder auch durch die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes des Gelenksystems mit Hilfe der Richtungskoordinaten φ_j und der Winkelgeschwindigkeiten φ_j' darstellen. Dies empfiehlt sich insbesondere in den Fällen, in denen bei der Bewegung des Gelenksystems ein Punkt 0_h desselben entweder ganz in Ruhe bleibt oder eine bekannte einfache Bewegung ausführt. Man hat dann nur sowohl die zu diesem Punkte relative Bewegung des demselben Gliede angehörenden Hauptpunktes, als auch die Richtungsänderungen der dem letzteren zugekehrten Hauptstrecken der $n - 1$ übrigen Glieder durch die Größen φ_j und φ_j' auszudrücken. Bleibt der Punkt 0_h des Gelenksystems in Ruhe, so läßt sich auf diesem Wege die totale lebendige Kraft allein als homogene Funktion zweiten Grades der Winkelgeschwindigkeiten φ_j' darstellen.

Bezeichnet man mit f_{j0} diejenige Hauptstrecke des $j$ten Gliedes, welche den dem festen Punkte O innerhalb des Systems am nächsten liegenden Gelenkmittelpunkt des $j$ten Gliedes mit seinem Hauptpunkte H_j, an dem Gliede, welchem der feste Punkt angehört, aber diesen Punkt selbst mit dem zugehörigen Hauptpunkte verbindet, so läßt sich die Geschwindigkeit v_0 des Gesamtschwerpunktes S_0 durch folgende Vektorsumme darstellen

$$(156)\qquad \bar{v}_0 = \sum_1^n{}^j \overline{f_{j0} \cdot \varphi_j'}.$$

Hieraus folgt aber, daß die äußere lebendige Kraft des Gelenksystems in diesem Falle den Wert besitzt

$$(157)\quad \tfrac{1}{2} m_0 v_0^2 = \tfrac{1}{2} m_0 \left[\sum_1^n{}^j f_{j0}^2 \cdot \varphi_j'^2 + 2 \sum_1^{n-1}{}^i \sum_2^n{}^k f_{i0} f_{k0} \cos(\varphi_i - \varphi_k) \cdot \varphi_i' \varphi_k' \right].$$

Setzt man diesen Ausdruck in (153) an Stelle von $\frac{1}{2} m_0 (x_0'^2 + y_0'^2)$ ein, so ergibt sich nach geeigneter Zusammenfassung der Glieder für die totale lebendige Kraft in dem Falle, daß ein Punkt eines Gliedes bei der Bewegung des Systems fest bleibt:

$$(158)\quad T = \tfrac{1}{2} m_0 \left[\sum_1^n{}^j (k_j^2 + f_{j0}^2) \cdot \varphi_j'^2 - 2 \sum_1^{n-1}{}^i \sum_2^n{}^k (f_{ik} f_{ki} - f_{i0} f_{k0}) \cos(\varphi_i - \varphi_k) \cdot \varphi_i' \varphi_k' \right],$$

wobei wiederum der Index i stets kleiner als k bleiben muß.

Es ist leicht zu sehen, daß dieser Ausdruck sich im gegebenen Falle noch weiter vereinfachen läßt. Zunächst bedeutet $k_j^2 + f_{j0}^2$ das Quadrat vom Trägheitsradius λ_j des $j$ten reduzierten Systems für die Achse des dem festen Punkte am nächsten liegenden Gelenks des $j$ten Gliedes, bezüglich in dem einen Falle für die zu den Gelenkachsen parallele Achse des festen Punktes selbst. Ferner sind die beiden Hauptstrecken f_{jh} und f_{j0} entweder entgegengesetzt gleich, da die ersten immer vom Hauptpunkte und die letzteren vom Gelenkmittelpunkte ausgehen, oder sie ergänzen sich zu der die beiden Gelenkmittelpunkte des $j$ten Gliedes verbindenden Strecke l_j.

In dem Ausdruck $f_{ik} f_{ki} - f_{i0} f_{k0}$ sind nun immer wenigstens bei je einem Faktor des Minuenden und Subtrahenden die absoluten Werte gleich; daher läßt sich diese Differenz entweder als einziges Produkt schreiben, oder sie verschwindet.

Ist z. B. der feste Punkt ein Punkt O_1 auf der Längsachse des ersten Gliedes, welcher vom Hauptpunkte H_1 den Abstand c_1 und vom Gelenkmittelpunkte $G_{1,2}$ die Entfernung l_1 besitzt, so wird allgemein die Hauptstrecke f_{j0} durch c_j dargestellt. Da nun nach den früheren Auseinandersetzungen über die Bedeutung der mit zwei Indizes versehenen Hauptstrecken für den Fall, daß i kleiner wie k ist, f_{ik} den Wert $+ d_i$ und f_{ki} den Wert $- c_k$ besitzt (vgl. hiermit die Tabelle auf Seite 104), so hat man also für die Differenz $f_{ik} f_{ki} - f_{i0} f_{k0}$ den Wert $- d_i c_k - c_i c_k$ oder $-(d_i + c_i)\, c_k$, wofür nach (123) auch $- l_i c_k$ geschrieben werden kann. Die lebendige Kraft T nimmt daher in diesem Falle beschränkter Beweglichkeit den Wert an

$$(159)\quad T = \tfrac{1}{2} m_0 \left[\sum_1^n{}^j \lambda_j^2 \cdot \varphi_j'^2 + 2 \sum_1^{n-1}{}^i \sum_2^n{}^k l_i c_k \cos(\varphi_i - \varphi_k) \cdot \varphi_i' \varphi_k' \right],$$

wobei stets $i < k$ bleiben muß.

Diese Formel stellt sich als die unmittelbare Verallgemeinerung der für das dreigliedrige System gefundenen Formel (64) auf Seite 42 dar.

Zu dem Ausdruck (159) gelangt man im Falle, daß der Punkt O_1 auf der Längsachse des ersten Gliedes festbleibt, auch, indem man nicht erst die äußere und die innere lebendige Kraft des Gelenksystems gesondert in Betracht zieht, sondern direkt bestimmt, welchen Beitrag jedes einzelne Glied infolge seiner absoluten Bewegung zu der totalen lebendigen Kraft des Systems beisteuert. Hierbei hat man nur zu

berücksichtigen, daß die absolute Geschwindigkeit des Schwerpunktes S_h des $h$ten Gliedes sich durch die Vektorsumme

$$(160)\qquad \sum_{1}^{h-1} {}^{j}\, \overline{l_j \cdot \varphi_j'} + \overline{r_h \cdot \varphi_h'}$$

angeben läßt. Multipliziert man das Quadrat dieser Geschwindigkeit mit $\frac{1}{2} m_h$, so erhält man zunächst den Beitrag zur lebendigen Kraft, welcher der Bewegung des Schwerpunktes S_h entspricht. Diesen hat man um den aus der Drehung des $h$ten Gliedes um seinen Schwerpunkt S_h herrührenden Beitrag $\frac{1}{2} m_h \varkappa_h^2 \,.\, \varphi_h'^2$ zu vermehren, um den ganzen von der Bewegung des $h$ten Gliedes stammenden Anteil an der lebendigen Kraft des Gelenksystems zu erhalten. Denkt man für die sämtlichen n Glieder des Systems ihren Beitrag aufgestellt und in der Summe der so erhaltenen n Beiträge wieder alle Größen zusammengefaßt, welche entweder das Quadrat derselben Winkelgeschwindigkeit φ_j' oder ein Produkt aus denselben beiden Winkelgeschwindigkeiten φ_i' und φ_k' als gemeinsamen Faktor besitzen, so wird man tatsächlich, wie man leicht bestätigen wird, auf (159) geführt, wenn man berücksichtigt, daß nach den Bedeutungen von λ_j und c_j (vgl. (124)) die Relationen gelten

$$(161)\qquad m_0 \lambda_j^2 = m_j (\varkappa_j^2 + r_j^2) + (m_{j+1} + m_{j+2} + \cdots\cdot m_n)\, l_j^2$$

und

$$(162)\qquad m_0 c_j = m_j r_j + (m_{j+1} + m_{j+2} + \cdots\cdot m_n)\, l_j.$$

b) *Die Bewegungsgleichungen des n-gliedrigen ebenen Gelenksystems.*

Nachdem der Ausdruck für die lebendige Kraft des n-gliedrigen Gelenksystems gewonnen ist, kann man wieder mit Hilfe der allgemeinen Lagrangeschen Differentialgleichungen (68) auf Seite 52 die speziellen Bewegungsgleichungen des Systems ableiten. Es ist hierbei nur zu beachten, daß man jetzt zu $n + 2$ Gleichungen geführt wird, indem man dem Index h der Reihe nach die Werte 1 bis n beilegen muß.

Aus (153) erhält man nach Ausführung der nötigen Differentiationen im Falle freier Beweglichkeit des n-gliedrigen ebenen Gelenksystems die $n + 2$ Bewegungsgleichungen

$$(163)\qquad \begin{gathered} m_0 x_0'' = Q_{x_0} \\ m_0 y_0'' = Q_{y_0} \\ m_0 \left\{ k_h^2 \cdot \varphi_h'' - \sum_{1}^{n} {}^{j} f_{hj} f_{jh} \left[\varphi_j'' \cos(\varphi_h - \varphi_j) + \varphi_j'^2 \sin(\varphi_h - \varphi_j) \right] \right\} = Q_{\varphi_h}, \\ (h = 1, 2, 3 \ldots\ldots n), \end{gathered}$$

wo stets j von h verschieden sein muß, so daß die Summen in den letzten n Gleichungen nur $n - 1$ Doppelglieder enthalten. Mit Aus-

nahme der Größen Q_{x_0} und Q_{y_0}, welche wieder einfach die Komponentensummen der äußeren Kräfte parallel den beiden Koordinatenachsen in der festen Bewegungsebene bedeuten, stellt jedes Q_{φ_h} eine Summe von Drehungsmomenten dar, nämlich der Drehungsmomente, welche die Kräfte des $h$ten reduzierten Systems auf die zu den Gelenkachsen parallele Achse durch seinen Schwerpunkt, d. h. also den Hauptpunkt des $h$ten Gliedes ausüben. Dies läßt sich ohne Mühe erkennen, wenn man die ausführlichen Betrachtungen über die Elementarbeiten der Kräfte des dreigliedrigen Systems (vgl. S. 42 ff.) auf das n-gliedrige ebene Gelenksystem überträgt.

Jede der letzten n Bewegungsgleichungen von (163) hat nun eine ganz entsprechend einfache Bedeutung wie die drei letzten Bewegungsgleichungen von (69) für das dreigliedrige System. Um diese Bedeutung abzuleiten, ist es zunächst zweckmäßig, in (163) die Werte für die Hauptstrecken f_{hj} und f_{jh} einzuführen.

Da der Fall $j = h$ ausgeschlossen ist, so nimmt f_{hj} nach den früheren Auseinandersetzungen (vgl. S. 122) entweder den Wert $-c_h$ oder den Wert $+d_h$ an; das erstere ist der Fall, wenn $j < h$, das letztere, wenn $j > h$ ist. Die Hauptstrecke f_{jh} besitzt dagegen für $j < h$ den Wert $+d_j$ und für $j > h$ den Wert $-c_j$. Daher empfiehlt es sich, in (163) die Summe in zwei Summen zu zerlegen, von denen die eine die Glieder umfaßt, welche zu den Werten 1 bis $h-1$, und die andere die Glieder, welche zu den Werten $h+1$ bis n für j gehören. Bringt man außerdem diese Summen auf die rechte Seite, so nehmen die letzten n Gleichungen von (163) die Form an:

$$(164)\quad m_0 k_h^2 \cdot \varphi_h'' = Q_{\varphi_h} - m_0 \sum_1^{h-1}{}_j\, c_h d_j [\varphi_j'' \cos(\varphi_h - \varphi_j) + \varphi_j'^2 \sin(\varphi_h - \varphi_j)]$$

$$- m_0 \sum_{h+1}^{n}{}_j\, d_h c_j [\varphi_j'' \cos(\varphi_h - \varphi_j) + \varphi_j'^2 \sin(\varphi_h - \varphi_j)].$$

$$(h = 1, 2, 3 \cdots n).$$

Zu dieser Form der Bewegungsgleichungen wäre man übrigens auch direkt unter Verwendung des Ausdruckes (154) für die lebendige Kraft gekommen.

An dem $h$ten Gliede hängt auf der einen Seite das aus den Gliedern 1 bis $h-1$, auf der andern Seite das aus den Gliedern $h+1$ bis n bestehende Teilsystem. Der vom Gelenkmittelpunkte $G_{h-1,h}$ nach dem Hauptpunkte $H_{1,h-1}$ des ersteren Teilsystems führende Vektor läßt sich nach dem Früherem (vgl. S. 114 und den Satz auf Seite 117) durch die Vektorsumme ersetzen

$$(165)\qquad \overline{G_{h-1,h} H_{1,h-1}} = -\sum_1^{h-1}{}_j\, \bar{d}_j$$

und der vom Gelenkmittelpunkte $G_{h,h+1}$ nach dem Hauptpunkte $H_{h+1,n}$ des letzteren Teilsystems gezogene Vektor ist gleich der Vektorsumme

(166) $$\overline{G_{h,h+1}H_{h+1,n}} = \sum_{h+1}^{n} {}^{j}\,\bar{c}_j.$$

Die mit m_0 multiplizierte Beschleunigung des Hauptpunktes $H_{1,h-1}$ relativ zu $G_{h-1,h}$, welche mit der zu demselben Gelenkmittelpunkte relativen Effektivkraft $\bar{E}_{r_{1,h-1}}$ des Schwerpunktes $S_{1,h-1}$ des ersten Teilsystems übereinstimmt, läßt sich daher durch die Vektorsumme ausdrücken

(167) $$\bar{E}_{r_{1,h-1}} = -m_0 \sum_{1}^{h-1} {}^{j}\,[\overline{d_j\varphi_j''} + \overline{d_j\varphi_j'^2}].$$

In entsprechender Weise ergibt sich für die zum Gelenkmittelpunkte $G_{h,h+1}$ relative Effektivkraft $\bar{E}_{r_{h+1,n}}$ des Schwerpunktes $S_{h+1,n}$ des anderen Teilsystems die Vektorsumme

(168) $$\bar{E}_{r_{h+1,n}} = m_0 \sum_{h+1}^{n} {}^{j}\,[\overline{c_j\varphi_j''} + \overline{c_j\varphi_j'^2}].$$

Man überzeugt sich nun leicht, daß die erste Summe auf der rechten Seite von (164) in Anbetracht des negativen Vorzeichens das Drehungsmoment darstellt, mit welchem eine in $G_{h-1,h}$ angreifende, der relativen Effektivkraft $\bar{E}_{r_{1,h-1}}$ entgegengesetzt gleiche Kraft $-\bar{E}_{r_{1,h-1}}$ auf die zu den Gelenkachsen parallele Achse durch den Hauptpunkt H_h einwirken würde. Diese Kraft setzt sich aus $h-1$ Komponenten $\overline{m_0 d_j\varphi_j''}$ und ebensoviel Komponenten $\overline{m_0 d_j\varphi_j'^2}$ zusammen. Jede Komponente $\overline{m_0 d_j\varphi_j''}$ ist zu der Längsachse des $j$ten Gliedes senkrecht gerichtet und bildet mit der Senkrechten zur Längsachse des $h$ten Gliedes den Winkel $\varphi_h - \varphi_j$. Da $G_{h-1,h}$ von H_h den Abstand c_h besitzt, so ist das Drehungsmoment dieser Komponente für die Achse durch H_h gleich $m_0 d_j\varphi_j'' \cos(\varphi_h - \varphi_j)\cdot c_h$; dabei sucht sie bei positivem Werte von φ_j'', wie eine einfache Überlegung zeigt, den Winkel φ_h zu verkleinern, ihr Drehungsmoment ist daher negativ in Rechnung zu ziehen. Jede Komponente $\overline{m_0 d_j\varphi_j'^2}$ verläuft in der Richtung der Längsachse des $j$ten Gliedes und bildet daher mit der Senkrechten zur Längsachse des $h$ten Gliedes einen Winkel, welcher das Komplement zu $\varphi_h - \varphi_j$ darstellt; ihr Drehungsmoment für die Achse durch H_h ist infolgedessen gleich $m_0 d_j\varphi_j'^2 \sin(\varphi_h - \varphi_j)\cdot c_h$ und auch negativ zu rechnen, da sie ebenfalls den Winkel φ_h zu verkleinern sucht, wenn $\varphi_h > \varphi_j$ ist.

Auf ganz entsprechende Weise kann man zeigen, daß die zweite Summe auf der rechten Seite von (164), welche auch das negative

Vorzeichen besitzt, das Drehungsmoment darstellt, das eine im Gelenkmittelpunkte $G_{h,h+1}$ des $h$ten Gliedes angreifende, der relativen Effektivkraft $\overline{E}_{r_{h+1,n}}$ entgegengesetzt gleiche Kraft $-\overline{E}_{r_{h+1,n}}$ auf die gleiche Achse durch H_h ausübt.

Da nun auf der linken Seite von (164) das Produkt aus der Winkelbeschleunigung des $h$ten Gliedes und dem auf dieselbe Achse durch H_h bezogenen Trägheitsmoment des $h$ten reduzierten Systems steht, so hat man das allgemein gültige Resultat, daß auch bei der freien Bewegung des n-gliedrigen ebenen Gelenksystems das $h$te reduzierte System sich so um die zu den Gelenkachsen parallele Achse durch seinen Schwerpunkt H_h dreht, als ob außer den Kräften dieses reduzierten Systems noch in jedem Gelenkmittelpunkte des $h$ten Gliedes eine Kraft angriffe, welche der zu diesem Gelenkmittelpunkte relativen Effektivkraft des Schwerpunktes des anhängenden Teilsystems entgegengesetzt gleich ist.

Weiterhin kann man sich nach den früheren ausführlichen Auseinandersetzungen über die Bewegungen des dreigliedrigen ebenen Gelenksystems leicht davon überzeugen, daß auch der Schwerpunkt H_h des $h$ten reduzierten Systems eine Beschleunigung erfährt, welche mit diesen an dem reduzierten System angreifenden Kräften, die beiden Kräfte $-\overline{E}_{r_{1,h-1}}$ und $-\overline{E}_{r_{h+1,n}}$ mit eingeschlossen, zusammen stimmt. Man hat zu diesem Zwecke nur zu beachten, daß die absolute Beschleunigung des Hauptpunktes H_h sich durch die Vektorsumme

$$(169) \qquad \overline{\gamma}_0 + \sum_{1}^{h-1} {}^j [\overline{d_j\varphi_j''} + \overline{d_j\varphi_j'^2}] - \sum_{h+1}^{n} {}^j [\overline{c_j\varphi_j''} + \overline{c_j\varphi_j'^2}]$$

darstellen läßt, wenn man unter γ_0, wie früher, die Beschleunigung des Gesamtschwerpunktes S_0 versteht.

Es ergibt sich also der für jedes ebene Gelenksystem von der vorausgesetzten Beschaffenheit ganz allgemein gültige

Satz: Bei den freien Bewegungen des n-gliedrigen ebenen Gelenksystems verhält sich jedes der n reduzierten Systeme in jeder Beziehung so, als ob außer den zum System gehörenden Kräften noch in jedem Gelenkmittelpunkte seines Kerngliedes eine Kraft angriffe, welche der zu diesem Gelenkmittelpunkte **relativen** Effektivkraft des Schwerpunktes des anhängenden Teilsystems entgegengesetzt gleich ist.

Zu diesem Resultat kann man auch in ganz entsprechender Weise wie beim dreigliedrigen Gelenksystem auf elementarem Wege gelangen. Man hat zu diesem Zwecke wieder nur den Druck in Rücksicht zu ziehen, welchen ein jedes an einem Gelenk eines Gliedes hängende Teilsystem infolge seiner eigenen Bewegung in diesem Gelenk auf das betreffende Glied ausübt, und diesen Druck dann den übrigen an dem

Gliede angreifenden Kräften hinzuzufügen. Der Druck ist nach dem Schwerpunktssatze leicht zu bestimmen. Derselbe ist entgegengesetzt gleich dem Druck, welcher von Seiten des Gliedes auf das Teilsystem ausgeübt wird; der letztere ist aber nach Größe und Richtung dadurch vollkommen bestimmt, daß er im Verein mit den anderen am Teilsystem angreifenden Kräften dem Schwerpunkte dieses Systems seine Beschleunigung erteilt. Hat man nun für ein Glied des n-gliedrigen Gelenksystems auf diese Weise die auf dasselbe in den Gelenken einwirkenden Druckkräfte bestimmt, so bewegt es sich unter dem Einfluß dieser Druckkräfte und der direkt an ihm angreifenden Kräfte genau so, als ob es gar nicht mehr in Zusammenhang mit den übrigen Gliedern stände. Die genauere Ausführung dieses Gedankens liefert die zu diesem Gliede gehörende Bewegungsgleichung, welche allerdings zunächst noch nicht die Form (163) besitzt. Um diese Form zu erreichen, hat man dann nur noch durch Hinzufügen der Massen der anhängenden Teilsysteme in den Gelenkmittelpunkten und der zur Bewegung dieser Massenpunkte erforderlichen Kräfte den Übergang zum reduzierten System zu machen, so wie es früher für das dreigliedrige Gelenksystem schon ausführlich auseinandergesetzt worden ist.

Für den Fall, daß ein Punkt auf der Längsachse eines der n Glieder des Gelenksystems während der ebenen Bewegung festbleiben soll, hat man im ganzen nur n Bewegungsgleichungen. Legt man der Rechnung die Form (158) für die lebendige Kraft des Systems zugrunde, so wird man auf die folgenden Differentialgleichungen der Bewegung geführt

$$(170)\qquad m_0 \{ (k_h^2 + f_{h0}^2) \cdot \varphi_h'' - \sum_1^n{}^j (f_{hj} f_{jh} - f_{h0} f_{j0}) [\varphi_j'' \cos(\varphi_h - \varphi_j) + \varphi_j'^2 \sin(\varphi_h - \varphi_j)] \} = Q_{\varphi_h}, \quad (h = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

wo wiederum h von j verschieden sein muß, so daß also die Summe in jedem Falle nur aus $n-1$ Doppelgliedern besteht. Hierbei bedeutet jetzt Q_{φ_h} die Summe der Drehungsmomente, mit denen die Kräfte des $h$ten reduzierten Systems auf diejenige Gelenkachse des $h$ten Gliedes einwirken, welche innerhalb des Gelenksystems dem Gliede, welchem der feste Punkt angehört, am nächsten liegt. Nur an diesem Gliede selbst tritt an Stelle einer Gelenkachse die zu den Gelenkachsen parallele Achse durch den festen Punkt.

Liegt der feste Punkt auf der Längsachse des ersten Gliedes, ist er also der schon oben angenommene Punkt O_1, so können die n Bewegungsgleichungen in der Form geschrieben werden

$$(171) \quad m_0 \lambda_h^2 \cdot \varphi_h'' = Q_{\varphi_h} - m_0 \sum_1^{h-1} c_h l_j [\varphi_j'' \cos(\varphi_h - \varphi_j) + \varphi_j'^2 \sin(\varphi_h - \varphi_j)]$$
$$- m_0 \sum_{h+1}^{n} l_h c_j [\varphi_j'' \cos(\varphi_h - \varphi_j) + \varphi_j'^2 \sin(\varphi_h - \varphi_j)],$$
$$(h = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

wozu man auch geführt wird, wenn man bei der Ableitung derselben direkt von der Form (159) für die lebendige Kraft ausgeht.

Die Bedeutung jeder zu einem bestimmten Werte von h gehörenden Bewegungsgleichung (171) ist nach dem bisherigen leicht zu erkennen.

Zunächst lehrt ein Vergleich mit (164), daß die letzte Summe auf der rechten Seite von (171) wieder das Drehungsmoment einer im Gelenkmittelpunkte $G_{h,h+1}$ des $h$ten Gliedes angreifend zu denkenden Kraft $-\overline{E}_{r_{h+1,n}}$ darstellt, welche der zu diesem Gelenkmittelpunkte relativen Effektivkraft $\overline{E}_{r_{h+1,n}}$ des Schwerpunktes des anhängenden Teilsystems entgegengesetzt gleich ist; da an Stelle der Hauptstrecke d_h jetzt aber die Länge l_h des $h$ten Gliedes getreten ist, so bezieht sich dieses Drehungsmoment nicht wie früher auf die Achse durch den Hauptpunkt H_h, sondern auf die dem Punkte O_1 innerhalb des Gelenksystems am nächsten liegende Gelenkachse $G_{h-1,h}$ des $h$ten Gliedes.

Um die Bedeutung der in der Mitte stehenden Summe auf der rechten Seite von (171) zu verstehen, hat man zu beachten, daß infolge der eingeführten Bedingung, daß das ganze Gelenksystem nur Drehungen um eine zu den Gelenkachsen parallele Achse durch den festen Punkt O_1 ausführen soll, der Gelenkmittelpunkt $G_{h-1,h}$ eine Beschleunigung $\overline{g}_{h-1,h}$ erfährt, welche durch die Vektorsumme

$$(172) \qquad \overline{g}_{h-1,h} = \sum_1^{h-1} [\overline{l_j \varphi_j''} + \overline{l_j \varphi_j'^2}]$$

bestimmt wird. Da c_h den Abstand des Hauptpunktes H_h vom Gelenkmittelpunkte $G_{h-1,h}$ des $h$ten Gliedes darstellt, so ist leicht zu erkennen, daß die in der Mitte stehende Summe auf der rechten Seite von (171) das Drehungsmoment bedeutet, welche eine im Hauptpunkte H_h angreifend zu denkende Kraft $-\overline{m_0 g_{h-1,h}}$ in bezug auf die Gelenkachse $G_{h-1,h}$ ausübt; diese Kraft hat infolge des negativen Vorzeichens eine Richtung, die der Richtung der Beschleunigung $\overline{g}_{h-1,h}$ des Gelenkmittelpunktes $G_{h-1,h}$ entgegengesetzt ist.

Da Q_{φ_h} das resultierende Drehungsmoment der Kräfte des $h$ten reduzierten Systems in bezug auf dieselbe Gelenkachse $G_{h-1,h}$ darstellt, und auch das auf der linken Seite der Gleichung (171) stehende Trägheitsmoment $m_0 \lambda_h^2$ des $h$ten reduzierten Systems sich auf die

gleiche Gelenkachse bezieht, so sagen die Bewegungsgleichungen (171) aus, daß im vorliegenden Falle beschränkter Beweglichkeit des Gelenksystems das $h$te reduzierte System unter der Einwirkung der ihm angehörenden Kräfte und der beiden in $G_{h,h+1}$ und H_h angreifend zu denkenden Kräfte $-\overline{E}_{r_{h+1,n}}$ und $-m_0\overline{g_{h-1,h}}$ sich so um die Gelenkachse $G_{h-1,h}$ dreht, als ob diese Achse im Raume feststände. Die Kraft $-\overline{E}_{r_{h+1,n}}$ gibt dabei den Einfluß der Bewegung des an $G_{h,h+1}$ hängenden Teilsystems, und die Kraft $-m_0\overline{g_{h-1,h}}$ den Einfluß der Eigenbewegung der Gelenkachse $G_{h-1,h}$ auf die Bewegungen des $h$ten reduzierten Systems an.

Zu dem gleichen Resultat gelangt man auch, wenn man von der Interpretation der Bewegungsgleichungen des Gelenksystems für den Fall freier Beweglichkeit (vgl. den Satz auf Seite 131) ausgeht. Man ist dann nur genötigt, den am Gelenksystem angreifenden Kräften im festen Punkte O_1 noch eine Kraft hinzuzufügen, welche als Reaktion der festen Achse in O_1 gegen den auf dieselbe ausgeübten Druck aufzufassen ist und diesem Drucke entgegengesetzt gleich sein muß. Am einfachsten läßt sich diese Reaktionskraft in O_1 aus der Tatsache ableiten, daß sie wie eine äußere Kraft auf das Gelenksystem einwirkt und daher im Verein mit den übrigen äußeren Kräften des Systems dem Gesamtschwerpunkte desselben seine Beschleunigung γ_0 erteilt, welche im vorliegenden Falle beschränkter Beweglichkeit durch die Vektorsumme

$$\overline{\gamma}_0 = \sum_1^n{}^j [\overline{c_j\varphi_j''} + \overline{c_j\varphi_j'^2}] \tag{173}$$

angegeben wird, wobei insbesondere unter c_1 wieder die vom festen Punkte O_1 nach dem Hauptpunkte H_1 des ersten Gliedes führende Hauptstrecke zu verstehen ist.

Bezeichnet man wie früher die Reaktionskraft in O_1 mit $\overline{\Gamma}_1$ und die Vektorsumme aller übrigen äußeren Kräfte des Gelenksystems mit $\sum\overline{K}$, so hat man demnach für die Reaktionskraft $\overline{\Gamma}_1$ die Formel

$$\overline{\Gamma}_1 = m_0 \sum_1^n{}^j [\overline{c_j\varphi_j''} + \overline{c_j\varphi_j'^2}] - \sum \overline{K}. \tag{174}$$

Dieselbe bildet die Verallgemeinerung der Formel (108) für den Fall des n-gliedrigen ebenen Gelenksystems; denn die erste Klammer auf der rechten Seite stellt auch hier die Effektivkraft $\overline{E}_0$ des Gesamtschwerpunktes dar.

Daß man die beim dreigliedrigen Gelenksystem angestellten Betrachtungen nur auf das n-gliedrige System anzuwenden braucht, um wieder zu einer elementaren Ableitung der Bewegungsgleichungen zu gelangen, ist leicht einzusehen. Es soll daher auf die früheren Aus-

führungen verwiesen werden. Als Resultat dieser Betrachtungen ergeben sich unter anderem die folgenden für jedes ebene n-gliedrige Gelenksystem ganz allgemein gültigen Sätze über die Bewegungen der einzelnen Glieder des Systems, welche besonders für die Anwendungen auf die Bewegungen des menschlichen Körpers von Wert sind.

Satz: Bei der freien Bewegung des n-gliedrigen ebenen Gelenksystems kann man die Bewegung jedes einzelnen Gliedes dadurch zu der Bewegung eines von den übrigen Gliedern losgelösten starren Körpers machen, daß man außer den direkt an ihm angreifenden Kräften nach jedem Gelenkmittelpunkte dieses Gliedes die an dem anhängenden Teilsystem angreifenden Kräfte ohne Änderung ihrer Stärke und Richtung verlegt denkt und außerdem noch eine Kraft hinzufügt, welche der **absoluten** Effektivkraft des Schwerpunktes des anhängenden Teilsystems entgegengesetzt gleich ist.

Dieser Satz ist ähnlich wie die oben (vgl. Seite 131) angeführte Interpretation der letzten n Bewegungsgleichungen (163). Derselbe bezieht sich aber nicht auf die Bewegung der reduzierten Systeme, sondern auf die der Glieder selbst; dementsprechend kommt dabei nicht die zum Mittelpunkte des Verbindungsgelenks relative, sondern die absolute Effektivkraft des Schwerpunktes eines jeden an dem Gliede hängenden Teilsystems in Betracht. Dabei ist unter der absoluten Effektivkraft dieses Schwerpunktes das Produkt aus seiner absoluten Beschleunigung und der Masse des Teilsystems zu verstehen.

Der Satz gilt, wie angegeben, ganz allgemein, d. h. also auch im Falle beschränkter Beweglichkeit des Gelenksystems; nur muß man dabei immer dem System die Kräfte hinzufügen, welche die Bedingungen für die Bewegung erzwingen. Führt man diese Bedingungskräfte nicht explizite ein, so erfährt der Satz in jedem Falle eine besondere Modifikation. So lautet er z. B. in dem Falle, daß das ganze Gelenksystem sich nur um eine zu den Gelenkachsen parallele Achse durch irgend einen festen Punkt eines Gliedes drehen kann, folgendermaßen:

Satz: Bleibt während der Bewegung des n-gliedrigen ebenen Gelenksystems ein Punkt in irgend einem Gliede fest, so dreht sich jedes Glied, dem der feste Punkt nicht angehört, so um seine dem festen Punkte innerhalb des Systems am nächsten liegende Gelenkachse, als ob außer seinen Kräften noch an seinem anderen Gelenkmittelpunkte die Kräfte des anhängenden Teilsystems und eine der absoluten Effektivkraft dieses Teilsystems entgegengesetzt gleiche Kraft angebracht wären, in seinem eignen Schwerpunkte aber außerdem eine Kraft angriffe, welche bestimmt wird

durch das Produkt seiner Masse mit einer Beschleunigung, die der Beschleunigung seines dem festen Punkte zugekehrten Gelenkmittelpunktes entgegengesetzt gleich ist. Das Glied, dem der feste Punkt angehört, dreht sich um die zu den Gelenkachsen parallele Achse durch diesen Punkt dagegen so, als ob nur in seinen Gelenkmittelpunkten die Kräfte der anhängenden Teilsysteme und die zu den absoluten Effektivkräften der Schwerpunkte dieser Teilsysteme entgegengesetzt gleichen Kräfte angebracht und den direkt an ihm angreifenden Kräften hinzugefügt wären.

Die vorstehenden Ausführungen bezogen sich zwar zunächst nur auf n-gliedrige ebene Gelenksysteme, bei denen jedes Glied höchstens mit zwei anderen gelenkig verbunden ist und auch in einem Gelenk nicht mehr wie zwei Glieder zusammenstoßen; außerdem war angenommen worden, daß die als Längsachse bezeichnete Verbindungsstrecke der beiden Gelenkmittelpunkte eines mittleren Gliedes durch den Schwerpunkt desselben hindurchgeht. Es ist nun nach den bisherigen ausführlichen Erörterungen leicht einzusehen, daß man alle diese zur Vereinfachung der Darstellung zunächst gemachten Voraussetzungen für das n-gliedrige ebene Gelenksystem auch fallen lassen kann, ohne daß die erhaltenen Resultate über die Bewegung der reduzierten Systeme und der einzelnen Glieder des Gelenksystems ihre Gültigkeit verlieren. Es ist also damit die Grundlage für die Kinetik aller ebenen Gelenksysteme geschaffen, so daß es sich nur noch erübrigt, die Verhältnisse bei den räumlichen Gelenksystemen der Untersuchung zu unterwerfen.

Wie schon oben angegeben wurde, genügt es, diese Untersuchung für das zweigliedrige räumliche Gelenksystem ausführlich anzustellen; denn hierbei zeigt es sich schon, inwieweit bei den räumlichen Gelenksystemen das Verhalten der einzelnen Glieder unter der Einwirkung der am System angreifenden äußeren und inneren Kräfte das gleiche ist, wie bei den ebenen Gelenksystemen, und in welcher Beziehung dasselbe in Anbetracht der komplizierteren Verhältnisse im Raume eine Modifikation erleidet. Die Übertragung der Resultate auf das allgemeine n-gliedrige räumliche Gelenksystem unterliegt dann keiner weiteren Schwierigkeit.

Bei der folgenden Untersuchung des zweigliedrigen räumlichen Gelenksystems reproduziere ich im wesentlichen die Darstellung, welche ich im 2. Abschnitt einer vor kurzem von mir veröffentlichten Arbeit[1]) über die Bewegungsgleichungen räumlicher Gelenksysteme gegeben habe. Dieselbe ist so ausführlich gehalten, wie es mir zum allgemeinen Ver-

1) Erschienen als Nr. IV des XXIX. Bandes der Abhandlungen der math.-physischen Klasse der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften.

ständnis der etwas verwickelten Verhältnisse beim räumlichen Gelenksystem unerläßlich erschien.

11. Das zweigliedrige räumliche Gelenksystem.

Die beiden Glieder 1 und 2 des räumlichen Gelenksystems seien durch ein Kugelgelenk miteinander verbunden, so daß also jedes Glied sich gegenüber dem anderen um einen Punkt, also mit drei Graden der Freiheit bewegen kann. Die Verbindungslinie des Gelenkmittelpunktes $G_{1,2}$ mit dem Schwerpunkte S_j eines Gliedes soll, wie früher, als Längsachse des letzteren bezeichnet sein. Außerdem werde zunächst der Einfachheit halber angenommen, daß die Längsachse eines jeden Gliedes eine Hauptachse des zu seinem Schwerpunkte gehörenden Trägheitsellipsoids sei. Durch diese Voraussetzung, welche eine ganz wesentliche Vereinfachung der ohnehin ziemlich ausgedehnten Formeln nach sich zieht, wird die Verwendbarkeit der abzuleitenden Formeln für viele Probleme der Bewegungsphysiologie deshalb nicht beeinträchtigt, weil dieselbe wenigstens bei den einzelnen Extremitätenabschnitten des menschlichen Körpers mit großer Annäherung erfüllt ist.

a) Die allgemeinen Koordinaten des Systems.

Wenn ein derartiges zweigliedriges Gelenksystem sich ganz frei im Raume bewegen kann, so besitzt es neun Freiheitsgrade. Es muß sich daher seine Gestalt und Lage im Raume durch neun allgemeine Koordinaten eindeutig bestimmen lassen. Hierzu verwendet man am zweckmäßigsten drei räumliche Koordinaten, welche den Ort des Gesamtschwerpunktes, und außerdem für jedes Glied drei Winkel, welche seine Orientierung im Raume angeben.

Dieser Koordinatenbestimmung sei ein ruhendes räumliches Koordinatensystem (x, y, z) zugrunde gelegt, dessen Achsen aufeinander senkrecht stehen. Die x-Achse und y-Achse mögen, wie es Figur 21 andeutet, in einer horizontalen Ebene liegen, und die vertikale z-Achse soll vom Koordinatenanfangspunkte O aus nach unten positiv gerechnet werden. Die Koordinaten des Gesamtschwerpunktes S_0 seien in diesem System x_0, y_0, z_0. Die Orientierung eines jeden der beiden Glieder wird am einfachsten durch die sogenannten Eulerschen unsymmetrischen Winkel bestimmt; dieselben seien für das erste Glied mit φ_1, ϑ_1, ϱ_1 und für das zweite Glied mit φ_2, ϑ_2, ϱ_2 bezeichnet.[1]) Dabei möge bei jedem Gliede φ_j den Winkel angeben, welchen die positive Richtung seiner Längsachse mit der nach unten gerichteten

1) In der Regel werden für diese drei Winkel nach dem Vorgange von Euler bezüglich die Buchstaben ϑ, ψ, φ verwendet. Daß hier an Stelle von ϑ der Buchstabe φ, an Stelle von ψ der Buchstabe ϑ und an Stelle von φ der Buchstabe ϱ gesetzt wurde, ist nur dem Umstand zuzuschreiben, daß schon in früheren Arbeiten von mir die Winkel in dieser Weise eingeführt worden sind.

Vertikalen, d. h. also mit der Richtung der positiven z-Achse bildet. Als positive Richtung einer Längsachse soll wie früher diejenige genommen sein, in welcher dieselbe durchlaufen wird, wenn man vom freien Ende des ersten Gliedes aus über den Gelenkmittelpunkt $G_{1,2}$ hinweg nach dem freien Ende des zweiten Gliedes zieht. Denkt man weiter durch jede Längsachse eine Vertikalebene gelegt (in Figur 21 die Ebenen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$), so wird dieselbe im allgemeinen gegen die vertikale yz-Ebene des Koordinatensystems geneigt sein; der Winkel, den die erstere mit der letzteren bildet, sei ϑ_j. Dieser kann auch gedeutet werden als Winkel zwischen den etwa vom Hauptpunkte des Gliedes aus gezogenen Normalen zu diesen beiden Vertikalebenen, wobei die Normale auf der yz-Ebene in der Richtung der positiven x-Achse und die Normale auf der Ebene $\mathfrak{E}_j$ nach der Seite errichtet werden mag, von welcher aus die positive Richtung der Längsachse des Gliedes im umgekehrten Sinne der Uhrzeigerbewegung gegen die nach unten gerichtete positive z-Achse um den Winkel φ_j gedreht erscheint. Dieser zur Ebene $\mathfrak{E}_j$ normale Halbstrahl soll unter Verwendung einer von Klein und Sommerfeld eingeführten Bezeichnungsweise[1]) die Knotenlinie des Hauptpunktes genannt werden. Hierdurch hat man ein einfaches Mittel, dem Winkel ϑ_j ein bestimmtes Vorzeichen beizulegen, indem man festsetzt, daß derselbe positiv genommen werden soll, wenn die Knotenlinie des Hauptpunktes von der Seite aus gesehen, nach welcher die positive z-Achse geht, d. h. also von unten, im umgekehrten Sinne des Uhrzeigers gegen die positive x-Achse um diesen Winkel gedreht erscheint. Dem Winkel φ_j braucht man dagegen nur positive Werte beizulegen.

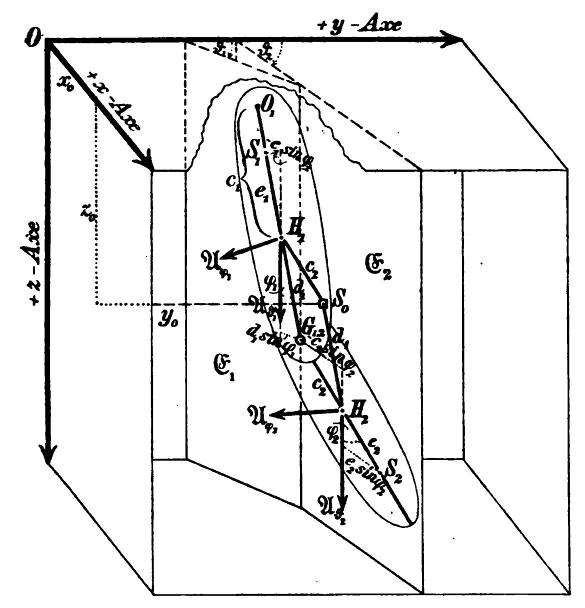


Fig. 21.

1) Vgl. F. Klein und A. Sommerfeld, Über die Theorie des Kreisels. Heft I. Leipzig 1897. Seite 17.

Durch die beiden Winkel φ_j und ϑ_j ist nun nicht nur die Richtung einer jeden Längsachse, sondern auch ihre Lage gegenüber dem Gesamtschwerpunkte S_0 schon vollkommen bestimmt. Dies läßt sich leicht erkennen, wenn man die Hauptpunkte H_j der beiden Glieder zu Hilfe nimmt.

Der Hauptpunkt H_1 liegt auf der Längsachse des ersten Gliedes zwischen S_1[1]) und $G_{1,2}$; seine Lage zu beiden wird durch die in der positiven Richtung der Längsachse des ersten Gliedes positiv zu nehmenden Vektoren $\overline{S_1 H_1}$ und $\overline{H_1 G_{1,2}}$ bestimmt, für welche wieder kurz die Bezeichnungen e_1 und d_1 eingeführt sein sollen. Zur Berechnung der Länge dieser Vektoren dienen die unmittelbar aus der Bedeutung des ersten Hauptpunktes hervorgehenden Formeln

$$(175) \qquad \begin{cases} m_0 d_1 = m_1 s_1 \\ m_2 d_1 = m_1 e_1 \\ m_0 e_1 = m_2 s_1, \end{cases}$$

wobei wie früher m_1, m_2 und m_0 die Massen der beiden Glieder und des ganzen Systems, und s_1 die Länge des Vektors $\overline{S_1 G_{1,2}}$ bedeuten sollen.

Der Hauptpunkt H_2 liegt auf der Längsachse des zweiten Gliedes zwischen $G_{1,2}$ und S_2. Bezeichnet man wieder die Vektoren $\overline{G_{1,2} H_2}$, $\overline{G_{1,2} S_2}$ und $\overline{S_2 H_2}$ bezüglich mit c_2, r_2 und e_2, so hat man zur Bestimmung der Lage von H_2 die Formeln

$$(176) \qquad \begin{cases} m_0 c_2 = m_2 r_2 \\ m_1 c_2 = - m_2 e_2 \\ m_0 e_2 = - m_1 r_2. \end{cases}$$

Sobald der Ort des Gesamtschwerpunktes feststeht, läßt sich mit Hilfe der Winkel φ_1, ϑ_1 und φ_2, ϑ_2 die Lage der beiden Hauptpunkte leicht auffinden. Man braucht nur durch S_0 zwei Ebenen gelegt zu denken, welche mit der yz-Ebene die Winkel ϑ_1 und ϑ_2 bilden. In der ersteren zieht man von S_0 einen Strahl, welcher gegen die nach unten gerichtete Vertikale um den Winkel φ_1 im umgekehrten Sinne des Uhrzeigers von der positiven Seite der Ebene aus gesehen erscheint. Als positive Seite der Ebene ist dabei diejenige aufzufassen, nach welcher die Normale geht, die gegen die positive x-Achse von unten gesehen im umgekehrten Sinne des Uhrzeigers um ϑ_1 gedreht erscheint. Auf diesem Strahl ist von S_0 aus

1) In Figur 21 sind die Schwerpunkte S_1 und S_2 ziemlich nahe den freien Enden der beiden Glieder angenommen worden, damit die Hauptpunkte nicht zu nahe am Gelenk zu liegen kommen, wodurch die Deutlichkeit der Figur beeinträchtigt würde.

in positiver Richtung der Vektor $\bar{d}_1$ abzutragen, um den Hauptpunkt H_2 zu erhalten. In der zweiten Ebene hat man von S_0 aus einen Strahl zu ziehen, welcher gegen die nach unten gerichtete Vertikale von der positiven Seite dieser Ebene aus gesehen im umgekehrten Sinne des Uhrzeigers um den Winkel φ_2 gedreht erscheint; auf der Rückwärtsverlängerung dieses Strahles ist die Strecke c_2, d. h. also es ist von S_0 aus der Vektor $-\bar{c}_2$ abzutragen, um zu dem Hauptpunkte H_1 des ersten Gliedes zu gelangen. Zieht man nun durch H_1 zu dem zuerst konstruierten Strahl und durch H_2 zu dem zweiten Strahl je eine Parallele, so stellen dieselben die Längsachsen der beiden Glieder dar; dieselben müssen sich, wie man sofort einsieht, in einem Punkte schneiden, nämlich in dem Gelenkmittelpunkte $G_{1,2}$.

Aus dieser Konstruktion der Längsachsen ist deutlich zu erkennen, daß die durch dieselben gehenden Vertikalebenen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ (vgl. Fig. 21) im allgemeinen nicht durch den Gesamtschwerpunkt hindurchgehen; der letztere liegt bei der in Figur 21 angedeuteten Stellung dieser Ebenen auf der positiven Seite von beiden.

Durch die Längsachsen und den sie verbindenden Gelenkmittelpunkt ist nun die Orientierung der beiden Glieder im Raume noch nicht vollkommen gegeben; denn bei der vorausgesetzten Art der Gelenkverbindung kann jedes der beiden Glieder noch beliebig um seine Längsachse gedreht werden, ohne daß dadurch die Lage der letzteren und der Ort des Gesamtschwerpunktes im Raume geändert würden. Die Orientierung der beiden Glieder wird erst eine bestimmte durch die Angabe der Winkel ϱ_1 und ϱ_2. Um die Bedeutung dieser beiden Winkel zu verstehen, denke man sich innerhalb jedes der beiden Glieder eine, an und für sich beliebige, durch seine Längsachse hindurchgehende Ebene festgelegt; dieselbe soll so gewählt werden, daß sie außer der Längsachse noch eine zweite Hauptträgheitsachse für den Schwerpunkt des Gliedes und damit auch für den Hauptpunkt desselben enthält. Der Winkel ϱ_j gibt nun an, um wieviel in einer Stellung des Gliedes diese Ebene gegen die durch die Längsachse hindurchgehende Vertikalebene gedreht erscheint. Um den Drehungssinn bequemer in Rechnung ziehen zu können, ist es auch hier zweckmäßig, den Winkel ϱ_j aus der gegenseitigen Neigung der etwa im Hauptpunkte des Gliedes zu errichtenden Normalen zu diesen beiden Ebenen abzuleiten. Es wurde schon oben für die eine als Knotenlinie des Hauptpunktes bezeichnete Normale die positive Richtung festgelegt; es ist daher nur noch nötig, auch für die innerhalb des Gliedes angenommene Ebene eine Seite festzusetzen, nach der hin ihre Normale, die natürlich ebenso wie die Ebene selbst im Gliede festliegt, positiv gerechnet werden soll. Wenn auch nur die letztere der beiden Normalen dem Gliede unverrückbar angehört, so liegen sie doch beide stets in einer bestimmten im Gliede festen Ebene, welche

auf der Längsachse desselben senkrecht steht. Bezeichnet man als positive Seite der letzteren Ebene diejenige, nach welcher die positive Richtung der Längsachse hinweist, so hat man wieder ein einfaches Mittel, dem Winkel ϱ_j ein bestimmtes Vorzeichen zu erteilen, indem man ihn als positiv oder negativ ansieht, je nachdem von der positiven Seite dieser Ebene aus die im Gliede feste Normale im umgekehrten Sinne des Uhrzeigers oder im Sinne des Uhrzeigers gegen die Knotenlinie um den Winkel ϱ_j gedreht erscheint.

Wie man sieht, ist es nur nötig, zur Bestimmung der Orientierung eines Gliedes im Raume zwei Gerade innerhalb desselben festzulegen; als solche wurden gewählt die Längsachse und ein zu dieser senkrechter, vom Hauptpunkte ausgehender Halbstrahl, der kurz erste Querachse des Gliedes genannt werden mag. Es soll nun als Nullstellung eines Gliedes diejenige bezeichnet sein, bei welcher die positive Richtung der Längsachse desselben die Richtung der positiven z-Achse, und die erste Querachse die Richtung der positiven x-Achse des ruhenden Koordinatensystems besitzt. Dann wird ein anderer ebenfalls im Gliede fester und zu der Längsachse desselben senkrechter Halbstrahl in die Richtung der positiven y-Achse des ruhenden Koordinatensystems fallen; derselbe sei als zweite Querachse des Gliedes bezeichnet. Die erste und zweite Querachse und die Längsachse eines Gliedes können natürlich als die Achsen eines dem Gliede fest angehörenden rechtwinkligen Koordinatensystems aufgefaßt werden.

Da sich bei vertikaler Stellung der Längsachse ∞^1 Vertikalebenen durch dieselbe legen lassen, so ist der Winkel ϑ hierbei nach der bisherigen Erklärung unbestimmt, solange nicht noch über denselben etwas festgesetzt ist. Es soll daher dem Winkel ϑ in der Nullstellung des Gliedes der Wert Null beigelegt werden, womit ausgedrückt ist, daß unter allen Vertikalebenen durch die Längsachse in der Nullstellung die durch die zweite Querachse gehende für die Bestimmung von ϑ verwendet werden soll. Die vom Hauptpunkte des Gliedes ausgehende Knotenlinie besitzt also dann in der Nullstellung die Richtung der positiven x-Achse und fällt demnach in dieser Stellung mit der ersten Querachse zusammen, so daß hierbei der Winkel ϱ den Wert Null besitzt. Da auch der Winkel φ infolge der vertikal nach unten gehenden Richtung der Längsachse verschwindet, so ist also die Nullstellung eines Gliedes dadurch charakterisiert, daß alle drei Winkel den Wert Null annehmen.

Befinden sich beide Glieder in der Nullstellung, so wird die Stellung des ganzen Gelenksystems, welche dann ebenfalls eine Nullstellung desselben genannt sein soll, allein durch die drei rechtwinkligen Koordinaten x_0, y_0, z_0 des Gesamtschwerpunktes eindeutig bestimmt. Es gibt also demnach ∞^3 Nullstellungen des Gelenksystems,

die durch reine Translationsbewegungen ineinander übergeführt werden können.

Bei einer Nullstellung des zweigliedrigen Gelenksystems liegen die beiden Längsachsen in einer vertikalen Geraden, welche auch den Gesamtschwerpunkt S_0 enthält. Will man nun aus dieser Stellung in eine beliebige andere durch bestimmte Werte der Winkel φ_1, ϑ_1, ϱ_1 und φ_2, ϑ_2, ϱ_2 charakterisierte Stellung des Systems ohne Änderung der Lage des Gesamtschwerpunktes übergehen, so kann man nach der im Abschnitt 9 unter c auseinandergesetzten Eigenschaft der Hauptpunkte so verfahren, daß man zunächst das erste Glied um seinen Hauptpunkt H_1 dreht und gleichzeitig das zweite nur Translationsbewegungen ausführen läßt, und darauf das zweite Glied um seinen Hauptpunkt H_2 dreht mit gleichzeitiger Translationsbewegung des ersten Gliedes. Diese beiden Drehungen gestalten sich insbesondere in folgender Weise:

Zuerst dreht man das erste Glied allein um seine Längsachse, von unten gesehen im umgekehrten Sinne des Uhrzeigers, um den Winkel ϑ_1, indem man dabei die Knotenlinie seines Hauptpunktes zunächst mit dem Gliede fest verbunden denkt; dadurch nimmt die stets horizontal bleibende Knotenlinie eine Richtung an, welche gegen die positive x-Achse ebenfalls um den Winkel ϑ_1 geneigt ist. Da das zweite Glied diese Drehung nicht mitmachen soll, so bleibt es unterdes ganz in Ruhe, so daß nur eine entsprechende Bewegung im Gelenk $G_{1,2}$ eintritt. Darauf dreht man nun das erste Glied um die Knotenlinie seines Hauptpunktes um den Winkel φ_1 und bringt dadurch die Längsachse des ersten Gliedes in die gewünschte Richtung. Das zweite Glied kann während dieser Drehung nicht in Ruhe bleiben; es begleitet dieselbe mit einer Translationsbewegung nach Maßgabe der Bewegung des Gelenkmittelpunktes $G_{1,2}$. Dieser bewegt sich in der zur Knotenlinie senkrechten Ebene auf einem Kreis um H_1 mit dem Radius d_1. Bis hierher war die Knotenlinie fest mit dem ersten Gliede verbunden zu denken. Bei der nun folgenden Drehung des ersten Gliedes um den Winkel ϱ_1, welche um die Längsachse desselben stattfindet, wird dagegen dieser Zusammenhang aufgehoben; denn die Knotenlinie beteiligt sich an dieser Drehung nicht, sondern behält im Raume ihre Stellung bei. Infolgedessen wird die im Gliede feste erste Querachse des ersten Gliedes, welche bis dahin mit der Knotenlinie zusammenfiel, durch diese Drehung von der Knotenlinie abgelöst, so daß sie schließlich gegen dieselbe um den Winkel ϱ_1 geneigt ist. Während dieser letzten Drehung des ersten Gliedes um seine Längsachse bleibt das zweite Glied wiederum im Raume fest, so daß abermals nur eine Bewegung im Gelenk $G_{1,2}$ eintritt.

Es findet also die durch den Winkel ϑ_1 bestimmte Drehung um eine im Raume feste Achse $\mathfrak{A}_{\vartheta_1}$ (vgl. Fig. 21) statt, welche die Rich-

tung der positiven z-Achse besitzt. Die durch den Winkel ϱ_1 gemessene Drehung geschieht dagegen um eine im Gliede feste Achse $\mathfrak{A}_{\varrho_1}$, welche mit der positiven Richtung der Längsachse zusammenfällt und daher gegen die Achse $\mathfrak{A}_{\vartheta_1}$ um den Winkel φ_1 geneigt ist. Endlich ist die Achse $\mathfrak{A}_{\varphi_1}$ für die Drehung um den Winkel φ_1 im allgemeinen weder im Raume, noch im Gliede fest; dieselbe, welche durch die Knotenlinie des ersten Gliedes gebildet wird, steht auf der Ebene der beiden Achsen $\mathfrak{A}_{\vartheta_1}$ und $\mathfrak{A}_{\varrho_1}$ senkrecht.

Durch die genannten drei Drehungen hat zwar das erste Glied die richtige Orientierung im Raume erlangt, es befindet sich aber noch nicht in seiner richtigen Lage gegenüber dem Gesamtschwerpunkte S_0; die letztere wird erst erreicht durch eine Translationsbewegung, die neben der Drehung des zweiten Gliedes um seinen Hauptpunkt einhergeht. Infolge der Translationsbewegung, welche das zweite Glied bei der Drehung des ersten ausführen mußte, ist der Hauptpunkt H_2 dagegen schon in seine richtige Stellung gekommen, so daß es nur noch der Drehung um denselben bedarf, um dem zweiten Gliede auch die richtige Orientierung im Raume zu geben. Dieselbe kann man in ganz entsprechender Weise wie die Drehung des ersten Gliedes in drei Schritte zerlegen.

Zuerst dreht man um die im Raume feste und vertikal nach unten gerichtete Achse $\mathfrak{A}_{\vartheta_2}$ des Hauptpunktes H_2 um den Winkel ϑ_2. Dadurch kommen die zunächst vereinigt zu denkende Querachse und die Knotenlinie des zweiten Gliedes in eine neue ebenfalls noch horizontale Richtung, welche gegen die positive x-Achse um diesen Winkel ϑ_2 geneigt ist. Darauf dreht man das Glied um die Knotenlinie $\mathfrak{A}_{\varphi_2}$ des Hauptpunktes H_2 um den Winkel φ_2, und endlich um die Längsachse $\mathfrak{A}_{\varrho_2}$ um den Winkel ϱ_2. Durch die letztere Drehung wird die Querachse aus ihrer bis dahin horizontalen Lage herausgedreht, während die Knotenlinie ihre Stellung beibehalten soll, so daß schließlich beide um den Winkel ϱ_2 gegeneinander geneigt erscheinen. Während der ersten und letzten dieser drei Drehungen behält das erste Glied die durch seine Drehung erlangte Stellung im Raume bei. Durch die Drehung um $\mathfrak{A}_{\varphi_2}$ wird es dagegen zu einer Translationsbewegung veranlaßt, welche durch die Bewegung des Gelenkmittelpunktes $G_{1,2}$ bestimmt wird. Diese Bewegung von $G_{1,2}$ findet auf einem vertikalen Kreise um H_2 statt, dessen Radius die Länge des Vektors c_2 hat.

Auch für die drei Drehungsachsen $\mathfrak{A}_{\vartheta_2}$, $\mathfrak{A}_{\varphi_2}$ und $\mathfrak{A}_{\varrho_2}$ gilt, daß die erste dem ruhenden Raume und die letzte dem zweiten Gliede angehört, während die Achse $\mathfrak{A}_{\varphi_2}$ weder im Raume noch im Gliede festliegt und in ihrer Richtung von der Größe des Drehungswinkels ϑ_2 beeinflußt wird. Die Achsen $\mathfrak{A}_{\vartheta_2}$ und $\mathfrak{A}_{\varrho_2}$ bilden den Winkel φ_2 miteinander, und die Achse $\mathfrak{A}_{\varphi_2}$ steht auf der Ebene der beiden ersten Achsen senkrecht.

b) Die Ableitung der lebendigen Kraft.

Das zweigliedrige Gelenksystem sei in einer ganz beliebigen Bewegung im Raume begriffen; man soll für dieses räumliche System die lebendige Kraft zu irgend einer Zeit bestimmen. Um diese Aufgabe zu lösen, sondert man zweckmäßigerweise wieder von einer Translationsbewegung, welche das ganze System nach Maßgabe der Bewegung des Gesamtschwerpunktes S_0 ausführt, die Bewegung der beiden Glieder relativ zu S_0 ab und bestimmt für beide Arten der Bewegung des Systems die lebendige Kraft. Die gesamte lebendige Kraft stellt sich dann wieder einfach als Summe dieser beiden Bestandteile dar.

Bezeichnet man die drei in der Richtung der Koordinatenachsen liegenden Komponenten der Geschwindigkeit v_0 des Gesamtschwerpunktes S_0 mit x_0', y_0', z_0', worunter einfach die Differentialquotienten der drei Koordinaten von S_0 nach der Zeit zu verstehen sind, so besitzt der erste Teil der gesamten lebendigen Kraft des Systems den Wert

$$\tag{177} \tfrac{1}{2} m_0 (x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2).$$

Der andere Bestandteil der lebendigen Kraft, der als die innere lebendige Kraft des Gelenksystems aufgefaßt werden kann, setzt sich aus den lebendigen Kräften zusammen, welche die beiden Glieder in ihren Bewegungen um den Gesamtschwerpunkt besitzen. Jede dieser beiden lebendigen Kräfte läßt sich wiederum dadurch in zwei Teile zerlegen, daß man von einer Translationsbewegung des betreffenden Gliedes nach Maßgabe der Bewegung seines Schwerpunktes S_j relativ zu S_0 die Drehung desselben um seinen Schwerpunkt absondert. Demnach baut sich die innere lebendige Kraft des ganzen Gelenksystems aus vier Summanden auf.

Die Geschwindigkeiten der zu S_0 relativen Bewegung der beiden Schwerpunkte S_1 und S_2 lassen sich nun in verhältnismäßig sehr einfacher Weise mit Hilfe der Hauptpunkte und Hauptstrecken der beiden Glieder durch die Winkelgeschwindigkeiten ausdrücken, mit denen die beiden Längsachsen sich um die durch ihre Hauptpunkte gehenden Achsen $\mathfrak{A}_\varphi$ und $\mathfrak{A}_\vartheta$ drehen.

Um dies zu erreichen, braucht man nur dem Gelenksystem eine unendlich kleine Verrückung um S_0 zu erteilen, durch welche die Winkel φ_1, ϑ_1 und φ_2, ϑ_2 unendlich wenig geändert werden, während die Winkel ϱ_1 und ϱ_2 vorläufig konstant gehalten werden können, da sie auf die Lage der Schwerpunkte keinen Einfluß ausüben. Die Änderungen der vier Winkel seien bezüglich $d\varphi_1$, $d\vartheta_1$, $d\varphi_2$ und $d\vartheta_2$. Nach dem unter 9c) allgemein bewiesenen Satze kann jede derartige Verrückung des ganzen Gelenksystems relativ zum Gesamtschwerpunkte in eine unendlich kleine Drehung des ersten Gliedes um seinen

Hauptpunkt H_1 mit gleichzeitiger Translationsbewegung des zweiten Gliedes, und eine unendlich kleine Drehung des letzteren um seinen Hauptpunkt H_2 mit gleichzeitiger Translationsbewegung des ersten Gliedes zerlegt werden. Die Drehung des ersten Gliedes um H_1 setzt sich bei konstantem ϱ_1 nach 11a) aus einer Drehung um die Achse $\mathfrak{A}_{\varphi_1}$ um den Winkel $d\varphi_1$ und einer Drehung um die Achse $\mathfrak{A}_{\vartheta_1}$ um den Winkel $d\vartheta_1$ zusammen. In entsprechender Weise kann die Drehung des zweiten Gliedes um H_2 bei konstantem ϱ_2 aus zwei Drehungen um die Achsen $\mathfrak{A}_{\varphi_2}$ und $\mathfrak{A}_{\vartheta_2}$ mit den Drehungswinkeln $d\varphi_2$ und $d\vartheta_2$ zusammengesetzt angenommen werden.

Der Schwerpunkt S_1 des ersten Gliedes erfährt nun infolge der Drehungen des ersten Gliedes bezüglich unendlich kleine Verrückungen von der Größe $e_1 \cdot d\varphi_1$ und $e_1 \sin\varphi_1 \cdot d\vartheta_1$ (vgl. Figur 21), von denen die erstere in der Ebene $\mathfrak{E}_1$ liegt und senkrecht zur Längsachse des ersten Gliedes gerichtet ist, während die letztere senkrecht auf der Ebene $\mathfrak{E}_1$ steht und nach der negativen Seite derselben hinweist; diese beiden Verrückungen stehen daher aufeinander senkrecht. Infolge der mit der Drehung des zweiten Gliedes um H_2 verbundenen Translationsbewegung des ersten Gliedes erleidet S_1 weiterhin zwei Verrückungen von den Größen $c_2 \cdot d\varphi_2$ und $c_2 \sin\varphi_2 \cdot d\vartheta_2$, von denen die eine in der Ebene $\mathfrak{E}_2$ liegt und senkrecht auf der Längsachse des zweiten Gliedes steht, während die andere senkrecht zu $\mathfrak{E}_2$ nach der negativen Seite dieser Ebene hin gerichtet ist.

Der Schwerpunkt S_2 des zweiten Gliedes erfährt infolge der mit der Drehung des ersten Gliedes um H_1 verbundenen Translationsbewegung seines Gliedes und der Drehung des letzteren um H_2 ebenfalls im ganzen vier Verrückungen, deren Größen, wie man leicht aus Figur 21 erkennt, bezüglich $d_1 \cdot d\varphi_1$, $d_1 \sin\varphi_1 \cdot d\vartheta_1$, $-e_2 \cdot d\varphi_2$ und $-e_2 \sin\varphi_2 \cdot d\vartheta_2$ sind. Jede dieser vier Verrückungskomponenten besitzt genau die entgegengesetzte Richtung wie die aus der gleichen Drehung hervorgehende Verrückungskomponente des Schwerpunktes S_1. Bezeichnet man bei positivem unendlich kleinen Drehungswinkel eine Verrückung als positiv, wenn der Punkt der Längsachse, welcher sie ausführt, in positiver Richtung von dem Drehpunkte entfernt liegt, so hat man also das Resultat, daß die Gesamtverrückung des Schwerpunktes S_1 relativ zu S_0 durch die Vektorsumme

$$(178) \qquad -\overline{e_1 \cdot d\varphi_1} - \overline{e_1 \sin\varphi_1 \cdot d\vartheta_1} - \overline{c_2 \cdot d\varphi_2} - \overline{c_2 \sin\varphi_2 \cdot d\vartheta_2}$$

und die Gesamtverrückung des Schwerpunktes S_2 relativ zu S_0 durch die Vektorsumme

$$(179) \qquad \overline{d_1 \cdot d\varphi_1} + \overline{d_1 \sin\varphi_1 \cdot d\vartheta_1} - \overline{e_2 \cdot d\varphi_2} - \overline{e_2 \sin\varphi_2 \cdot d\vartheta_2}$$

dargestellt wird.

Aus diesen Verrückungen erhält man nun durch Division mit

dem Zeitdifferential dt die zum Gesamtschwerpunkte S_0 relativen Geschwindigkeiten v_1 und v_2 der Schwerpunkte S_1 und S_2. Bezeichnet man die hierbei auftretenden Differentialquotienten der vier Winkel φ_1, ϑ_1, φ_2, ϑ_2 nach der Zeit kurz durch einen rechts oben angebrachten Strich, so hat man demnach für die zu S_0 relative Geschwindigkeit des Schwerpunktes S_1

$$(180)\quad \overline{v_1} = -\left[\overline{e_1 \cdot \varphi_1'} + \overline{e_1 \sin\varphi_1 \cdot \vartheta_1'} + \overline{c_2 \cdot \varphi_2'} + \overline{c_2 \sin\varphi_2 \cdot \vartheta_2'}\right]$$

und für die zu S_0 relative Geschwindigkeit des Schwerpunktes S_2

$$(181)\quad \overline{v_2} = \overline{d_1 \cdot \varphi_1'} + \overline{d_1 \sin\varphi_1 \cdot \vartheta_1'} - \overline{e_2 \cdot \varphi_2'} - \overline{e_2 \sin\varphi_2 \cdot \vartheta_2'}.$$

Für die hieraus resultierenden Bestandteile der inneren lebendigen Kraft hat man nun die Quadrate der beiden Geschwindigkeiten bezüglich mit $\frac{1}{2}m_1$ und $\frac{1}{2}m_2$ zu multiplizieren. Da nur das Quadrat der Geschwindigkeit $\overline{v}_1$ hier in Frage kommt, so kann man auf der rechten Seite von (180) auch das negative Zeichen fortlassen und bei der Bildung des Quadrates die einzelnen Geschwindigkeitskomponenten so behandeln, als ob sie die Komponenten der entgegengesetzt gleichen Geschwindigkeit $-\overline{v}_1$ wären und daher die gleiche Richtung wie die entsprechenden Komponenten der Geschwindigkeit $\overline{v}_2$ hätten.

Das Quadrat von $-\overline{v}_1$ bzw. $\overline{v}_2$ setzt sich zusammen aus den Quadraten der vier Summanden auf der rechten Seite von (180) und (181) und den doppelten Produkten aus je zwei derselben, multipliziert mit dem Kosinus ihres Neigungswinkels. Man hat sich daher vor allen Dingen die Werte dieser Kosinus zu verschaffen. Zu diesem Zwecke sind in Figur 22 vom Mittelpunkte C einer Kugel aus, deren Radius gleich der Längeneinheit sein möge, Halbstrahlen in der Richtung der vier Komponenten von $-\overline{v}_1$ und $\overline{v}_2$ gezogen. Die Punkte, in denen dieselbe die Kugel durchdringen, sind in der durch die Formeln (180) und (181) angegebenen Reihenfolge bezüglich mit 1, I, 2 und II bezeichnet worden. Deutet man den Neigungswinkel zwischen je zwei dieser vier Strahlen kurz durch die beiden zugehörigen Zahlen an, so hat man zunächst für (1, I) und auch (2, II) den Wert $\frac{\pi}{2}$, da nach dem Früheren sowohl die Strahlen $C1$ und CI, als auch die Strahlen $C2$ und CII aufeinander senkrecht stehen. Ferner ist der Strahl $C1$ bzw. $C2$ gegen die in Figur 22 angedeutete horizontale Äquatorebene der Einheitskugel um den Winkel φ_1 bzw. φ_2 geneigt. Zieht man von dem zum Äquator gehörenden oberen Pol P der Kugel aus größte Kreise durch 1 und 2, so sind die Bögen ($P1$) und ($P2$) die Komplemente zu φ_1 und φ_2; außerdem schneiden sich diese beiden Kreisbögen in P unter dem Winkel $\vartheta_2 - \vartheta_1$, da sie in Ebenen liegen, welche den in Fig. 21 dargestellten Ebenen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ parallel laufen. Die Ebene des Winkels (1, I) steht auf der Längsachse des ersten und die des

Winkels (2, II) auf der Längsachse des zweiten Gliedes senkrecht; daher ist der 1 mit I verbindende größte Kugelkreis gegen den Äquator um den Winkel φ_1, und der durch 2 und II gehende größte Kreis gegen den Äquator um den Winkel φ_2 geneigt, während, wie

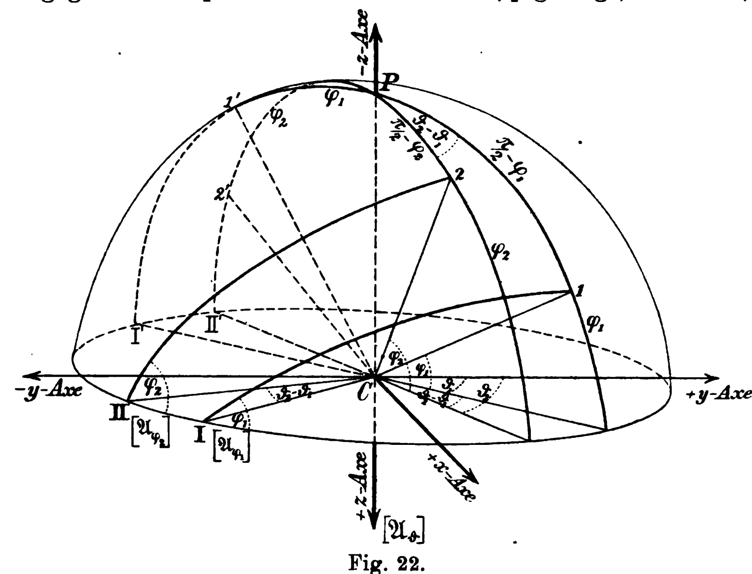


Fig. 22.

schon oben erwähnt wurde, die beiden Kreisbögen (1, I) und (2, II) selbst die Länge $\frac{\pi}{2}$ besitzen. Endlich läßt sich auch leicht einsehen, daß die Strahlen CI und CII, welche ja die Richtungen der Achsen $\mathfrak{A}_{\varphi_1}$ und $\mathfrak{A}_{\varphi_2}$ besitzen, gegeneinander um $\vartheta_2 - \vartheta_1$ geneigt sind, so daß also der dem Äquator angehörende Bogen (I, II) ebenfalls diesen Wert besitzt.

Beachtet man dies und die in Figur 22 zu erkennenden sphärischen Dreiecke (1 P 2), (I 1 II), (II 2 I), bei denen im Interesse der Übersichtlichkeit der Figur eine Seite nicht ausgezogen ist, so läßt sich nach dem Kosinussatz der sphärischen Trigonometrie leicht ableiten, daß

$$(182)\quad \begin{aligned} \cos(1, 2) &= \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) \\ \cos(1, \mathrm{I}) &= 0 \\ \cos(1, \mathrm{II}) &= -\sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) \cos\varphi_1 \\ \cos(2, \mathrm{I}) &= \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) \cos\varphi_2 \\ \cos(2, \mathrm{II}) &= 0 \\ \cos(\mathrm{I}, \mathrm{II}) &= \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1). \end{aligned}$$

Man erhält daher für das Quadrat der zu S_0 relativen Geschwin-

digkeit des Schwerpunktes S_1 den Wert:

$$
\begin{aligned}
(183)\quad v_1^2 = {} & e_1^2 \cdot \varphi_1'^2 + e_1^2 \sin^2\varphi_1 \cdot \vartheta_1'^2 + c_2^2 \cdot \varphi_2'^2 + c_2^2 \sin^2\varphi_2 \cdot \vartheta_2'^2 \\
& + 2 e_1 c_2 [\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1)] \cdot \varphi_1'\varphi_2' \\
& - 2 e_1 c_2 \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) \cdot \varphi_1'\vartheta_2' \\
& + 2 e_1 c_2 \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) \cdot \varphi_2'\vartheta_1' \\
& + 2 e_1 c_2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) \cdot \vartheta_1'\vartheta_2'
\end{aligned}
$$

und für das Quadrat der zu S_0 relativen Geschwindigkeit des Schwerpunktes S_2 den Wert:

$$
\begin{aligned}
(184)\quad v_2^2 = {} & d_1^2 \cdot \varphi_1'^2 + d_1^2 \sin^2\varphi_1 \cdot \vartheta_1'^2 + e_2^2 \cdot \varphi_2'^2 + e_2^2 \sin^2\varphi_2 \cdot \vartheta_2'^2 \\
& - 2 d_1 e_2 [\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1)] \cdot \varphi_1'\varphi_2' \\
& + 2 d_1 e_2 \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) \cdot \varphi_1'\vartheta_2' \\
& - 2 d_1 e_2 \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) \cdot \varphi_2'\vartheta_1' \\
& - 2 d_1 e_2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) \cdot \vartheta_1'\vartheta_2'.
\end{aligned}
$$

Multipliziert man (183) mit $\frac{1}{2}m_1$ und (184) mit $\frac{1}{2}m_2$, so erhält man also die beiden Beiträge zu dem Ausdruck der inneren lebendigen Kraft des zweigliedrigen Gelenksystems, welche aus der zum Gesamtschwerpunkte S_0 relativen Bewegung der Schwerpunkte S_1 und S_2 der beiden Glieder hervorgehen. Zu diesen kommen nun noch die Beiträge hinzu, welche aus der Drehung eines jeden Gliedes um seinen Schwerpunkt herrühren.

Die Drehung des ersten Gliedes um seinen Schwerpunkt S_1 findet im allgemeinen Falle räumlicher Bewegung des Gelenksystems bekanntlich um eine stetige Folge von Momentanachsen durch S_1 statt, welche ihre Lage im Gliede fortwährend ändern. Der Anteil der lebendigen Kraft, welcher in jedem Moment aus dieser Drehung entspringt, wird durch das halbe Produkt aus dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit um die Momentanachse mit dem auf dieselbe Achse bezogenen Trägheitsmoment angegeben. Da auch das Trägheitsmoment mit jeder neuen Lage der Achse im allgemeinen seinen Wert ändert, so ist es zweckmäßig, die Winkelgeschwindigkeit in drei Komponenten zu zerlegen, welche sich auf zueinander senkrechte Achsen beziehen, die im Körper fest liegen. An und für sich könnte man jedes Trippel solcher Achsen hierzu verwenden. Im Interesse möglichster Vereinfachung der Formeln empfehlen sich die drei im Glied festen Hauptträgheitsachsen des Schwerpunktes, weil dann die der Drehung um den Schwerpunkt entsprechende lebendige Kraft sich direkt als Summe der lebendigen Kräfte darstellt, welche aus der Drehung um die drei festen Achsen mit den ihnen zukommenden Geschwindigkeitskomponenten resultieren.

Nach den früher gemachten Annahmen fällt eine Hauptträgheits-

achse des Schwerpunktes mit der Längsachse des Gliedes zusammen, und die beiden anderen sind den vom Hauptpunkte ausgehenden Querachsen parallel. Die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit um die der ersten und zweiten Querachse parallelen Hauptträgheitsachsen seien bezüglich α_1 und β_1, und die zu der Längsachse gehörende sei γ_1; ferner seien die zu diesen drei Achsen gehörenden Hauptträgheitsmomente des Schwerpunktes bezüglich A_1, B_1 und C_1. Dann ist der aus der Drehung des ersten Gliedes folgende Bestandteil der lebendigen Kraft

(185) $$\tfrac{1}{2}(A_1\alpha_1^2 + B_1\beta_1^2 + C_1\gamma_1^2).$$

Die Größen α_1, β_1, γ_1 lassen sich nun leicht mit Hilfe der zu den Drehungsachsen $\mathfrak{A}_{\varphi_1}$, $\mathfrak{A}_{\vartheta_1}$, $\mathfrak{A}_{\varrho_1}$ gehörenden Winkelgeschwindigkeiten φ_1', ϑ_1', ϱ_1' bestimmen. Man hat zu diesem Zwecke nur zu beachten, daß die Drehungen um den Schwerpunkt S_1 um Achsen, welche diesen vom Hauptpunkte H_1 ausgehenden Achsen parallel sind, mit genau denselben Winkelgeschwindigkeiten vor sich gehen, so daß also diese ebenfalls als drei Komponenten der zu der Momentanachse des Schwerpunktes gehörenden Winkelgeschwindigkeit aufgefaßt werden können; die letzteren beziehen sich nur nicht auf Achsen, welche sämtlich im Gliede festliegen und aufeinander senkrecht stehen. Um die Beziehung zwischen den verschiedenen Winkelgeschwindigkeiten abzuleiten, zerlegt man am besten jede der drei Größen φ_1', ϑ_1' und ϱ_1 in Komponenten, die sich auf die drei im Gliede festen Hauptträgheitsachsen beziehen.

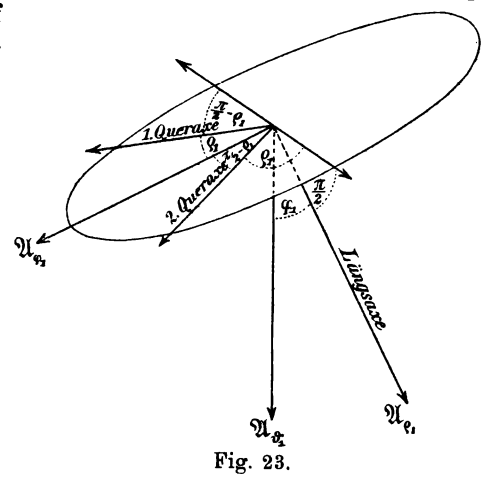


Fig. 23.

Die Achse $\mathfrak{A}_{\varphi_1}$ bildet mit der ersten Querachse den Winkel ϱ_1 und mit der zweiten den Winkel $\frac{\pi}{2} - \varrho_1$, wie man leicht aus Fig. 23 erkennt; dagegen steht sie auf der Längsachse senkrecht. Daher liefert φ_1' zu dem Werte von α_1 den Beitrag $\varphi_1' \cdot \cos\varrho_1$ und zu dem Werte von β_1 den Beitrag $\varphi_1' \cdot \sin\varrho_1$. Die Achse $\mathfrak{A}_{\vartheta_1}$ bildet mit der Längsachse den Winkel φ_1 und mit der Ebene der beiden Querachsen den Winkel $\frac{\pi}{2} - \varphi_1$; ihre Projektion auf die letztere Ebene bildet mit der ersten Querachse den Winkel $\frac{\pi}{2} - \varrho_1$, und mit der zweiten den Winkel $\pi - \varrho_1$. Aus diesem Grunde zerlegt sich ϑ_1' in die drei Komponenten

$\vartheta_1' \sin\varphi_1 \cdot \sin\varrho_1$; $-\vartheta_1' \sin\varphi_1 \cos\varrho_1$ und $\vartheta_1' \cos\varphi_1$. Da endlich die Achse von ϱ_1' mit der Längsachse zusammenfällt, so stellt ϱ_1' unverkürzt einen Beitrag von γ_1 dar. Man hat daher die Beziehungen:

$$\text{(186)} \qquad \begin{aligned} \alpha_1 &= \varphi_1' \cos\varrho_1 + \vartheta_1' \sin\varphi_1 \sin\varrho_1 \\ \beta_1 &= \varphi_1' \sin\varrho_1 - \vartheta_1' \sin\varphi_1 \cos\varrho_1 \\ \gamma_1 &= \vartheta_1' \cos\varphi_1 + \varrho_1'. \end{aligned}$$

Setzt man diese Werte in (185) ein, so erhält man bei geeigneter Zusammenfassung schließlich für den aus der Drehung des ersten Gliedes um seinen Schwerpunkt S_1 hervorgehenden Beitrag zur lebendigen Kraft

$$\text{(187)} \qquad \begin{aligned} &\tfrac{1}{2}(A_1 \cos^2\varrho_1 + B_1 \sin^2\varrho_1) \cdot \varphi_1'^2 \\ &+ \tfrac{1}{2}(A_1 \sin^2\varphi_1 \sin^2\varrho_1 + B_1 \sin^2\varphi_1 \cos^2\varrho_1 + C_1 \cos^2\varphi_1) \cdot \vartheta_1'^2 + \tfrac{1}{2} C_1 \cdot \varrho_1'^2 \\ &+ (A_1 - B_1) \sin\varphi_1 \sin\varrho_1 \cos\varrho_1 \cdot \varphi_1' \vartheta_1' + C_1 \cos\varphi_1 \cdot \vartheta_1' \varrho_1'. \end{aligned}$$

Ersetzt man in (187) durchweg den Index 1 durch 2, so erhält man den entsprechenden aus der Drehung des zweiten Gliedes um seinen Schwerpunkt resultierenden Anteil an der lebendigen Kraft. Addiert man diese letzten beiden Beiträge zu den aus (183) und (184) durch Multiplikation mit $\frac{1}{2} m_1$ bzw. $\frac{1}{2} m_2$ hervorgehenden Größen und fügt noch (177) hinzu, so erhält man schließlich den Wert für die gesamte lebendige Kraft T des ganzen frei im Raume sich bewegenden Gelenksystems. Der auf diese Weise sich ergebende Ausdruck ist zunächst ziemlich umfangreich. Er kann aber mit Hilfe der beiden reduzierten Systeme, sowie der Hauptpunkte und Hauptstrecken der beiden Glieder auf etwa die Hälfte von Summanden reduziert werden, wie aus den folgenden Überlegungen hervorgeht.

Das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit φ_1' erscheint bei Zusammenfassung aller den Faktor $\varphi_1'^2$ enthaltenden Größen multipliziert mit der Summe

$$\text{(188)} \qquad \tfrac{1}{2}[(A_1 \cos^2\varrho_1 + B_1 \sin^2\varrho_1) + m_1 e_1^2 + m_2 d_1^2].$$

Hierbei bedeutet $A_1 \cos^2\varrho_1 + B_1 \sin^2\varrho_1$ das Trägheitsmoment des ersten Gliedes in bezug auf die zu $\mathfrak{A}_{\varphi_1}$ parallele Schwerpunktsachse (vgl. Figur 23). Geht man zu der durch den Hauptpunkt H_1 hindurchgehenden Achse $\mathfrak{A}_{\varphi_1}$ selbst über (vgl. Figur 21), so vermehrt sich das Trägheitsmoment des ersten Gliedes um $m_1 e_1^2$. Fügt man weiterhin im Gelenkmittelpunkte $G_{1,2}$ zu dem ersten Gliede noch die Masse m_2 des zweiten, geht also zu dem ersten reduzierten System über, so vermehrt sich das Trägheitsmoment für die Achse $\mathfrak{A}_{\varphi_1}$ des Hauptpunktes H_1 noch um $m_2 d_1^2$. Es stellt daher der ganze Ausdruck (188) das halbe Trägheitsmoment des ersten reduzierten Systems in bezug auf die Achse $\mathfrak{A}_{\varphi_1}$ durch seinen

Schwerpunkt H_1 dar. Da die Achse $\mathfrak{A}_{\varphi_1}$, welche ja mit der Knotenlinie des Hauptpunktes identisch ist, im ersten Gliede nicht fest liegt, so ist auch dieses Trägheitsmoment keine konstante Größe. Es ist daher geboten, dasselbe durch die beiden zu den festen Querachsen des ersten Gliedes gehörenden Trägheitsmomente auszudrücken. Da, wie sich herausstellen wird, in allen Summanden des mit Hilfe der reduzierten Systeme vereinfachten Ausdrucks für die lebendige Kraft des Systems die Gesamtmasse m_0 als Faktor auftritt, so empfiehlt es sich weiterhin, zur Darstellung der Trägheitsmomente der reduzierten Systeme die Trägheitsradien einzuführen. Bezeichnet man bezüglich durch p_1, q_1 und r_1 die Trägheitsradien[1]) des ersten reduzierten Systems (also nicht bloß des ersten Gliedes) für die drei Hauptträgheitsachsen seines Schwerpunktes H_1, d. h. also für die vom Hauptpunkte H_1 ausgehende erste und zweite Querachse und die Längsachse des ersten Gliedes, so ist

(189)
$$\begin{aligned} m_0 p_1^2 &= A_1 + m_1 e_1^2 + m_2 d_1^2 \\ m_0 q_1^2 &= B_1 + m_1 e_1^2 + m_2 d_1^2 \\ m_0 r_1^2 &= C_1. \end{aligned}$$

Infolgedessen kann man an Stelle von (188) auch kurz schreiben

(190)
$$\tfrac{1}{2} m_0 \left[p_1^2 \cos^2 \varrho_1 + q_1^2 \sin^2 \varrho_1\right].$$

Faßt man in dem Ausdruck für die lebendige Kraft alle Summanden zusammen, welche $\varphi_2'^2$ als Faktor enthalten, so zeigt sich, daß dieses Quadrat der Winkelgeschwindigkeit φ_2' multipliziert ist mit

(191)
$$\tfrac{1}{2}\left[(A_2 \cos^2 \varrho_2 + B_2 \sin^2 \varrho_2) + m_2 e_2^2 + m_1 c_2^2\right].$$

Dieser Ausdruck hat aber, wie leicht zu erkennen ist, die Bedeutung des halben Trägheitsmomentes des zweiten reduzierten Systems in bezug auf die Achse $\mathfrak{A}_{\varphi_2}$ durch seinen Schwerpunkt H_2. Bezeichnet man in entsprechender Weise mit p_2, q_2 und r_2 die Trägheitsradien des zweiten reduzierten Systems[2]) für die vom Hauptpunkte H_2 ausgehende erste und zweite Querachse und die Längsachse des zweiten Gliedes, welche die drei Hauptträgheitsachsen des reduzierten Systems darstellen, so hat man zunächst

1) Es ist besonders zu beachten, daß in den folgenden Formeln die mit p, q und r bezeichneten Größen Trägheitsradien und nicht, wie es zuweilen üblich ist, Winkelgeschwindigkeiten bedeuten.

2) Mit r_2 ist zwar oben schon die Entfernung des Schwerpunktes S_2 vom Gelenkmittelpunkte $G_{1,2}$ bezeichnet worden. Da diese Größe aber im weiteren Verlauf der Untersuchung nicht mehr angeführt wird, so kann diese doppelte Verwendung ein und desselben Buchstabens zu keinem Irrtum weiter Veranlassung geben.

$$(192)\qquad \begin{aligned} m_0 p_2^2 &= A_2 + m_2 e_2^2 + m_1 c_2^2 \\ m_0 q_2^2 &= B_2 + m_2 e_2^2 + m_1 c_2^2 \\ m_0 r_2^2 &= C_2. \end{aligned}$$

Man kann daher den Ausdruck (191) ersetzen durch

$$(193)\qquad \tfrac{1}{2} m_0 [p_2^2 \cos^2\varrho_2 + q_2^2 \sin^2\varrho_2].$$

Das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit ϑ_1' zeigt sich multipliziert mit

$$(194)\qquad \tfrac{1}{2} [(A_1 \sin^2\varphi_1 \sin^2\varrho_1 + B_1 \sin^2\varphi_1 \cos^2\varrho_1 + C_1 \cos^2\varphi_1) \\ + m_1 e_1^2 \sin^2\varphi_1 + m_2 d_1^2 \sin^2\varphi_1].$$

In diesem Ausdruck bedeutet zunächst, wie man unschwer an der Hand von Figur 23 und Figur 21 erkennen wird, die in runder Klammer eingeschlossene Summe das Trägheitsmoment des ersten Gliedes für die vertikale Achse seines Schwerpunktes. Da nun die ebenfalls vertikale Achse $\mathfrak{A}_{\vartheta_1}$ durch den Hauptpunkt H_1 von dem Schwerpunkte S_1 den Abstand $e_1 \sin\varphi_1$ (vgl. Figur 21) besitzt, und der Gelenkmittelpunkt $G_{1,2}$ von der Achse $\mathfrak{A}_{\vartheta_1}$ um $d_1 \sin\varphi_1$ entfernt ist, so hat (194) ebenfalls die Bedeutung eines halben Trägheitsmomentes des ersten reduzierten Systems, und zwar in bezug auf die vertikale Achse $\mathfrak{A}_{\vartheta_1}$ durch seinen Schwerpunkt H_1. Mit Hilfe der drei Hauptträgheitsradien läßt sich dasselbe aber in der kürzeren Form schreiben

$$(195)\qquad \tfrac{1}{2} m_0 [(p_1^2 \sin^2\varrho_1 + q_1^2 \cos^2\varrho_1) \sin^2\varphi_1 + r_1^2 \cos^2\varphi_1].$$

Auf ganz entsprechende Weise leitet man ab, daß der Faktor von $\vartheta_2'^2$ in dem Ausdruck für T den Wert hat

$$(196)\qquad \tfrac{1}{2} m_0 [(p_2^2 \sin^2\varrho_2 + q_2^2 \cos^2\varrho_2) \sin^2\varphi_2 + r_2^2 \cos^2\varphi_2].$$

Endlich erscheint das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit ϱ_1' und das von ϱ_2' mit dem halben Trägheitsmoment des ersten bzw. zweiten reduzierten Systems in bezug auf die Längsachse seines Kerngliedes multipliziert. Dies geht unmittelbar aus (187) unter Berücksichtigung von (189) hervor.

In den Summanden von (187) und dem entsprechenden Ausdruck für das zweite Glied, welche das Produkt zweier zu demselben Gliede gehörenden Winkelgeschwindigkeiten besitzen, lassen sich nun auch die Trägheitsmomente der beiden reduzierten Systeme einführen; denn es ergibt sich nach (189) und (192)

$$(197)\qquad \begin{aligned} A_1 - B_1 &= m_0 (p_1^2 - q_1^2) \\ A_2 - B_2 &= m_0 (p_2^2 - q_2^2). \end{aligned}$$

Die nun noch übrig bleibenden Summanden in dem Ausdruck für T enthalten nur Produkte aus je zwei Winkelgeschwindigkeiten

von denen die eine zum ersten und die andere zum zweiten Gliede gehört. Wie man aus (183) und (184) erkennt, weisen alle diese Summanden nach geeigneter Zusammenfassung den gemeinsamen Faktor $(m_1 e_1 c_2 - m_2 d_1 e_2)$ auf, der sich ebenfalls mit Hilfe der reduzierten Systeme auf einen einfacheren Ausdruck bringen läßt. Ersetzt man nämlich nach (175) $m_1 e_1$ durch $m_2 d_1$, ferner nach (176) $-m_2 e_2$ durch $m_1 c_2$ und $m_1 + m_2$ durch m_0, so ergibt sich

$$(198) \qquad m_1 e_1 c_2 - m_2 d_1 e_2 = m_0 d_1 c_2 .$$

Berücksichtigt man alle diese Vereinfachungen, so erhält man schließlich für die gesamte lebendige Kraft T des ganzen Gelenksystems im Falle vollkommen freier Beweglichkeit im Raume den Wert

$$(199) \quad \begin{aligned} T = {} & \tfrac{1}{2} m_0 (x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2) \\ & + \tfrac{1}{2} m_0 [p_1^2 \cos^2 \varrho_1 + q_1^2 \sin^2 \varrho_1] \cdot \varphi_1'^2 \\ & + \tfrac{1}{2} m_0 [p_2^2 \cos^2 \varrho_2 + q_2^2 \sin^2 \varrho_2] \cdot \varphi_2'^2 \\ & + \tfrac{1}{2} m_0 [(p_1^2 \sin^2 \varrho_1 + q_1^2 \cos^2 \varrho_1) \sin^2 \varphi_1 + r_1^2 \cos^2 \varphi_1] \cdot \vartheta_1'^2 \\ & + \tfrac{1}{2} m_0 [(p_2^2 \sin^2 \varrho_2 + q_2^2 \cos^2 \varrho_2) \sin^2 \varphi_2 + r_2^2 \cos^2 \varphi_2] \cdot \vartheta_2'^2 \\ & + \tfrac{1}{2} m_0 r_1^2 \cdot \varrho_1'^2 + \tfrac{1}{2} m_0 r_2^2 \cdot \varrho_2'^2 \\ & + m_0 (p_1^2 - q_1^2) \sin \varrho_1 \cos \varrho_1 \sin \varphi_1 \cdot \varphi_1' \vartheta_1' \\ & + m_0 (p_2^2 - q_2^2) \sin \varrho_2 \cos \varrho_2 \sin \varphi_2 \cdot \varphi_2' \vartheta_2' \\ & + m_0 r_1^2 \cos \varphi_1 \cdot \vartheta_1' \varrho_1' + m_0 r_2^2 \cos \varphi_2 \cdot \vartheta_2' \varrho_2' \\ & + m_0 d_1 c_2 [\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1)] \cdot \varphi_1' \varphi_2' \\ & - m_0 d_1 c_2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) \cdot \varphi_1' \vartheta_2' \\ & + m_0 d_1 c_2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) \cdot \varphi_2' \vartheta_1' \\ & + m_0 d_1 c_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) \cdot \vartheta_1' \vartheta_2' . \end{aligned}$$

Von diesen 15 Gliedern, welche den Ausdruck für T zusammensetzen, bezieht sich nur das erste auf die lebendige Kraft, welche aus der Bewegung des Gesamtschwerpunktes S_0 hervorgeht. Behält der letztere während der Bewegung des Systems seine Lage im Raume bei, so kommt das erste Glied von (199) in Wegfall. Die übrigen 14 Glieder machen zusammen die lebendige Kraft der Bewegung des Systems um seinen Schwerpunkt aus.

Aus Formel (199) kann man als speziellen Fall natürlich auch den bekannten Wert der lebendigen Kraft eines einzigen frei im Raume sich bewegenden starren Körpers erhalten. Man braucht zu diesem Zwecke nur die drei Winkelgeschwindigkeiten φ_2', ϑ_2' und ϱ_2' gleich Null zu setzen; dann verschwinden aus (199) alle Glieder, in welchen eine mit dem Index 2 versehene Größe vorkommt, und es bleiben im ganzen nur noch 6 Glieder, wenn der Schwerpunkt sich

nicht mitbewegt, sogar nur noch 5 Glieder übrig.[1]) Die auf den Hauptpunkt des ersten Gliedes bezogenen Trägheitsradien p_1, q_1 und r_1 gehen dabei in die Hauptträgheitsradien für den Schwerpunkt des starren Körpers über; denn das erste reduzierte System ist dann mit dem starren Körper und der Hauptpunkt H_1 mit dem Schwerpunkte desselben identisch.

Ist beim zweigliedrigen Gelenksystem das Trägheitsellipsoid eines jeden der beiden reduzierten Systeme ein Rotationsellipsoid mit der Längsachse seines Kerngliedes als Rotationsachse — ein Fall, der sich bei den Extremitätenabschnitten des menschlichen Körpers nahezu realisiert findet —, so vereinfacht sich die Formel (199) noch etwas. Da in diesem Falle die zu den beiden Querachsen eines jeden Gliedes gehörenden Hauptträgheitsachsen p_j und q_j einander gleich werden, so fallen zunächst die beiden Summanden auf der siebenten und achten Zeile der rechten Seite von (199) fort; außerdem gehen die Summen $p_j^2 \cos^2 \varrho_j + q_j^2 \sin^2 \varrho_j$ und $p_j^2 \sin^2 \varrho_j + q_j^2 \cos^2 \varrho_j$ dann einfach in p_j^2 über.

Die Formel (199) gibt den Wert der lebendigen Kraft des Gelenksystems für jede beliebige Bewegung desselben an; sie muß daher auch jeden speziellen Fall in sich enthalten. Bei den Bewegungen organischer Gelenksysteme kommt es nun vielfach vor, daß ein Punkt auf der Längsachse eines Gliedes fest bleibt. Denkt man z. B. den Rumpf mit dem an ihm befindlichen Schultergürtel im Raume festgestellt, so kann der Arm sich nur noch so bewegen, daß ein Punkt der Längsachse des Oberarms, nämlich der Mittelpunkt des Humeruskopfes, seinen Ort im Raume beibehält. Man kann daher in diesem Falle für die Untersuchung der Bewegungen des Armes unter der Einwirkung der Muskeln den Arm ganz vom übrigen Körper losgelöst annehmen und ihn als ein nur aus zwei oder drei Gliedern zusammengesetztes räumliches Gelenksystem auffassen, bei dessen Bewegungen ein Punkt der Längsachse des Oberarms im Raume festbleibt.

Um für den Fall, daß ein Punkt O_1 der Längsachse des ersten Gliedes eine feste Lage im Raume einnimmt, den speziellen Wert der lebendigen Kraft des Systems anzugeben, braucht man nur zu untersuchen, in welcher Weise sich die Geschwindigkeit des Gesamtschwerpunktes S_0 durch die 6 Winkelgeschwindigkeiten φ_j, ϑ_j, ϱ_j ausdrücken läßt; denn nach den früheren Angaben hat das Gelenksystem in diesem Falle nur noch 6 Grade von Bewegungsfreiheit, so daß also 6 allgemeine Koordinaten genügen müssen, um alle für die Bewegung

1) Man vergleiche z. B. den in der Theorie des Kreisels von Klein und Sommerfeld auf Seite 156 angegebenen Wert für T, wobei zu beachten ist, daß dort an Stelle der hier verwendeten Buchstaben φ, ϑ, ϱ die Buchstaben ϑ, ψ, φ stehen, und daß die Formel sich nur auf den symmetrischen Kreisel bezieht, bei welchem die Trägheitsmomente A und B gleiche Werte haben.

in Betracht kommenden Größen, insbesondere die lebendige Kraft des Systems ausdrücken zu können.

Der feste Punkt O_1 liege auf der Längsachse des ersten Gliedes so, daß der Hauptpunkt H_1 von ihm in positiver Richtung um die Strecke c_1 entfernt ist (vgl. Fig. 21). Nach der allgemein gültigen Beziehung zwischen den Hauptpunkten und dem Gesamtschwerpunkte des Systems gelangt man von O_1 nach S_0, indem man die Vektorsumme $\bar{c}_1 + \bar{c}_2$ bildet. Umgekehrt wird man von S_0 auf O_1 geführt, wenn man von ihm aus diese beiden Vektoren in entgegengesetzter Richtung nacheinander abträgt. Nach den Überlegungen, welche zu der Aufstellung von Formel (178) geführt haben, kann es nicht zweifelhaft sein, daß man direkt durch diese Formel auch die zu S_0 relative Verrückung des Punktes O_1 ausdrücken kann, falls man in derselben nur den Vektor $-\bar{e}_1$, um welchen S_1 von H_1 entfernt ist, durch den Vektor $-\bar{c}_1$ ersetzt. Es muß daher umgekehrt die zu dem festen Punkte O_1 relative Verrückung des Gesamtschwerpunktes S_0, bei welcher den einzelnen Komponenten der Verrückung natürlich das entgegengesetzte Vorzeichen zukommt, den Wert besitzen

$$(200)\qquad \overline{c_1 \cdot d\varphi_1} + \overline{c_1 \sin\varphi_1 \cdot d\vartheta_1} + \overline{c_2 \cdot d\varphi_2} + \overline{c_2 \sin\varphi_2 \cdot d\vartheta_2}.$$

Man erhält also unmittelbar das Quadrat der Geschwindigkeit des Gesamtschwerpunktes bei festgehaltenem O_1 aus Formel (183), indem man nur in derselben überall e_1 durch c_1 ersetzt. Denkt man dies ausgeführt und den ganzen Ausdruck mit $\frac{1}{2}m_0$ multipliziert, so hat man damit den Teil der lebendigen Kraft des ganzen Gelenksystems gewonnen, der aus der Bewegung des Gesamtschwerpunktes im vorliegenden Falle resultiert, und welcher in Formel (199) an Stelle von $\frac{1}{2}m_0(x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2)$ zu setzen ist.

Faßt man nun wiederum alle Glieder in T zusammen, welche als Faktor das Quadrat der gleichen Winkelgeschwindigkeit oder ein Produkt aus denselben beiden Winkelgeschwindigkeiten enthalten, so zieht sich der ganze Ausdruck diesmal auf nur 14 Glieder zusammen.

Der Faktor von $\varphi_1'^2$ in (199) hatte die Bedeutung des halben Trägheitsmomentes des ersten reduzierten Systems in bezug auf die Achse $\mathfrak{A}_{\varphi_1}$ durch den Hauptpunkt des ersten Gliedes. Da der letztere den Schwerpunkt des reduzierten Systems darstellt, so wird sich das Trägheitsmoment desselben um $m_0 a^2$ vermehren, wenn man zu einer zu $\mathfrak{A}_{\varphi_1}$ parallelen Achse übergeht, welche vom Hauptpunkte H_1 den Abstand a besitzt. Nun wird durch das Hinzutreten der lebendigen Kraft des Gesamtschwerpunktes der Faktor von $\varphi_1'^2$ um $\frac{1}{2}m_0 c_1^2$ vergrößert. Denkt man durch O_1 eine zu $\mathfrak{A}_{\varphi_1}$ parallele Achse gelegt, so besitzt dieselbe vom Hauptpunkte H_1 den Abstand c_1, weil ja diese Achse auf der Längsachse des Gliedes senkrecht steht. Hieraus ist aber zu erkennen, daß nach der Zusammenfassung der Faktor von

${\varphi_1'}^2$ das halbe Trägheitsmoment des ersten reduzierten Systems für die zu $\mathfrak{A}_{\varphi_1}$ parallele Achse durch O_1 bedeutet. Da der Punkt O_1 auf einer Hauptträgheitsachse des Hauptpunktes H_1 liegt, so werden die drei Hauptträgheitsachsen des Punktes O_1 denen des Schwerpunktes H_1 des reduzierten Systems parallel laufen; die eine wird also wieder mit der Längsachse des ersten Gliedes zusammenfallen, während die beiden anderen in der Richtung der Querachsen des Hauptpunktes verlaufen.

Bezeichnet man die Hauptträgheitsradien des ersten reduzierten Systems für den Punkt O_1 bezüglich mit p_{01}, q_{01}, r_{01}, so hat man zwischen denselben und den Hauptträgheitsradien des Schwerpunktes H_1 demnach die Beziehungen

$$\begin{aligned} p_{01}^2 &= {p_1}^2 + {c_1}^2 \\ q_{01}^2 &= {q_1}^2 + {c_1}^2 \\ r_{01}^2 &= {r_1}^2. \end{aligned} \tag{201}$$

Beachtet man, daß die zu $\mathfrak{A}_{\varphi_1}$ parallele Achse durch O_1 mit den Hauptträgheitsachsen von O_1 die gleichen Winkel bildet, wie $\mathfrak{A}_{\varphi_1}$ mit den Hauptträgheitsachsen von H_1, so kann man das mit ${\varphi_1'}^2$ multiplizierte Glied der lebendigen Kraft im vorliegenden Falle auch schreiben

$$\tfrac{1}{2} m_0 \left[p_{01}^2 \cos^2 \varrho_1 + q_{01}^2 \sin^2 \varrho_1\right] \cdot {\varphi_1'}^2. \tag{202}$$

Man überzeugt sich leicht, daß man auch in den beiden mit ${\vartheta_1'}^2$ und ${\varrho_1'}^2$ multiplizierten Gliedern in (199) nur den Index 1 durch 01 zu ersetzen braucht, d. h. also, daß der Faktor von ${\vartheta_1'}^2$ das halbe Trägheitsmoment des ersten reduzierten Systems in bezug auf die zu $\mathfrak{A}_{\vartheta_1}$ parallele Achse durch O_1 bedeutet, und der Faktor von ${\varrho_1'}^2$ wieder gleich ist dem halben Trägheitsmoment des reduzierten Systems für die Längsachse des Gliedes, welche in diesem Falle als Hauptträgheitsachse des Punktes O_1 aufzufassen ist. Das erstere geht daraus hervor, daß die zu $\mathfrak{A}_{\vartheta_1}$ parallele Achse durch O_1 von H_1 den Abstand $c_1 \sin \varphi_1$ besitzt, und durch die lebendige Kraft des Gesamtschwerpunktes S_0 gerade der Faktor von ${\vartheta_1'}^2$ um $\frac{1}{2} m_0 {c_1}^2 \sin^2 \varphi_1$ vermehrt wird.

Nach diesen Auseinandersetzungen ist es nun nicht schwer einzusehen, daß die Faktoren von ${\varphi_2'}^2$, ${\vartheta_2'}^2$ und ${\varrho_2'}^2$ in dem Ausdruck für die lebendige Kraft des um den festgehaltenen Punkt O_1 sich bewegenden Gelenksystems die halben Trägheitsmomente des zweiten reduzierten Systems in bezug auf die bezüglich zu $\mathfrak{A}_{\varphi_2}$, $\mathfrak{A}_{\vartheta_2}$ und $\mathfrak{A}_{\varrho_2}$ parallelen Achsen durch den Gelenkmittelpunkt $G_{1,2}$ bedeuten; denn die durch den letzteren gezogenen Achsen besitzen von H_2 bezüglich die Abstände c_2, $c_2 \sin \varphi_2$ und 0. Bezeichnet man mit p_{02}, q_{02} und r_{02} die auf den Gelenkmittelpunkt $G_{1,2}$ sich beziehenden Hauptträgheitsradien des zweiten reduzierten Systems, so bestehen

zwischen diesen und den Hauptträgheitsradien p_2, q_2, r_2 des Schwerpunktes H_2 des reduzierten Systems die Beziehungen

$$\begin{aligned} p_{02}^2 &= p_2^2 + c_2^2 \\ q_{02}^2 &= q_2^2 + c_2^2 \\ r_{02}^2 &= r_2^2. \end{aligned} \tag{203}$$

Aus diesen und den Formeln (201) erkennt man weiterhin, daß man auch in der sechsten bis neunten Zeile von (199), trotzdem zu den dort stehenden Ausdrücken nichts weiter hinzukommt, die Trägheitsradien der Hauptpunkte durch die des Punktes O_1 bezüglich $G_{1,2}$ ersetzen kann; denn es gilt nach (201) und (203) allgemein

$$p_{0j}^2 - q_{0j}^2 = p_j^2 - q_j^2. \tag{204}$$

Die nun noch fehlenden Glieder der lebendigen Kraft erscheinen nach geeigneter Zusammenfassung sämtlich mit demselben Faktor $(d_1 c_2 + c_1 c_2)$ multipliziert. Bezeichnet man den Abstand des Gelenkmittelpunktes $G_{1,2}$ von O_1 mit l_1, so daß also

$$l_1 = c_1 + d_1 \tag{205}$$

ist, so kann man den gemeinsamen Faktor der vier letzten Glieder kurz durch $l_1 c_2$ angeben.

Man erhält daher schließlich für die lebendige Kraft T des Gelenksystems für den Fall, daß dasselbe sich nur um einen festen Punkt O_1 der Längsachse des ersten Gliedes bewegen kann, den Wert

$$\begin{aligned} T = {} & \tfrac{1}{2} m_0 [p_{01}^2 \cos^2 \varrho_1 + q_{01}^2 \sin^2 \varrho_1] \cdot \varphi_1'^2 \\ & + \tfrac{1}{2} m_0 [p_{02}^2 \cos^2 \varrho_2 + q_{02}^2 \sin^2 \varrho_2] \cdot \varphi_2'^2 \\ & + \tfrac{1}{2} m_0 [(p_{01}^2 \sin^2 \varrho_1 + q_{01}^2 \cos^2 \varrho_1) \sin^2 \varphi_1 + r_{01}^2 \cos^2 \varphi_1] \cdot \vartheta_1'^2 \\ & + \tfrac{1}{2} m_0 [(p_{02}^2 \sin^2 \varrho_2 + q_{02}^2 \cos^2 \varrho_2) \sin^2 \varphi_2 + r_{02}^2 \cos^2 \varphi_2] \cdot \vartheta_2'^2 \\ & + \tfrac{1}{2} m_0 r_{01}^2 \quad \varrho_1'^2 + \tfrac{1}{2} m_0 r_{02}^2 \cdot \varrho_2'^2 \\ & + m_0 (p_{01}^2 - q_{01}^2) \sin \varrho_1 \cos \varrho_1 \sin \varphi_1 \cdot \varphi_1' \vartheta_1' \\ & + m_0 (p_{02}^2 - q_{02}^2) \sin \varrho_2 \cos \varrho_2 \sin \varphi_2 \cdot \varphi_2' \vartheta_2' \\ & + m_0 r_{01}^2 \cos \varphi_1 \cdot \vartheta_1' \varrho_1' + m_0 r_{02}^2 \cos \varphi_2 \cdot \vartheta_2' \varrho_2' \\ & + m_0 l_1 c_2 [\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos (\vartheta_2 - \vartheta_1)] \cdot \varphi_1' \varphi_2' \\ & - m_0 l_1 c_2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin (\vartheta_2 - \vartheta_1) \cdot \varphi_1' \vartheta_2' \\ & + m_0 l_1 c_2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin (\vartheta_2 - \vartheta_1) \cdot \varphi_2' \vartheta_1' \\ & + m_0 l_1 c_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos (\vartheta_2 - \vartheta_1) \cdot \vartheta_1' \vartheta_2'. \end{aligned} \tag{206}$$

c) *Die Bewegungsgleichungen.*

Den neun Freiheitsgraden des Systems im Falle freier Beweglichkeit im Raume entsprechen neun Bewegungsgleichungen, welche unter Ver-

wendung der allgemeinen Lagrangeschen Differentialgleichungen zweiter Art aus dem unter (199) angegebenen Wert für die lebendige Kraft T des Systems leicht abgeleitet werden können, indem man die in diesen vorgeschriebenen partiellen Differentiationen der Reihe nach für die neun allgemeinen Koordinaten $x_0, y_0, z_0, \varphi_1, \vartheta_1, \varrho_1, \varphi_2, \vartheta_2, \varrho_2$ und ihre ersten Abgeleiteten ausführt.

Die drei ersten sich auf diese Weise ergebenden Differentialgleichungen lauten

$$\begin{aligned} m_0 \cdot x_0'' &= \Sigma X \\ m_0 \cdot y_0'' &= \Sigma Y \\ m_0 \cdot z_0'' &= \Sigma Z, \end{aligned} \tag{207}$$

wobei x_0'', y_0'' und z_0'' die zweiten Differentialquotienten der drei rechtwinkligen Koordinaten des Gesamtschwerpunktes nach der Zeit t, und ΣX, ΣY, und ΣZ die Summen der in der Richtung der drei Koordinatenachsen verlaufenden Komponenten der sämtlichen äußeren Kräfte des ganzen Gelenksystems darstellen. Es sind dies die bekannten Bewegungsgleichungen, welche aussagen, daß der Schwerpunkt S_0 sich gerade so bewegt, als ob die ganze Masse m_0 des Systems in ihm konzentriert wäre und alle äußeren Kräfte in ihrer Richtung und Stärke direkt in ihm angriffen.

Während diese ersten drei Differentialgleichungen sich somit auf die Translationsbewegung beziehen, welche das ganze System nach Maßgabe der Bewegung seines Gesamtschwerpunktes ausführt, beschäftigen sich die übrigen sechs Gleichungen mit den außerdem von den beiden Gliedern des Systems ausgeführten Drehungen im Raume. In ihnen kommen die Koordinaten x_0, y_0, z_0 des Schwerpunktes und deren Abgeleitete gar nicht mehr vor, sondern sie enthalten nur noch die sechs Winkelkoordinaten und deren ersten und zweiten Differentialquotienten nach der Zeit. Aus der lebendigen Kraft des Systems lassen sich dieselben bekanntlich durch die Formeln ableiten

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi_1'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = Q_{\varphi_1} &\qquad &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi_2'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = Q_{\varphi_2} \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \vartheta_1'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \vartheta_1} = Q_{\vartheta_1} &\qquad &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \vartheta_2'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \vartheta_2} = Q_{\vartheta_2} \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \varrho_1'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varrho_1} = Q_{\varrho_1} &\qquad &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \varrho_2'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varrho_2} = Q_{\varrho_2}, \end{aligned} \tag{208}$$

wobei im vorliegenden Falle unter $Q_{\varphi_1} d\varphi_1$, $Q_{\vartheta_1} d\vartheta_1$, $Q_{\varrho_1} d\varrho_1$, $Q_{\varphi_2} d\varphi_2$, $Q_{\vartheta_2} d\vartheta_2$ und $Q_{\varrho_2} d\varrho_2$ die Summen der partiellen Elementararbeiten zu verstehen sind, welche von sämtlichen am Gelenksystem angreifenden äußeren und inneren Kräften geleistet werden, wenn man dem System sukzessive Verrückungen erteilt, bei welchen entweder das erste Glied bezüglich um die durch seinen Hauptpunkt gehende Achse $\mathfrak{A}_{\varphi_1}$, $\mathfrak{A}_{\vartheta_1}$

oder $\mathfrak{A}_{\varrho_1}$ um den unendlich kleinen Winkel $d\varphi_1$, $d\vartheta_1$ oder $d\varrho_1$ gedreht wird und das zweite System gleichzeitig Translationsbewegung ausführt, oder bei welcher das zweite Glied sich bezüglich um die durch seinen Hauptpunkt gehende Achse $\mathfrak{A}_{\varphi_2}$, $\mathfrak{A}_{\vartheta_2}$ oder $\mathfrak{A}_{\varrho_2}$ um den unendlich kleinen Winkel $d\varphi_2$, $d\vartheta_2$ oder $d\varrho_2$ dreht und dabei gleichzeitig das erste Glied nur Translationsbewegung ausführt. Nach der in Rücksicht auf die Kräfte vorgenommenen Erweiterung des Begriffs der reduzierten Systeme kann man auch kurz sagen, daß die obigen Produkte die Elementararbeiten der sämtlichen am ersten bzw. zweiten reduzierten System angreifenden Kräfte darstellen, welche dieselben bei den Drehungen des betreffenden reduzierten Systems um seine durch seinen Schwerpunkt hindurchgehenden Achsen $\mathfrak{A}_\varphi$, $\mathfrak{A}_\vartheta$ und $\mathfrak{A}_\varrho$ um die unendlich kleinen Winkel $d\varphi$, $d\vartheta$ und $d\varrho$ leisten.

Führt man die in der ersten Gleichung vorgeschriebenen Differentiationen aus, so erhält man nach geeigneter Zusammenfassung für die linke Seite der Differentialgleichung den Wert

$$
\begin{aligned}
(209)\quad & \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi_1'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = \\
& m_0 [p_1^2 \cos^2 \varrho_1 + q_1^2 \sin^2 \varrho_1] \cdot \varphi_1'' \\
& + m_0 (p_1^2 - q_1^2) \sin \varrho_1 \cos \varrho_1 \sin \varphi_1 \cdot \vartheta_1'' \\
& - 2 m_0 (p_1^2 - q_1^2) \sin \varrho_1 \cos \varrho_1 \cdot \varphi_1' \varrho_1' \\
& - m_0 [(p_1^2 \sin^2 \varrho_1 + q_1^2 \cos^2 \varrho_1) - r_1^2] \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \cdot \vartheta_1'^2 \\
& + m_0 [(p_1^2 - q_1^2)(\cos^2 \varrho_1 - \sin^2 \varrho_1) + r_1^2] \sin \varphi_1 \cdot \vartheta_1' \varrho_1' \\
& + m_0 d_1 c_2 [\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos (\vartheta_2 - \vartheta_1)] \cdot \varphi_2'' \\
& + m_0 d_1 c_2 [\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos (\vartheta_2 - \vartheta_1)] \cdot \varphi_2'^2 \\
& - m_0 d_1 c_2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin (\vartheta_2 - \vartheta_1) \cdot \vartheta_2'' \\
& - m_0 d_1 c_2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos (\vartheta_2 - \vartheta_1) \cdot \vartheta_2'^2 \\
& - 2 m_0 d_1 c_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin (\vartheta_2 - \vartheta_1) \cdot \varphi_2' \vartheta_2' .
\end{aligned}
$$

So kompliziert dieser aus zehn Summanden bestehende Ausdruck auch erscheint, so läßt sich derselbe doch in sehr einfacher Weise deuten.

Zunächst erkennt man sofort, daß die ersten fünf Summanden nur Winkelgeschwindigkeiten und Winkelbeschleunigungen enthalten, die sich auf die Drehung des ersten Gliedes, oder richtiger des ersten reduzierten Systems beziehen. Die übrigen fünf Summanden sind dagegen nur mit Winkelgeschwindigkeiten und Winkelbeschleunigungen behaftet, welche die Drehung des zweiten Gliedes oder vielmehr des zweiten reduzierten Systems charakterisieren; dabei kommen in den letzteren die Winkelgeschwindigkeit ϱ_2' und die Winkelbeschleunigung ϱ_2'' der Drehung des zweiten reduzierten Systems um die Längsachse seines Kerngliedes überhaupt nicht vor.

Denkt man das zweite Glied ganz fort, so daß man es nur noch mit einem einzigen starren Körper, nämlich dem ersten Gliede, zu tun hat, so kommen die letzten fünf Summanden in (209) zum Wegfall. Beachtet man, daß in diesem Falle das erste reduzierte System von dem ersten Gliede nicht mehr verschieden ist, daß also die Masse m_0 in die Masse m_1 des ersten Gliedes, der Hauptpunkt H_1 in den Schwerpunkt des ersten Gliedes und die Hauptträgheitsradien p_1, q_1, r_1 des ersten reduzierten Systems in die für den Schwerpunkt des ersten Gliedes übergehen, so erkennt man unmittelbar, daß die fünf ersten Glieder des Ausdrucks (209), in welchem dann auch der Index 1 überflüssig wird, die linke Seite der auf die φ Koordinate bezüglichen Lagrangeschen Differentialgleichung der Drehung des starren Körpers um seinen Schwerpunkt darstellen. Die rechte Seite dieser Differentialgleichung ist, worüber man nach 9d und den ausführlichen Auseinandersetzungen über das ebene Gelenksystem nicht im Zweifel sein kann, dann gleichbedeutend mit dem resultierenden Drehungsmoment der sämtlichen am starren Körper angreifenden Kräfte in bezug auf die Achse $\mathfrak{A}_\varphi$ durch den Schwerpunkt desselben, welche mit der Knotenlinie identisch ist.

Wenn nun aber das zweite Glied nicht fortfällt, sondern in der festgesetzten Weise mit den ersten gelenkig verbunden ist, so beziehen sich die ersten fünf Summandèn von (209) auf das erste reduzierte System, indem dann p_1, q_1 und r_1 die Hauptträgheitsradien desselben für seinen Schwerpunkt, d. h. den Hauptpunkt des ersten Gliedes, bedeuten. Bringt man die letzten fünf Summanden von (209), welche der drehenden Bewegung des zweiten Gliedes des Gelenksystems ihren Ursprung verdanken, auf die rechte Seite der Lagrangeschen Gleichung, so hat man auf der linken Seite der letzteren dann genau den gleichen Ausdruck wie bei der entsprechenden zu einem einzigen starren Körper gehörenden Lagrangeschen Differentialgleichung. An Stelle des starren Körpers ist aber jetzt das ebenfalls als starrer Körper aufzufassende erste reduzierte System getreten.

Auf der rechten Seite der Gleichung steht, abgesehen von den fünf herübergebrachten Summanden von (209), die Summe Q_{φ_1} der Drehungsmomente sämtlicher am ersten reduzierten System angreifenden Kräfte in bezug auf die Ache $\mathfrak{A}_{\varphi_1}$ durch den Hauptpunkt des ersten Gliedes; dabei sind nach dem früheren unter den am ersten reduzierten System angreifenden Kräften zu verstehen: zunächst alle am ersten Gliede direkt angreifenden Kräfte in ihrer richtigen Lage, also mit ihrem richtigen Angriffspunkt, und dann außerdem noch alle ursprünglich am zweiten Gliede angreifenden Kräfte, nachdem sie parallel mit sich nach dem Mittelpunkte $G_{1,2}$ des Verbindungsgelenkes verlegt worden sind. Zu diesen Drehungsmomenten treten nun die letzten

fünf Summanden des Ausdruckes (209) mit umgekehrten Vorzeichen, deren Bedeutung die folgende ist.

Der erste Summand hat den Faktor $m_0 c_2 \varphi_2''$, der zweite den Faktor $m_0 c_2 \varphi_2'^2$, der dritte den Faktor $m_0 c_2 \sin \varphi_2 \vartheta_2''$, der vierte den Faktor $m_0 c_2 \sin \varphi_2 \vartheta_2'^2$ und der letzte den Faktor $2 m_0 c_2 \varphi_2' \vartheta_2' \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_2\right)$, wobei im letzten Ausdruck $\cos \varphi_2$ durch $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_2\right)$ ersetzt worden ist. Abgesehen von dem in allen Summanden außerdem vorhandenen Faktor d_1 kann der noch übrig bleibende Faktor als der Kosinus eines einzigen Winkels aufgefaßt werden.

Nun geben $c_2 \varphi_2''$ und $c_2 \varphi_2'^2$ die Größen der Tangentialbeschleunigung und Normalbeschleunigung an, welche der Hauptpunkt des zweiten Gliedes infolge der Drehung des letzteren um die Achse $\mathfrak{A}_{\varphi_2}$ relativ zum Gelenkmittelpunkte $G_{1,2}$ besitzen. Man kann auch sagen, es sind die beiden Komponenten der Beschleunigung, welche der Hauptpunkt H_2 erfährt, wenn das zweite Glied um eine zu $\mathfrak{A}_{\varphi_2}$ parallele Achse durch den Gelenkmittelpunkt mit einer Winkelgeschwindigkeit φ_2' und Winkelbeschleunigung φ_2'' gedreht wird. Die Tangentialbeschleunigung ist senkrecht zur Längsachse des zweiten Gliedes gerichtet und liegt dabei in der Ebene $\mathfrak{E}_2$ (Fig. 21), welche mit der yz-Ebene des ruhenden Koordinatensystems den Winkel ϑ_2 bildet; in Figur 22 ist diese Richtung durch den nach 2 gehenden Kugelradius dargestellt. Die Normalbeschleunigung liegt dagegen in der Längsachse selbst und ist nach dem Gelenkmittelpunkte $G_{1,2}$ hin gerichtet; sie besitzt also die negative Richtung der Längsachse des zweiten Gliedes. In Figur 22 ist der in dieser Richtung verlaufende Kugelradius eingezeichnet und sein Endpunkt auf der Kugeloberfläche durch 2′ angedeutet worden.

Bei der Drehung des zweiten Gliedes um die Achse $\mathfrak{A}_{\vartheta_2}$ führt der Hauptpunkt H_2 relativ zum Gelenkmittelpunkte $G_{1,2}$ bei konstantem φ_2 eine Kreisbewegung in horizontaler Ebene aus, deren Radius $c_2 \sin \varphi_2$ ist. Da die Drehung um diese vertikale Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ϑ_2' und der Winkelbeschleunigung ϑ_2'' stattfindet, so erfährt der Hauptpunkt des zweiten Gliedes infolge dieser Drehung relativ zu $G_{1,2}$ eine Beschleunigung, deren Tangential- und Normalkomponente horizontale Richtung und bezüglich die Größen $c_2 \sin \varphi_2 \vartheta_2''$ und $c_2 \sin \varphi_2 \vartheta_2'^2$ besitzen. Die erstere steht dabei senkrecht auf der Ebene $\mathfrak{E}_2$ (Fig. 21); ihre Richtung wird in Figur 22 durch den nach II führenden Kugelradius dargestellt. Die letztere liegt in der Ebene $\mathfrak{E}_2$ selbst und ist nach der durch $G_{1,2}$ gehenden Vertikalen hin gerichtet, so wie es in Figur 22 der nach II′ gehende Kugelradius andeutet.

Endlich gibt der Ausdruck $2 c_2 \varphi_2' \vartheta_2' \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_2\right)$, wie man leicht

erkennt, die Größe der zusammengesetzten zentrifugalen Beschleunigung des Hauptpunktes H_2 relativ zu $G_{1,2}$ an. Die Bewegung von H_2 relativ zum Gelenkmittelpunkte $G_{1,2}$ läßt sich nach den bisherigen Überlegungen so entstanden denken, daß derselbe sich in der Ebene $\mathfrak{E}_2$ mit der linearen Geschwindigkeit $c_2 \varphi_2'$ bewegt, dabei aber diese Ebene selbst sich um eine durch $G_{1,2}$ gehende vertikal nach unten gerichtete Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ϑ_2' dreht. Nach dem Lehrsatz von Coriolis erfährt der Punkt infolge dieser zusammengesetzten Bewegung noch eine Beschleunigung, deren Größe durch das doppelte Produkt aus der linearen Geschwindigkeit in $\mathfrak{E}_2$, der Winkelgeschwindigkeit der Drehung dieser Ebene und dem Sinus des zwischen der Richtung jener linearen Geschwindigkeit und der Drehungsachse von $\mathfrak{E}_2$ eingeschlossenen Winkels gemessen wird; dieser Winkel ist aber gleich $\frac{\pi}{2} + \varphi_2$, wie man aus Figur 21, und insbesondere auch aus Figur 22 erkennt, in welcher der nach 2 gehende Kugelradius die Richtung der linearen Geschwindigkeit und der vertikal nach unten zeigende Radius die Richtung der Drehungsachse angibt. Die Richtung dieser sogenannten zusammengesetzten zentrifugalen Beschleunigung steht sowohl auf der linearen Geschwindigkeit als auch auf der Drehungsachse senkrecht und zeigt dabei nach der Seite, von welcher aus die Drehungsachse durch eine entgegen dem Sinne des Uhrzeigers stattfindende Drehung um den Winkel $\frac{\pi}{2} + \varphi_2$ in die Richtung der linearen Geschwindigkeit $c_2 \varphi_2'$ übergeführt wird; sie wird daher in Figur 22 durch den nach II gehenden Kugelradius veranschaulicht.

Die geometrische Summe der angeführten fünf Beschleunigungskomponenten gibt die gesamte Beschleunigung γ_2 an, welche der Hauptpunkt H_2 des zweiten Gliedes relativ zum Gelenkmittelpunkte $G_{1,2}$ erfährt. Man hat also, wenn man für $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_2\right)$ wieder $\cos\varphi_2$ einsetzt:

$$(210) \quad \overline{\gamma_2} = \overline{c_2 \varphi_2''} + \overline{c_2 \varphi_2'^2} + \overline{c_2 \sin\varphi_2 \vartheta_2''} + \overline{c_2 \sin\varphi_2 \vartheta_2'^2} + \overline{2 c_2 \varphi_2' \vartheta_2' \cos\varphi_2}\,.$$

Nach dem unter 9b) zuletzt angeführten allgemein gültigen Satze liegt der Schwerpunkt S_2 des zweiten Gliedes auf der Verlängerung des von $G_{1,2}$ nach H_2 führenden Vektors, d. h. aber hier der Längsachse des zweiten Gliedes, und zwar so, daß sein Abstand r_2 von $G_{1,2}$ sich zu c_2 verhält, wie die Gesamtmasse m_0 zu der Masse m_2 des zweiten Gliedes, was übrigens auch schon in der ersten der Formeln (176) zum Ausdruck gekommen ist. Man kann daher durch (210) auch sofort die Beschleunigung angeben, welche der Schwerpunkt S_2 des zweiten Gliedes relativ zu $G_{1,2}$ besitzt; man braucht zu diesem Zwecke nur auf der rechten Seite von (210) an Stelle von c_2 überall

den Schwerpunktsabstand r_2 einzusetzen. Denkt man den so abgeänderten Ausdruck mit der Masse m_2 des zweiten Gliedes multipliziert, so erhält man nach Größe und Richtung die Effektivkraft $\overline{E}_2$ des Schwerpunktes S_2 für seine zum Gelenkmittelpunkte $G_{1,2}$ relative Bewegung, falls man in ihm die Masse des zweiten Gliedes konzentriert denkt. Da nun aber nach (176) $m_2 r_2$ durch $m_0 c_2$ ersetzt werden kann, so ist diese Effektivkraft gleich der zu $G_{1,2}$ relativen Effektivkraft des Schwerpunktes H_2 des zweiten reduzierten Systems, sofern man in demselben die Masse m_0 dieses Systems konzentriert denkt. Man hat daher für die relative Effektivkraft $\overline{E}_2$ des Schwerpunktes S_2 aus (210) die Vektorsumme

$$(211)\qquad \overline{E}_2 = \overline{m_0 c_2 \varphi_2''} + \overline{m_0 c_2 \varphi_2'^2} + \overline{m_0 c_2 \sin\varphi_2 \vartheta_2''} + \overline{m_0 c_2 \sin\varphi_2 \vartheta_2'^2} + \overline{2 m_0 c_2 \varphi_2' \vartheta_2' \cos\varphi_2}.$$

Es läßt sich nun leicht nachweisen, daß die in den letzten fünf Gliedern von (209) zu den Größen dieser fünf Komponenten der Effektivkraft $\overline{E}_2$ außer der Hauptstrecke d_1 noch hinzutretenden Faktoren nichts anderes sind als die Kosinus der Winkel, welche die Richtungen dieser fünf Komponenten bezüglich mit der zur Achse $\mathfrak{A}_{\varphi_1}$ und der Längsachse des ersten Gliedes senkrechten Richtung bilden, die in Figur 22 durch den Kugelradius $C1$ angegeben ist. Der Radius $C1$ bildet mit den fünf Komponenten bezüglich die Winkel $(1,2)$; $(1,2')$; $(1,\text{II})$; $(1,\text{II}')$ und $(1,\text{II})$. Die Kosinus der Winkel $(1,2)$ und $(1,\text{II})$ sind schon in (182) angegeben worden. Für die Kosinus der beiden Winkel $(1,2')$ und $(1,\text{II}')$ folgt aber aus den sphärischen Dreiecken $(1P2')$ und $(1P\text{II}')$ nach dem Kosinussatz der sphärischen Trigonometrie, da $(P,2')$ gleich φ_2 und (P,II') gleich $\frac{\pi}{2}$ ist, in der Tat

$$(212)\qquad \begin{aligned} \cos(1,2') &= \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) \\ \cos(1,\text{II}') &= -\cos\varphi_1 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1). \end{aligned}$$

Es hat sich also ergeben, daß die fünf letzten Glieder des Ausdrucks (209) zusammen gleich sind der mit der Hauptstrecke d_1 multiplizierten Projektion der zu $G_{1,2}$ relativen Effektivkraft des Schwerpunktes S_2 auf die Richtung $C1$, welche gleichzeitig auf der Längsachse des ersten Gliedes und der Richtung der Achse $\mathfrak{A}_{\varphi_1}$ senkrecht steht. Denkt man nun aber diese fünf Summanden von (209) auf die rechte Seite der zur Koordinate φ_1 gehörenden Lagrangeschen Gleichung gebracht, so ändert sich in allen das Vorzeichen; sie geben dann zusammen die mit d_1 multiplizierte Projektion einer der Effektivkraft $\overline{E}_2$ entgegengesetzt gleichen Kraft $-\overline{E}_2$ auf die Richtung $C1$ an. Da d_1 den vom Hauptpunkte H_1 des ersten Gliedes nach dem Gelenkmittelpunkte $G_{1,2}$ gezogenen Vektor bedeutet, und dieser Vektor auf der Richtung der Projektion von $-\overline{E}_2$ senkrecht steht, so gibt

die Summe der fünf auf die rechte Seite der Gleichung gebrachten Summanden das Drehungsmoment an, welches die der relativen Effektivkraft $\overline{E}_2$ entgegengesetzt gleiche Kraft $-\overline{E}_2$ auf die durch den Hauptpunkt des ersten Gliedes gehende Achse $\mathfrak{A}_{\varphi_1}$ ausüben würde, wenn sie nicht im Schwerpunkte S_2, sondern in gleicher Stärke und Richtung im Gelenkmittelpunkte $G_{1,2}$ angriffe. Beachtet man nun, daß die sämtlichen am zweiten Gliede angreifenden Kräfte parallel mit sich nach dem Gelenkmittelpunkte $G_{1,2}$ verlegt und den direkt am ersten Gliede angreifenden Kräften hinzugefügt werden mußten, um die Einwirkung der Kräfte auf das erste reduzierte System zu erhalten, und daß die auf der rechten Seite der Lagrangeschen Gleichung ursprünglich stehende Größe Q_{φ_1} das Drehungsmoment aller dieser Kräfte in bezug auf ebendieselbe durch H_1 gehende Achse $\mathfrak{A}_{\varphi_1}$ bedeutet, so braucht man also nur den am ersten reduzierten System angreifenden Kräften noch die Kraft $-\overline{E}_2$ im Gelenkmittelpunkte $G_{1,2}$ hinzuzufügen, um die ganze drehende Einwirkung auf das erste reduzierte System bezüglich der durch seinen Schwerpunkt H_1 gehenden Achse $\mathfrak{A}_{\varphi_1}$ zu erhalten. Unter dem Einfluß des resultierenden Drehungsmomentes aller dieser Kräfte bewegt sich dann das erste reduzierte System genau so wie ein einziger starrer Körper.

Es läßt sich voraussehen, daß das entsprechende Resultat für die Drehung des ersten reduzierten Systems um die im Raume feste, vom Hauptpunkte H_1 aus vertikal nach unten gerichtete Achse $\mathfrak{A}_{\vartheta_1}$ gelten wird. Um den strengen Beweis hierfür zu erbringen, muß man die zur Koordinate ϑ_1 gehörende Lagrangesche Gleichung von (208) in extenso anschreiben. Die Ausführung der partiellen Differentiationen von (199) nach ϑ_1' und ϑ_1 und der totalen Differentiation des zuerst erhaltenen Ausdruckes nach der Zeit t ergibt schließlich bei geeigneter Zusammenfassung verschiedener Glieder den Wert

$$(213)\qquad \begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \vartheta_1'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \vartheta_1} = \\ & m_0[(p_1^2\sin^2\varrho_1 + q_1^2\cos^2\varrho_1)\sin^2\varphi_1 + r_1^2\cos^2\varphi_1]\cdot\vartheta_1'' \\ & + m_0(p_1^2 - q_1^2)\sin\varrho_1\cos\varrho_1\sin\varphi_1\cdot\varphi_1'' \\ & + m_0 r_1^2\cos\varphi_1\cdot\varrho_1'' \\ & + 2m_0[(p_1^2\sin^2\varrho_1 + q_1^2\cos^2\varrho_1) - r_1^2]\sin\varphi_1\cos\varphi_1\cdot\varphi_1'\vartheta_1' \\ & + 2m_0(p_1^2 - q_1^2)\sin\varrho_1\cos\varrho_1\sin^2\varphi_1\cdot\vartheta_1'\varrho_1' \\ & + m_0(p_1^2 - q_1^2)\sin\varrho_1\cos\varrho_1\cos\varphi_1\cdot\varphi_1'^2 \\ & + m_0[(p_1^2 - q_1^2)(\cos^2\varrho_1 - \sin^2\varrho_1) - r_1^2]\sin\varphi_1\cdot\varphi_1'\varrho_1' \\ & + m_0 d_1 c_2\sin\varphi_1\cos\varphi_2\sin(\vartheta_2 - \vartheta_1)\cdot\varphi_2'' \\ & - m_0 d_1 c_2\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin(\vartheta_2 - \vartheta_1)\cdot\varphi_2'^2 \\ & + m_0 d_1 c_2\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos(\vartheta_2 - \vartheta_1)\cdot\vartheta_2'' \\ & - m_0 d_1 c_2\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin(\vartheta_2 - \vartheta_1)\cdot\vartheta_2'^2 \\ & + 2m_0 d_1 c_2\sin\varphi_1\cos\varphi_2\cos(\vartheta_2 - \vartheta_1)\cdot\varphi_2'\vartheta_2'. \end{aligned}$$

Setzt man in diesem Ausdruck alle mit dem Index 2 versehenen Größen und außerdem die in m_0 steckende Masse m_2 gleich Null, was damit gleichbedeutend ist, daß das ganze System überhaupt nur aus dem ersten Gliede besteht, so geht wieder (213) in den Ausdruck über, welcher bei einem einzigen starren Körper allein auf der linken Seite der Lagrangeschen Gleichung stehen würde. Bringt man daher die letzten fünf Summanden von (213), welche die zu der Drehung des zweiten Gliedes gehörenden Winkelgeschwindigkeiten und Winkelbeschleunigungen enthalten, auf die rechte Seite der Lagrangeschen Gleichung, so hat man auf der linken Seite nur noch den der Bewegung eines starren Körpers entsprechenden Ausdruck. Dieser starre Körper ist dann aber, wenn das zweite Glied am ersten hängt, nicht das erste Glied, sondern das erste reduzierte System; denn sowohl die Masse m_0 als auch die Trägheitsradien p_1, q_1, r_1 gehören dem ersten reduzierten System an, und die Winkelgeschwindigkeiten φ_1', ϑ_1', ϱ_1' und Winkelbeschleunigungen φ_1'', ϑ_1'', ϱ_1'' beziehen sich auf Achsen durch den Schwerpunkt des ersten reduzierten Systems.

Die fünf auf die rechte Seite der Lagrangeschen Gleichung herübergenommenen Summanden, welche dabei das entgegengesetzte Vorzeichen erhalten haben, besitzen alle den Faktor $d_1 \sin\varphi_1$. Sieht man von letzterem ab, so bedeuten die übrig bleibenden fünf Faktoren die Projektionen der in entgegengesetzter Richtung genommenen fünf Komponenten, aus denen sich die zu $G_{1,2}$ relative Effektivkraft $\bar{E}_2$ nach (211) zusammensetzt, auf die Richtung CI (vgl. Fig. 22), d. h. also auf die Richtung der Normalen zur Ebene $\mathfrak{E}_1$ (Fig. 21), welche bekanntlich mit der Richtung der Achse $\mathfrak{A}_{\varphi_1}$ übereinstimmt. Denn mit dieser Richtung bilden die Richtungen der fünf Komponenten bezüglich die Winkel (I, 2); (I, 2'); (I, II); (I, II') und (I, II), deren Kosinus zum Teil schon in (182) angegeben sind, zum Teil sich an der Hand von Figur 22 leicht ableiten lassen. So ist $(\mathrm{I, II'}) = \frac{\pi}{2} + (\vartheta_2 - \vartheta_1)$ und $\cos(\mathrm{I}, 2')$ ergibt sich aus dem spärischen Dreieck (I II' 2'), wenn man noch beachtet, daß $(\mathrm{II'}\,2') = \frac{\pi}{2} - \varphi_2$ ist und der Bogen (II' 2') auf (I II') senkrecht steht. Man hat demnach

$$(214)\qquad \begin{aligned} \cos(\mathrm{I}, 2') &= -\sin\varphi_2 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) \\ \cos(\mathrm{I, II'}) &= -\sin(\vartheta_2 - \vartheta_1). \end{aligned}$$

Der allen fünf Summanden gemeinsame Faktor $d_1 \sin\varphi_1$ gibt nun, wie man leicht aus Figur 21 bestätigt, den Abstand des Gelenkmittelpunktes $G_{1,2}$ von der im Hauptpunkte H_1 des ersten Gliedes vertikal nach unten gehenden Achse $\mathfrak{A}_{\vartheta_1}$ an und steht dabei auf der Richtung CI, auf welche die fünf Komponenten von $-\bar{E}_2$ projiziert gedacht sind, senkrecht. Deshalb geben die fünf auf die rechte Seite der

Lagrangeschen Gleichung gebrachten Summanden zusammen das Drehungsmoment an, welches die zu $G_{1,2}$ relative und in entgegengesetzter Richtung genommene Effektivkraft des Schwerpunktes S_2 in bezug auf die Achse $\mathfrak{A}_{\vartheta_1}$ des Hauptpunktes besitzt, nachdem man sie parallel nach dem Gelenkmittelpunkte $G_{1,2}$ verlegt hat. Die gleiche Verlegung mußte mit allen am zweiten Gliede angreifenden Kräften vorgenommen werden, um die am ersten System angreifenden Kräfte zu erhalten. Die zur Koordinate ϑ_1 gehörende Lagrangesche Gleichung (208) sagt daher aus, daß, wenn man den am ersten reduzierten System angreifenden Kräften noch im Gelenkmittelpunkte $G_{1,2}$ die Kraft $-\overline{E}_2$ hinzufügt, das erste reduzierte System sich unter der Einwirkung aller dieser Kräfte auch in bezug auf die Drehung um die vertikale Achse genau so verhält wie ein einziger starrer Körper.

Schließlich läßt sich das gleiche Resultat auch für die Drehung um die Längsachse des ersten Gliedes erweisen. Aus (199) erhält man den verhältnismäßig einfachen Ausdruck

$$(215)\quad \begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \varrho_1'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varrho_1} = {} & m_0 r_1^2 \cdot \varrho_1'' \\ & + m_0 r_1^2 \cos\varphi_1 \cdot \vartheta_1'' \\ & + m_0 (p_1^2 - q_1^2) \sin\varrho_1 \cos\varrho_1 \cdot \varphi_1'^2 \\ & - m_0 (p_1^2 - q_1^2) \sin\varrho_1 \cos\varrho_1 \sin^2\varphi_1 \cdot \vartheta_1'^2 \\ & - m_0 [(p_1^2 - q_1^2)(\cos^2\varrho_1 - \sin^2\varrho_1) + r_1^2] \sin\varphi_1 \cdot \varphi_1' \vartheta_1'. \end{aligned}$$

In diesem Ausdruck fällt zunächst auf, daß er gar keine Größen mit dem Index 2 enthält; nur in der Gesamtmasse m_0 steckt die Masse m_2 des zweiten Gliedes; setzt man diese gleich Null, so gehen wieder die Trägheitsradien des ersten reduzierten Systems in die des ersten Gliedes über, und man hat die linke Seite der zur Koordinate ϱ gehörenden Lagrangeschen Gleichung für einen einzigen starren Körper, nämlich das erste Glied. Es stellt daher (215) die linke Seite der entsprechenden Gleichung dar, welche zu dem als starrer Körper aufgefaßten ersten reduzierten System gehört. Die auf der rechten Seite der Lagrangeschen Gleichung stehende Größe Q_{ϱ_1} gibt das Drehungsmoment an, welches die sämtlichen am ersten reduzierten System angreifenden Kräfte, zu denen insbesondere auch die ursprünglich am zweiten Gliede angreifenden, aber nach $G_{1,2}$ parallel verlegten Kräfte gehören, für die Achse $\mathfrak{A}_{\varrho_1}$ des ersten reduzierten Systems, welche hier mit der Längsachse des ersten Gliedes zusammenfällt, besitzen. Es spielt also hierbei die Effektivkraft $-\overline{E}_2$ scheinbar gar keine Rolle. Beachtet man aber, daß bei den beiden anderen Lagrangeschen Gleichungen diese Kraft nach $G_{1,2}$ verlegt zu denken war, und daß dieser Punkt auf der Achse $\mathfrak{A}_{\varrho_1}$ selbst liegt, so kann man auch im vorliegenden Falle die Kraft $-\overline{E}_2$ den übrigen am ersten reduzierten System angreifenden Kräften hinzufügen; denn ihr

Drehungsmoment verschwindet ja für diese Achse. Das letztere trifft übrigens auch für die anderen nach $G_{1,2}$ verschobenen Kräfte des zweiten Gliedes zu.

Die drei Lagrangeschen Gleichungen auf der linken Seite von (208) lassen also übereinstimmend erkennen, daß, wenn man den am zweiten Gliede angreifenden Kräften noch die Kraft $-\overline{E}_2$ hinzufügt und alle diese Kräfte nach dem Gelenkmittelpunkte $G_{1,2}$ verlegt, bei den Bewegungen des zweigliedrigen räumlichen Gelenksystems das erste reduzierte System sich unter dem Einfluß dieser Kräfte und der direkt am ersten Gliede angreifenden Kräfte gerade so um seinen Schwerpunkt H_1 dreht, als ob es einen einzigen im Raume frei beweglichen starren Körper darstellte.

Die Bedeutung des reduzierten Systems beschränkt sich nun nicht auf die Drehung um seinen Schwerpunkt, d. h. den Hauptpunkt seines Kerngliedes, sondern erstreckt sich auch auf die Bewegung des Hauptpunktes selbst. Aus der Beziehung zwischen den Hauptpunkten und dem Gesamtschwerpunkte des Gelenksystems (vgl. Fig. 21) geht unmittelbar hervor, daß der Hauptpunkt H_1 des ersten Gliedes sich relativ zum Gesamtschwerpunkte S_0 genau so bewegt wie der Gelenkmittelpunkt $G_{1,2}$ relativ zum Hauptpunkte H_2 des zweiten Gliedes. Die zu $G_{1,2}$ relative Beschleunigung von H_2 war $\overline{\gamma}_2$ (vgl. Formel (210)); daher ist die zu H_2 relative Beschleunigung von $G_{1,2}$ und ebenso die zu S_0 relative Beschleunigung von H_1 gleich $-\overline{\gamma}_2$. Bezeichnet man weiterhin die Beschleunigung des Gesamtschwerpunktes S_0 im Raume, deren Größe ja durch $\sqrt{x_0''^2 + y_0''^2 + z_0''^2}$ bestimmt wird, kurz durch den Vektor $\overline{\gamma}_0$, so erhält man für die absolute Beschleunigung des Hauptpunktes H_1 im Raume den Wert

$$\overline{\gamma}_0 - \overline{\gamma}_2. \tag{216}$$

Wenn nun das erste reduzierte System sich auch hinsichtlich der Bewegung seines Schwerpunktes H_1 wie ein starrer Körper verhalten soll, so müssen nach dem bekannten Satze von der Bewegung des Schwerpunktes die auf dasselbe einwirkenden Kräfte äquivalent mit der Vektorsumme

$$\overline{m_0\gamma_0} - \overline{m_0\gamma_2} \tag{217}$$

sein. Dies ist tatsächlich der Fall; denn $\overline{m_0\gamma_0}$ ist gleich der geometrischen Summe aller am Gelenksystem einwirkenden äußeren Kräfte, und $-\overline{m_0\gamma_2}$ ist nach (210) und (211) nichts anderes als die Kraft $-\overline{E}_2$, welche der zu $G_{1,2}$ relativen Effektivkraft des Schwerpunktes S_2 entgegengesetzt gleich ist. Auf das erste reduzierte System wirken aber gerade die sämtlichen äußeren Kräfte des Gelenksystems und außerdem die Kraft $-\overline{E}_2$, welche ebenfalls als eine äußere Kraft des ersten reduzierten Systems aufzufassen ist.

Das reduzierte System ist zunächst ein fingiertes Massensystem, das sich deshalb nicht genau verwirklichen läßt, weil man nicht eine Masse nur in einem Punkte konzentrieren kann. Es läßt sich aber zeigen, daß unter Umständen das Gelenksystem sich gegenüber den einwirkenden Kräften gerade so verhält, wie es das reduzierte System tun würde, wenn man dasselbe verwirklichen könnte. Setzt man nämlich in den soeben ausführlich gedeuteten Lagrangeschen Gleichungen nur die zum zweiten Gliede gehörenden Winkelgeschwindigkeiten und Winkelbeschleunigungen φ_2', ϑ_2' und φ_2'', ϑ_2'' gleich Null, ohne aber die übrigen mit dem Index 2 versehenen Größen m_2, c_2, φ_2 und ϑ_2 zu Null zu machen, so verschwinden zwar auch die letzten fünf Summanden in (209) und (213), alle anderen Summanden von (209), (213) und (215) bleiben aber unverändert. Insbesondere haben die Größen p_1, q_1 und r_1 nach wie vor die Bedeutung als Hauptträgheitsradien des Schwerpunktes H_1 vom ersten reduzierten System, und auch die auf der rechten Seite der Lagrangeschen Gleichungen stehenden Größen Q behalten ihre Werte bei. Das Verschwinden der Winkelgeschwindigkeiten und Winkelbeschleunigungen des zweiten Gliedes ist damit gleichbedeutend, daß die Richtungskoordinaten φ_2, ϑ_2 für die Längsachse des zweiten Gliedes konstant bleiben, so daß also die Längsachse des zweiten Gliedes sich bei den Bewegungen des Gelenksystems nur parallel im Raume verschieben dürfte, während das zweite Glied selbst irgend welche Drehungen um die Längsachse ausführen könnte. Sieht man der Einfachheit halber von dieser Beweglichkeit um die Längsachse auch noch ab, so würde also das zweite Glied nur Translationsbewegungen ausführen dürfen. Dies vorausgesetzt verhält sich dann das ganze Gelenksystem in der Tat so, wie das fingierte erste reduzierte System.

Nun wird allerdings der Fall, daß das zweite Glied die Drehungen des ersten Gliedes nur mit Translationsbewegung begleitet, selten wirklich eintreten. Es läßt aber die eben angestellte Betrachtung erkennen, daß durch die angenommene Verlegung der ganzen Masse des zweiten Gliedes in den Gelenkmittelpunkt $G_{1,2}$, wie sie die Zusammensetzung des ersten reduzierten Systems verlangt, gerade die Wirkung in Rechnung gezogen wird, welche eine Translationsbewegung des zweiten Gliedes infolge des Gelenkzusammenhanges auf die Bewegungen des ersten Gliedes ausübt. Der Einfluß der außerdem in der Regel noch stattfindenden Drehung des zweiten Gliedes auf die Bewegung des ersten Gliedes kommt in dem Auftreten der negativen Effektivkraft $-\overline{E}_2$ der zu $G_{1,2}$ relativen Bewegung des Schwerpunktes S_2 in den Lagrangeschen Gleichungen vollkommen zur Geltung.

Endlich sei noch auf den besonderen Fall hingewiesen, daß der Schwerpunkt des zweiten Gliedes mit dem Gelenkmittelpunkte $G_{1,2}$ zusammenfällt. Dann verschwindet die Effektivkraft $-\overline{E}_2$ bei jeder

beliebigen Bewegung des zweiten Gliedes. In den Formeln (209) und (213) ist dies daran zu erkennen, daß c_2 den Wert Null annimmt; denn wenn der Schwerpunkt S_2 nach $G_{1,2}$ rückt, so fällt auch der zwischen beiden liegende Hauptpunkt H_2 mit $G_{1,2}$ zusammen. Es verhält sich dann das ganze Gelenksystem in bezug auf die Drehungen des ersten Gliedes auch genau so wie das erste reduzierte System.

Bisher war der allgemeine Fall angenommen, daß die drei Hauptträgheitsradien für den Schwerpunkt des ersten Gliedes und infolgedessen auch diejenigen für den Schwerpunkt des ersten reduzierten Systems verschieden groß seien. Bei den meisten Extremitätenabschnitten des menschlichen Körpers gestalten sich nun die Verhältnisse insofern etwas einfacher, als das Trägheitsellipsoid des Schwerpunktes mit großer Annäherung ein Rotationsellipsoid darstellt (vgl. Abschnitt 15 im II. Teil), dessen Rotationsachse mit der Längsachse des Gliedes zusammenfällt. Daher nehmen in diesem Falle die beiden Hauptträgheitsradien p_1 und q_1 gleiche Werte an. Hieraus ergibt sich aber eine ganz wesentliche Vereinfachung der Lagrangeschen Gleichungen. Bezeichnet man das resultierende Drehungsmoment aller am ersten reduzierten System angreifenden Kräfte, die Kraft $-\overline{E}_2$ mit eingeschlossen, für die durch seinen Schwerpunkt H_1 gehenden Achsen $\mathfrak{A}_{\varphi_1}$, $\mathfrak{A}_{\vartheta_1}$ und $\mathfrak{A}_{\varrho_1}$ bezüglich mit D_{φ_1}, D_{ϑ_1} und D_{ϱ_1}, so lauten in diesem besonderen Falle die drei Lagrangeschen Gleichungen, wie man leicht aus (209), (213) und (215) ableitet:

$$(218)\quad \begin{aligned} &m_0 p_1^2\cdot\varphi_1'' - m_0(p_1^2 - r_1^2)\sin\varphi_1\cos\varphi_1\cdot\vartheta_1'^2 + m_0 r_1^2 \sin\varphi_1\cdot\vartheta_1'\varrho_1' = D_{\varphi_1}\\ &m_0(p_1^2\sin^2\varphi_1 + r_1^2\cos^2\varphi_1)\cdot\vartheta_1'' + m_0 r_1^2\cos\varphi_1\cdot\varrho_1''\\ &\qquad + 2m_0(p_1^2 - r_1^2)\sin\varphi_1\cos\varphi_1\cdot\varphi_1'\vartheta_1' - m_0 r_1^2\sin\varphi_1\cdot\varphi_1'\varrho_1' = D_{\vartheta_1}\\ &m_0 r_1^2\cdot\varrho_1'' + m_0 r_1^2\cos\varphi_1\cdot\vartheta_1'' - m_0 r_1^2\sin\varphi_1\cdot\varphi_1'\vartheta_1' = D_{\varrho_1}. \end{aligned}$$

Bisher sind nur die Lagrangeschen Gleichungen abgeleitet und gedeutet worden, welche zu den drei Winkelkoordinaten φ_1, ϑ_1 und ϱ_1 des ersten Gliedes gehören. Es ist nun ohne weiteres klar, daß im Falle vollkommen freier Beweglichkeit des ganzen Gelenksystems die drei noch fehlenden, zu φ_2, ϑ_2 und ϱ_2 gehörenden Lagrangeschen Gleichungen (208) genau dieselbe Form aufweisen, wie die aus (209), (213) und (215) hervorgegangenen, und daß dieselben die ganz entsprechende Bedeutung für das zweite reduzierte System besitzen, wie jene für das erste. In der Tat findet man für die linken Seiten dieser Gleichungen Ausdrücke, die aus (209), (213) und (215) allein durch Vertauschen der beiden Indizes 1 und 2 bei allen Größen mit Ausnahme der beiden Hauptstrecken d_1 und c_2 hervorgehen; nur bei letzteren muß man auch die Buchstaben mit vertauschen, so daß c_2 an Stelle von d_1 tritt und umgekehrt, was nur eine Folge der für die Hauptstrecken eingeführten Bezeichnungsweise ist.

Die Bedeutung der letzten fünf Summanden in den auf diese Weise aus (209) und (213) entstehenden Ausdrücken ist ganz die entsprechende wie bei den früheren Gleichungen. Dieselben geben zusammen das Drehungsmoment an, mit welchem die Effektivkraft $\overline{E}_1$ der zum Gelenkmittelpunkte $G_{1,2}$ relativen Bewegung des Schwerpunktes S_1 des ersten Systems auf die Achse $\mathfrak{A}_{\varphi_2}$ bzw. $\mathfrak{A}_{\vartheta_2}$ durch den Schwerpunkt H_2 des zweiten reduzierten Systems einwirkt, wenn man sie in $G_{1,2}$ angreifen läßt. Bringt man bei beiden Gleichungen diese fünf Summanden auf die rechte Seite, so daß sich in allen das Vorzeichen umkehrt, so wird damit das dort schon stehende Drehungsmoment Q_{φ_2} bzw. Q_{ϑ_2} der auf das zweite reduzierte System einwirkenden Kräfte um das auf dieselbe Achse bezogene Drehungsmoment einer in $G_{1,2}$ angreifenden Kraft $-\overline{E}_1$ vermehrt, welche der zu $G_{1,2}$ relativen Effektivkraft $\overline{E}_1$ des Schwerpunktes S_1 entgegengesetzt gleich ist. Dies läßt sich auch für die dritte Lagrangesche Gleichung annehmen, weil das Drehungsmoment von $-\overline{E}_1$ für die Achse $\mathfrak{A}_{\varrho_2}$, welcher ihr jetzt als Punkt des zweiten Gliedes aufzufassender Angriffspunkt $G_{1,2}$ selbst angehört, verschwindet. Die drei Lagrangeschen Gleichungen sagen daher wiederum aus, daß nach der Verlegung aller am ersten Gliede angreifenden Kräfte und der Kraft $-\overline{E}_1$ nach dem Gelenkmittelpunkte $G_{1,2}$ und außerdem der direkt am zweiten Gliede angreifenden Kräfte das zweite reduzierte System sich genau so um seinen Schwerpunkt H_2 dreht, wie es ein einziger starrer Körper von der entsprechenden Zusammensetzung tun würde. Es läßt sich weiterhin leicht erkennen, daß auch der Schwerpunkt H_2 sich bei den Bewegungen des ganzen Gelenksystems genau so bewegt, als ob die Masse m_0 des ganzen Systems in ihm konzentriert wäre, und alle diese Kräfte direkt an ihm angriffen.

Macht man auch hier wieder die bei den Extremitätenabschnitten des menschlichen Körpers nahezu erfüllte Voraussetzung, daß die Trägheitsradien p_2 und q_2 für die beiden Querachsen einander gleich sind, so nehmen die drei Lagrangeschen Gleichungen eine viel einfachere Form an. Bezeichnet man dabei das resultierende Drehungsmoment aller am zweiten reduzierten System angreifenden Kräfte, wiederum die Kraft $-\overline{E}_1$ mit eingeschlossen, für die durch seinen Schwerpunkt H_2 gehenden Achsen $\mathfrak{A}_{\varphi_2}$, $\mathfrak{A}_{\vartheta_2}$ und $\mathfrak{A}_{\varrho_2}$ bezüglich mit D_{φ_2}, D_{ϑ_2} und D_{ϱ_2}, so erhält man in diesem besonderen Falle die den drei Gleichungen (218) genau entsprechenden Lagrangeschen Gleichungen, welche sich von diesen nur dadurch unterscheiden, daß überall der Index 2 an Stelle des Index 1 getreten ist.

Die bisher abgeleiteten Gleichungen gelten zwar zunächst für den Fall vollkommen freier Beweglichkeit des Gelenksystems im Raume; sie können aber auch auf den schon oben in Betracht gezogenen Fall übertragen werden, daß bei den Bewegungen des räumlichen Gelenk-

systems ein Punkt O_1 der Längsachse des ersten Gliedes festbleibt, und das System infolgedessen nur Drehungen um diesen Punkt ausführen kann. Will man die bisher gewonnenen Differentialgleichungen diesem Falle anpassen, so muß man in (209), (213) und (215), wie ein Vergleich der Formeln (199) und (206) lehrt, die Trägheitsradien p_1, q_1, r_1 durch die Trägheitsradien p_{01}, q_{01}, r_{01} des ersten reduzierten Systems für den Punkt O_1, ferner in den entsprechenden zum zweiten reduzierten System gehörenden Gleichungen die Trägheitsradien p_2, q_2, r_2 durch die Trägheitsradien p_{02}, q_{02}, r_{02} des zweiten reduzierten Systems für den Gelenkmittelpunkt $G_{1,2}$, und außerdem überall die Hauptstrecke d_1 durch die schon früher mit l_1 bezeichnete Strecke $O_1 G_{1,2}$ auf der Längsachse des ersten Gliedes ersetzen. An Stelle der in den Gleichungen (208) auf der rechten Seite stehenden Drehungsmomente Q_φ, Q_ϑ, Q_ϱ für Achsen durch die beiden Hauptpunkte treten ferner die von den gleichen Kräften ausgeübten Drehungsmomente für die parallelen Achsen durch O_1.

Die letzten fünf Glieder in den aus (209) und (213) hervorgehenden Ausdrücken stellen wieder Drehungsmomente dar und lassen sich daher zweckmäßigerweise mit den Größen Q_φ und Q_ϑ auf der rechten Seite der Gleichungen (208) vereinigen.

Bei den zum ersten reduzierten System gehörenden Gleichungen geben diese auf die rechte Seite herübergenommenen Glieder, wie man ohne weiteres bestätigt, Drehungsmomente der in $G_{1,2}$ angreifend zu denkenden Kraft $-\overline{E}_2$ an, und zwar bezogen auf die durch den festen Punkt O_1 gehenden und zu $\mathfrak{A}_{\varphi_1}$, $\mathfrak{A}_{\vartheta_1}$ parallelen Achsen $\mathfrak{A}_{\varphi_{01}}$, $\mathfrak{A}_{\vartheta_{01}}$. Faßt man diese Drehungsmomente bezüglich mit den für die gleichen Achsen geltenden Drehungsmomenten Q_{φ_1}, Q_{ϑ_1} zu den resultierenden Drehungsmomenten $D_{\varphi_{01}}$, $D_{\vartheta_{01}}$ zusammen und setzt auch $D_{\varrho_{01}}$ an Stelle von Q_{ϱ_1} ein, da die Kraft $-\overline{E}_2$ für die Längsachse ($\mathfrak{A}_{\varrho_{01}}$) das Drehungsmoment Null besitzt, so erhält man unter der Annahme, daß das Trägheitsellipsoid des ersten reduzierten Systems für O_1 ein Rotationsellipsoid ist, die drei ersten der umstehenden Gleichungen (219).

Bei den zum zweiten reduzierten System gehörenden Gleichungen haben die entsprechenden fünf Glieder, die hier bezüglich mit dem Faktor φ_1'', $\varphi_1'^2$, ϑ_1'', $\vartheta_1'^2$ und $\varphi_1'\vartheta_1'$ behaftet sind, eine etwas andere Bedeutung, welche nach den früheren ausführlichen Erörterungen über die ebenen Gelenksysteme aber auch leicht zu erkennen ist.

Versteht man unter $\overline{g_{1,2}}$ die Gesamtbeschleunigung des Gelenkmittelpunktes $G_{1,2}$ bei den Drehungen des ersten Gliedes um den festen Punkt O_1, so können wieder diese fünf Glieder aufgefaßt werden als die Drehungsmomente einer im Hauptpunkte H_2 des zweiten reduzierten Systems angreifenden Kraft von der Größe $-\overline{m_0 g_{1,2}}$, bezogen auf die durch den Punkt $G_{1,2}$ gehenden und zu $\mathfrak{A}_{\varphi_2}$, $\mathfrak{A}_{\vartheta_2}$ (und

$\mathfrak{A}_{\varrho_2}$) parallelen Achsen $\mathfrak{A}_{\varphi_{02}}$, $\mathfrak{A}_{\vartheta_{02}}$ (und $\mathfrak{A}_{\varrho_{02}}$). Bezeichnet man mit $D_{\varphi_{02}}$, $D_{\vartheta_{02}}$ und $D_{\varrho_{02}}$ die aus diesen Drehungsmomenten und den auf die gleichen Achsen bezogenen Größen Q_{φ_2}, Q_{ϑ_2}, Q_{ϱ_2} zusammengesetzten Drehungsmomente, so erhält man die letzten drei der Gleichungen (219), wenn wiederum angenommen wird, daß das Trägheitsellipsoid des zweiten reduzierten Systems für $G_{1,2}$ ein Rotationsellipsoid ist.

Das vollständige System der Lagrangeschen Gleichungen lautet daher in diesem Falle

$$\begin{aligned}
&m_0 p_{01}^2 \cdot \varphi_1'' - m_0 (p_{01}^2 - r_{01}^2) \sin\varphi_1 \cos\varphi_1 \cdot \vartheta_1'^2 \\
&\qquad + m_0 r_{01}^2 \sin\varphi_1 \cdot \vartheta_1' \varrho_1' = D_{\varphi_{01}} \\
&m_0 (p_{01}^2 \sin^2\varphi_1 + r_{01}^2 \cos^2\varphi_1) \cdot \vartheta_1'' + m_0 r_{01}^2 \cos\varphi_1 \cdot \varrho_1'' \\
&\qquad + 2 m_0 (p_{01}^2 - r_{01}^2) \sin\varphi_1 \cos\varphi_1 \cdot \varphi_1' \vartheta_1' \\
&\qquad - m_0 r_{01}^2 \sin\varphi_1 \cdot \varphi_1' \varrho_1' = D_{\vartheta_{01}} \\
(219)\quad &m_0 r_{01}^2 \cdot \varrho_1'' + m_0 r_{01}^2 \cos\varphi_1 \cdot \vartheta_1'' - m_0 r_{01}^2 \sin\varphi_1 \cdot \varphi_1' \vartheta_1' = D_{\varrho_{01}} \\
&m_0 p_{02}^2 \cdot \varphi_2'' - m_0 (p_{02}^2 - r_{02}^2) \sin\varphi_2 \cos\varphi_2 \cdot \vartheta_2'^2 \\
&\qquad + m_0 r_{02}^2 \sin\varphi_2 \cdot \vartheta_2' \varrho_2' = D_{\varphi_{02}} \\
&m_0 (p_{02}^2 \sin^2\varphi_2 + r_{02}^2 \cos^2\varphi_2) \cdot \vartheta_2'' + m_0 r_{02}^2 \cos\varphi_2 \cdot \varrho_2'' \\
&\qquad + 2 m_0 (p_{02}^2 - r_{02}^2) \sin\varphi_2 \cos\varphi_2 \cdot \varphi_2' \vartheta_2' \\
&\qquad - m_0 r_{02}^2 \sin\varphi_2 \cdot \varphi_2' \varrho_2' = D_{\vartheta_{02}} \\
&m_0 r_{02}^2 \cdot \varrho_2'' + m_0 r_{02}^2 \cos\varphi_2 \cdot \vartheta_2'' - m_0 r_{02}^2 \sin\varphi_2 \cdot \varphi_2' \vartheta_2' = D_{\varrho_{02}}.
\end{aligned}$$

Auf diese Gleichungen wird sich die kinetische Untersuchung der im menschlichen Körper auftretenden zweigliedrigen räumlichen Gelenksysteme, wie z. B. des gegen den festen Schultergürtel beweglichen Armes oder des gegen das festgestellte Becken beweglichen Beins vor allen Dingen zu stützen haben; daher sind dieselben hier in extenso angeführt worden.

12. Das allgemeine räumliche Gelenksystem.

Die im vorhergehenden Abschnitt ausführlich abgeleiteten Lagrangeschen Bewegungsgleichungen des zweigliedrigen räumlichen Gelenksystems waren schon ziemlich umfangreich und in ihrer Form wenig übersichtlich. Durch die Einführung der reduzierten Systeme hat sich ihnen aber eine sehr einfache Deutung geben lassen. Die kinetische Untersuchung des zweigliedrigen Systems ist unter Verwendung derselben auf die Kinetik eines einzigen starren Körpers zurückgeführt worden. Bei dem allgemeinen aus n Gliedern bestehenden Gelenksystem werden nun die Formeln natürlich noch sehr viel komplizierter, wenn auch das Prinzip ihrer Ableitung genau das gleiche ist, wie beim zweigliedrigen System. Die Deutung der zu

dem allgemeinen System gehörenden Bewegungsgleichungen, welche infolge ihrer großen Anzahl und ihres bedeutenden Umfanges hier nicht in extenso mitgeteilt werden sollen, ist dagegen ebenso einfach wie beim zweigliedrigen System; die genaue Analyse ergibt, daß jede der zahlreichen Bewegungsgleichungen sich auch hier als die Bewegungsgleichung eines reduzierten Systems, d. h. also eines isolierten starren Körpers interpretieren läßt. Wie zu jedem Gliede im allgemeinen drei Winkel φ_j, ϑ_j, ϱ_j als allgemeine Richtungskoordinaten gehören, sofern man wieder zunächst alle Gelenke als solche von drei Freiheitsgraden mit festem Gelenkmittelpunkte auffaßt, so kommen jedem reduzierten System drei Bewegungsgleichungen zu, welche sich im Falle vollkommen freier Beweglichkeit des Gelenksystems auf die Drehungen desselben um Achsen $\mathfrak{A}_{\varphi_j}$, $\mathfrak{A}_{\vartheta_j}$ und $\mathfrak{A}_{\varrho_j}$ durch seinen Schwerpunkt, d. h. den Hauptpunkt des dem System zugrunde liegenden Kerngliedes beziehen.

Beim zweigliedrigen System war jedes der beiden Glieder nur mit einem einzigen durch ein Gelenk verbunden. Daß die Glieder des n-gliedrigen Systems im allgemeinen mehrere Gelenke besitzen, durch welche sie mit anderen im Zusammenhang stehen, bedingt für die Deutung der Bewegungsgleichungen durchaus keine Komplikation. Es wiederholt sich an jedem der an einem Gliede, etwa dem $j$ten Gliede des Systems, befindlichen Gelenke derselbe Vorgang. Das Teilsystem, welches an dem Gelenke hängt und das daher vom $j$ten Gliede abfallen würde, wenn man das Gelenk durchtrennen wollte, wirkt infolge seiner eigenen Bewegung auf das $j$te Glied ein. Diese Einwirkung kann aber selbstverständlich nur da stattfinden, wo das Teilsystem mit dem $j$ten Gliede in Berührung ist, d. h. also in dem beide verbindenden Gelenke. Von der Eigenbewegung des Teilsystems sondert man zweckmäßigerweise zunächst eine Translationsbewegung ab, welche mit der Bewegung des Mittelpunktes des Verbindungsgelenks übereinstimmt. Bei dieser behält der Schwerpunkt des Teilsystems seine Lage relativ zum Gelenkmittelpunkte bei, und der Einfluß derselben auf die Bewegung des $j$ten Gliedes kann dadurch vollkommen zur Darstellung gebracht werden, daß man die ganze Masse des Teilsystems nach dem Mittelpunkte des Verbindungsgelenks verlegt und dem $j$ten Gliede hinzugefügt denkt, wie es für die Zusammensetzung des $j$ten reduzierten Systems erforderlich ist. Außer der Translationsbewegung werden nun die einzelnen Glieder des Teilsystems noch Drehungen im Raume ausführen, welche zur Folge haben, daß der Schwerpunkt des Teilsystems sich relativ zum Mittelpunkte des Verbindungsgelenks bewegt. Auch diese Drehbewegung des Teilsystems wird natürlich ihren Einfluß auf die Bewegungen des $j$ten Gliedes ausüben; und da zeigt nun die genaue Analyse der Bewegungsgleichungen, daß derselbe auch im allgemeinen Falle durch

eine im Mittelpunkte des Verbindungsgelenks angreifende Kraft dargestellt werden kann, welche der Effektivkraft der zum Mittelpunkte des Verbindungsgelenks relativen Bewegung des Schwerpunktes des Teilsystems entgegengesetzt gleich ist. In Rücksicht auf den unter 9b) geschilderten Zusammenhang zwischen den Hauptpunkten und den Schwerpunkten der Teilsysteme kann man auch für diese Effektivkraft des Schwerpunktes des Teilsystems das Produkt aus der Gesamtmasse m_0 des ganzen Gelenksystems und der zum Mittelpunkte des Verbindungsgelenks relativen Beschleunigung des (veränderlichen) Hauptpunktes des Teilsystems, welche kurz als die relative Effektivkraft dieses Hauptpunktes bezeichnet sein soll, einsetzen; auch diese Effektivkraft ist in entgegengesetzter Richtung zu nehmen und nach dem Mittelpunkte des Verbindungsgelenks verlegt zu denken. Endlich werden auch die an dem Teilsystem direkt angreifenden Kräfte auf die Bewegung des $j$ten Gliedes von Einfluß sein; man erhält denselben ohne weiteres dadurch, daß man jede dieser Kräfte parallel mit sich nach dem Mittelpunkte des Verbindungsgelenks verlegt.

Denkt man nun an jedem Gelenkmittelpunkte des $j$ten Gliedes die Verlegung der Masse des Teilsystems, der in negativer Richtung genommenen relativen Effektivkraft des Hauptpunktes des Teilsystems und der an dem Teilsystem direkt angreifenden Kräfte durchgeführt, so erhält man das $j$te reduzierte System und eine Reihe von Kräften, welche an Punkten desselben angreifen. Diese Kräfte zerfallen in drei Gruppen. Die erste Gruppe umfaßt alle Kräfte, die schon direkt an dem $j$ten Gliede angreifen. Die zweite Gruppe enthält die übrigen Kräfte des Gelenksystems, welche ursprünglich außerhalb des $j$ten Gliedes angreifen und parallel nach dem ihrem Angriffspunkte innerhalb des Gelenksystems am nächsten liegenden Gelenkmittelpunkte des $j$ten Gliedes verlegt sind. Diese beiden Gruppen machen zusammen die Kräfte aus, welche früher kurz als die Kräfte des $j$ten reduzierten Systems bezeichnet worden sind. Zu denselben kommt nun noch eine dritte Gruppe von Kräften hinzu, welche von vornherein nicht an dem Gelenksystem vorhanden sind, sondern ihre Entstehung erst der Bewegung desselben verdanken; es sind dies die in entgegengesetzter Richtung zu nehmenden relativen Effektivkräfte der Hauptpunkte der verschiedenen am $j$ten Gliede hängenden Teilsysteme, welche ebenfalls in den Mittelpunkten der die Teilsysteme mit dem $j$ten Gliede verbindenden Gelenke angreifend zu denken sind. Unter der Einwirkung dieser drei Gruppen von Kräften bewegt sich nun das $j$te reduzierte System genau so wie ein einziger starrer Körper. Sein Schwerpunkt, d. h. also der Hauptpunkt des $j$ten Gliedes, führt dieselbe Bewegung im Raume aus, als wenn in ihm die ganze Masse m_0 des Gelenksystems konzentriert wäre und an ihm die sämtlichen Kräfte der angeführten drei Gruppen direkt angriffen. Außerdem

dreht sich das $j$te reduzierte System genau so um seinen Schwerpunkt, wie es ein starrer Körper von gleicher Beschaffenheit unter der Einwirkung der drei Gruppen von Kräften tun würde. Dies ist auch für das komplizierteste räumliche Gelenksystem die Bedeutung der Bewegungsgleichungen, sowohl unter der Voraussetzung vollkommen freier Beweglichkeit im Raume, als auch in dem Falle, daß die Bewegung des Gelenksystems an irgend welche Bedingungen geknüpft ist, welche sich durch bestimmte Kräfte realisieren lassen.

Der Vorteil, welcher hierdurch für die Ableitung der Bewegungsgleichungen der räumlichen Gelenksysteme gewonnen ist, liegt auf der Hand. Man braucht im gegebenen Falle gar nicht mehr auf die allgemeinen Lagrangeschen Diffentialgleichungen der Bewegung zurückzugreifen, man ist vollkommen der Mühe enthoben, den in der Regel sehr komplizierten und umfangreichen Ausdruck für die lebendige Kraft des ganzen Systems aufzustellen, und kann die Gleichungen unter Verwendung der bekannten Bewegungsgleichungen für einen einzigen starren Körper sofort anschreiben, nachdem man die aus dem Aufbau des Gelenksystems resultierende Massenverteilung in den reduzierten Systemen durch Bestimmung der Lage der Hauptpunkte und der Größe der Trägheitsmomente festgestellt hat. Man ist dabei auch gar nicht an eine bestimmte Form der Bewegungsgleichungen gebunden, sondern kann alle Gleichungsformen, welche für die Untersuchung der Bewegung eines starren Körpers aufgestellt worden sind, auch für das Gelenksystem verwenden. Insbesondere ist es hier durchaus möglich, die Drehungen der reduzierten Systeme um ihren Schwerpunkt in den sogenannten Eulerschen Gleichungen auszudrücken.

Der einzige Unterschied zwischen den Bewegungsgleichungen eines starren Körpers und eines reduzierten Systems besteht nur darin, daß bei letzterem zu den an ihm angreifenden Kräften noch die in entgegengesetzter Richtung zu nehmenden relativen Effektivkräfte hinzutreten, welche erst aus der Bewegung des Gelenksystems abzuleiten sind. Diese Ableitung unterliegt aber nach den ausführlichen Auseinandersetzungen im 9. Abschnitt durchaus keinen Schwierigkeiten. Da man zu dem Hauptpunkte eines Teilsystems des $j$ten Gliedes von dem Mittelpunkte des Verbindungsgelenks aus einfach dadurch gelangt (vgl. hierzu den Satz auf Seite 117), daß man die Vektorsumme der zu den Gliedern des Teilsystems gehörenden Hauptstrecken bildet, welche innerhalb des Gelenksystems dem $j$ten Gliede am nächsten liegen, so kann man auch leicht die zu dem betreffenden Gelenkmittelpunkte gehörende Beschleunigung des Hauptpunktes des Teilsystems gewinnen. Dieselbe wird sich aus so viel Komponenten zusammensetzen, als das Teilsystem Glieder besitzt, wobei jede von einem bestimmten Gliede herrührende Beschleunigungskomponente selbst wieder in eine Reihe von Komponenten zerfällt, welche von

den Richtungskoordinaten, den Winkelgeschwindigkeiten und Winkelbeschleunigungen des betreffenden Gliedes abhängen, wie es sich schon bei den einfachen Verhältnissen des zweigliedrigen räumlichen Gelenksystems gezeigt hatte.

Damit ist aber der Weg klar vorgezeichnet, auf dem man auch für alle noch so komplizierten Gelenksysteme, wie sie im menschlichen und tierischen Körper oder bei manchen Maschinen vorkommen, ohne Mühe die Bewegungsgleichungen in der einfachsten Form aufstellen kann. Denn die besonderen Fälle, in denen einige der Gelenke zwischen den Gliedern des Systems nur ein oder zwei Freiheitsgrade besitzen, sind, wie schon früher hervorgehoben wurde, in dem angenommenen allgemeinen Fall von lauter Gelenken mit drei Freiheitsgraden mit enthalten. Sie erfordern daher keine prinzipiell neue Untersuchuug und lassen sich am besten nicht allgemein, sondern am bestimmten Beispiel erledigen. Gelenke von mehr als drei Graden von Bewegungsfreiheit kommen aber nur ganz ausnahmsweise vor und lassen sich dann in der Regel als Kombination von Gelenken mit drei und weniger Freiheitsgraden auffassen.

Wenn aber für ein Gelenksystem die Bewegungsgleichungen aufgestellt sind, so ist damit das Fundament gewonnen, auf welchem man die kinetische Untersuchung der Bewegungsvorgänge an demselben aufbauen kann.

II. Spezieller Teil.

A. Anwendungen auf die Mechanik des menschlichen Körpers.

Für eine exakte Untersuchung der Bewegungen und der Gleichgewichtszustände des menschlichen oder allgemein tierischen Körpers hat man sich zunächst eine genaue Kenntnis der mechanischen Eigenschaften desselben und seiner Teile zu verschaffen. Man hat nicht nur die Massen der einzelnen Körperabschnitte zu bestimmen, sondern auch die Massenverteilung innerhalb derselben, soweit dieselbe durch die Lage des Schwerpunktes und die Größe der Trägheitsmomente für alle Schwerpunktsachsen charakterisiert wird. Erst nachdem diese Daten gewonnen sind und man sich auch über die Art der Gelenkverbindungen zwischen den Körperteilen orientiert hat, kann man die sich darbietenden kinetischen Probleme der physiologischen Mechanik in Angriff nehmen. Da bis jetzt nur der menschliche Körper auf seine mechanischen Eigenschaften genauer untersucht worden ist, so mußten sich die Anwendungen der im I. Teil dieses Buches dargestellten Kinetik der Gelenksysteme im Großen und Ganzen zunächst auf den menschlichen Körper beschränken; dieselben beziehen sich in letzter Linie auf die Tätigkeit der Muskeln und behandeln teils Fragen der Muskelstatik, teils solche der Muskeldynamik.

13. Massen- und Schwerpunktsbestimmungen am menschlichen Körper.

Wie schon in der Einleitung hervorgehoben wurde, läßt sich der lebende Körper nur dadurch einer mathematischen Behandlung seiner Bewegungs- und Gleichgewichtszustände zugänglich machen, daß man bestimmte Abschnitte desselben als starr im Sinne der theoretischen Mechanik auffaßt. Wie groß die Anzahl der starren, durch Gelenke miteinander verbundenen Abschnitte des menschlichen Körpers zu sein hat, das richtet sich in jedem Falle nach dem Zweck der Untersuchung. Für die spezielle Betrachtung der Lokomotionsbewegungen hat sich herausgestellt, daß es ausreicht, den menschlichen Körper als ein zwölfgliedriges Gelenksystem aufzufassen, indem man sowohl den Rumpf als auch den Kopf für sich als starr annimmt und außerdem jede untere Extremität in drei durch das Kniegelenk und das obere Sprunggelenk, jede obere Extremität dagegen nur in zwei durch das Ellbogengelenk verbundene starre Abschnitte zerlegt denkt. Bei dieser Art der Zergliederung des menschlichen Körpers bleibt also die für die Lokomotion unwesentliche Wirkung der Unterarm-

muskeln auf das Handgelenk ganz außer Betracht, da jeder Unterarm mit der Hand zusammen als ein starres System aufgefaßt wird. Für die Untersuchungen anderer Arbeitsleistungen des menschlichen Körpers mußte dagegen auch wenigstens noch dem Handgelenk seine Beweglichkeit gelassen werden. Dies bedingt dann eine Zerlegung des ganzen Körpers in 14 starre Abschnitte.

Entsprechend der supponierten Gliederung des menschlichen Körpers in einzelne starre Abschnitte waren nun die Massen und Einzelschwerpunkte der letzteren zu bestimmen.

Eine solche Bestimmung kann natürlich nur an der Leiche ausgeführt werden. Dabei bereitet jedoch die richtige Zertrennung des Körpers eine gewisse Schwierigkeit; denn die um ein Gelenk angeordneten Weichteile können zum Teil mit gleichem Rechte dem einen wie dem anderen Körperabschnitt zugeschrieben werden. Man muß sich daher damit begnügen, etwa in der äußersten Streckstellung des Gelenks die Körperteile durch einen Schnitt voneinander zu trennen, welcher möglichst genau durch die Mitte des Gelenks, und dabei senkrecht zu der Längsachse des abzutrennenden Körperteils geführt wird. Für die Bestimmung der Einzelschwerpunkte ergibt sich eine weitere Schwierigkeit aus dem Umstande, daß nach der Zerteilung des ganzen Körpers die einzelnen Abschnitte sich sofort abnorm deformieren. Dieser Schwierigkeit begegnet man dadurch, daß man vor dem Zerschneiden den ganzen Körper längere Zeit in einer Kältemischung liegen läßt und ihn auf diese Weise in eine äußerst starre Masse verwandelt. Durch mehrfache Aufhängung der Körperteile und Bestimmung des Verlaufs der durch den Aufhängungspunkt gehenden Vertikalen, bzw. der durch die Aufhängungsachse gehenden Vertikalebene im Innern der Körperteile gewinnt man dann leicht die Lage der Einzelschwerpunkte.

a) *Bestimmung der Massen der einzelnen Körperteile. Festsetzung des anzuwendenden Maßsystems.*

Was zunächst die Bestimmung der Massen anlangt, so lassen sich natürlich die an der Leiche gefundenen Werte nicht ohne weiteres auf einen beliebigen lebenden Menschen übertragen. Da aber wiederholte Messungsreihen das Resultat ergeben haben, daß bei verschiedenen normal gebauten Individuen mit genügender Annäherung die Verhältnisse der Massen der einzelnen Körperteile übereinstimmen, so kann man dieselben doch dazu verwenden, die Massen der einzelnen Glieder eines nicht gerade abnorm gebauten Menschen auf dem Wege der Rechnung annähernd richtig zu bestimmen. Man braucht zu diesem Zwecke nur mit Hilfe der Wage die Gesamtmasse dieses Menschen zu messen und dann dieselbe nach Maßgabe der gefundenen Massenverhältnisse auf die einzelnen Glieder zu verteilen. Es ist daher vor allen Dingen nötig, von den Resultaten der Massenbestimmung

an der Leiche die Verhältnisse der Massen der einzelnen Abschnitte zu der Gesamtmasse des menschlichen Körpers hier mitzuteilen. Dabei sind auch die Verhältniszahlen für einige zusammengesetztere Massensysteme mit angegeben, welche, wie das System Rumpf + Kopf oder das System Unterarm + Hand, der ganze Arm usw., in manchen Fällen mit genügender Annäherung als starr aufgefaßt werden können.

Werte der Verhältnisse μ der Massen einzelner Abschnitte des menschlichen Körpers zu der Gesamtmasse desselben für:

Kopf	0,0706	Rumpf + Kopf	0,4976
Rumpf	0,4270	Unterschenkel + Fuß	0,0706
Oberschenkel	0,1158	Ganzes Bein	0,1864
Unterschenkel	0,0527	Unterarm + Hand	0,0312
Fuß	0,0179	Ganzer Arm	0,0648
Oberarm	0,0336	Beide Beine	0,3728
Unterarm	0,0228	Beide Arme	0,1296
Hand	0,0084	Rumpf + Kopf + beide Arme	0,6272

Aus diesen Angaben geht unter anderem hervor, daß das aus Rumpf und Kopf zusammengesetzte Massensystem nahezu die halbe Masse des Körpers besitzt, ferner daß die Masse des Kopfes gleich der Masse des aus Unterschenkel und Fuß zusammengesetzten Systems ist, daß die Masse des Oberarms sich nur um wenig von der Masse des aus Unterarm und Hand bestehenden Systems unterscheidet, u. a. m.

Um für spätere Anwendungen, in denen es sich um Bewegungen des ganzen Körpers handelt, bestimmte Werte der Gewichte und Massen der einzelnen Körperteile zu haben, sollen aus den Verhältniszahlen der obigen Tabelle noch diese Größen für einen lebenden, normal gebauten Menschen berechnet werden, welcher wiederholt zu Versuchen über die Lage des Schwerpunktes bei verschiedenen Stellungen, über die Bewegungen des menschlichen Ganges und die dabei stattfindenden Muskelaktionen usw. verwendet worden ist. Das Gewicht desselben betrug in der Zeit der erwähnten Gehversuche 58,7 kg.

Es ist in der Anatomie und Physiologie und wohl auch heute noch in den meisten Gebieten der Technik üblich, Kräfte durch Gewichte zu messen und dieselben in Kilogramm auszudrücken. Lediglich aus diesem Grunde sollen bei den zu erwähnenden Anwendungen auf die Mechanik des menschlichen Körpers die Kräfte und Massen nicht im absoluten Maßsystem ausgedrückt werden, bei welchem bekanntlich das Gramm die Einheit der Masse, dagegen das *Dyn* die Einheit der Kraft darstellt, sofern man als Längeneinheit das Zentimeter nimmt. Vielmehr soll als Einheit der Kraft das Kilogramm gewählt werden. Behält man dann, wie es für die späteren Anwendungen zweckmäßig ist, als Längeneinheit das Zentimeter bei, und beachtet, daß die Beschleunigung der Schwere in Leipzig

981,11 cm sec $^{-2}$ beträgt, so muß man als Masseneinheit die Masse eines Gewichtsstücks von 981,11 kg nehmen; denn dieser Masse würde durch die Kraft von 1 kg gerade die Beschleunigung von 1 cm sec $^{-2}$ erteilt werden. Diese etwas große Masseneinheit mag vielleicht im ersten Moment insofern etwas unbequem erscheinen, als sie es mit sich bringt, daß die Massenzahlen für die einzelnen Teile des menschlischen Körpers sehr klein werden. Die Wahl dieser Masseneinheit zieht aber den Vorteil nach sich, daß die Kräfte, auf deren Bestimmung es bei den Anwendungen in der Regel ankommt, stets in Kilogramm, d. h. also in der üblichen Krafteinheit, ausgedrückt erscheinen.

Um die Massenzahl m für einen Körper in diesem ein für alle mal festgesetzten Maßsystem zu erhalten, braucht man nur die Anzahl der Kilogramm seines Gewichtes durch 981,11 zu dividieren. Demnach besaß das oben erwähnte Versuchsindividuum als Zahl für die Gesamtmasse 0,05983.

In der folgenden Tabelle befinden sich nun die in Zukunft allgemein mit dem Buchstaben G zu bezeichneten Gewichtszahlen und die zugehörigen Massenzahlen aufgezeichnet, wie sie sich für den betreffenden lebenden Menschen unter Verwendung der Verhältniszahlen der Tabelle auf Seite 179 berechnen.

Gewichtszahlen G und Massenzahlen m für die einzelnen Abschnitte eines bestimmten lebenden Menschen unter der Voraussetzung, daß als Einheit des Gewichts das Kilogramm und als Einheit der Masse die Masse eines Gewichtstückes von 981,11 kg angesehen wird:

Körperteile	Gewichtszahlen G	Massenzahlen m
Kopf	4,14	0,00422
Rumpf	25,06	0,02554
Oberschenkel	6,80	0,00693
Unterschenkel	3,09	0,00315
Fuß	1,05	0,00107
Oberarm	1,98	0,00202
Unterarm	1,34	$0,00136_5$
Hand	0,49	0,00050
Rumpf + Kopf	29,20	0,02976
Unterschenkel + Fuß	4,14	0,00422
Ganzes Bein	10,94	0,01115
Unterarm + Hand	1,83	$0,00186_5$
Ganzer Arm	3,81	$0,00388_5$
Beide Beine	21,88	0,02230
Beide Arme	7,62	0,00777
Rumpf + Kopf + beide Arme	36,82	0,03753
Ganzer Körper	58,70	0,05983

b) *Bestimmung der Schwerpunkte der einzelnen Körperteile.*

Die an verschiedenen Leichen in der oben angeführten Weise vorgenommenen Bestimmungen der Schwerpunktslage innerhalb der einzelnen Körperteile hat zu folgenden Resultaten geführt.

Der Schwerpunkt des Kopfes liegt in der Medianebene 0,7 cm hinter der Lehne des Türkensattels in der Fossa Tarini der Hirnbasis, und zwar in der Ecke, welche der obere Rand der Brücke mit der Lamina perforata posterior bildet. Die beifolgende Figur 24 veranschaulicht die genaue Lage des Kopfschwerpunktes sowohl in einem durch ihn geführten Horizontalschnitt als auch im Medianschnitt des

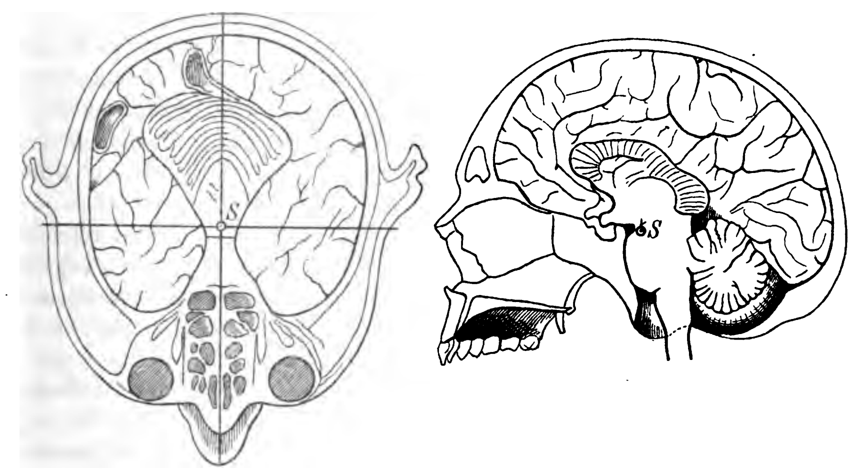


Fig. 24.

Kopfes. Da der Horizontalschnitt die Augen getroffen hat, und zwar in der unteren Halbkugel der Augäpfel, so kann man nach dieser Angabe auch am lebenden Menschen annähernd die Lage des Kopfschwerpunktes feststellen; allerdings wird man dabei der bekanntlich großen individuellen Schwankungen unterworfenen besonderen Form des Kopfes Rechnung zu tragen haben.

Der Schwerpunkt des Rumpfes allein befindet sich bei gerader Haltung desselben an der vorderen Fläche der Wirbelsäule, und zwar am oberen Rande des ersten Lendenwirbels. Dabei liegt er ziemlich genau in der Verbindungslinie des Mittelpunktes des Kopfgelenkes (Atlantooccipitalgelenkes) mit der Mitte der Hüftlinie, wobei unter der Hüftlinie die Verbindungslinie der Mittelpunkte beider Hüftgelenke zu verstehen ist. Die vom Kopfgelenk bis zur Hüftlinie den Rumpf durchziehende Linie, welche man als die Längsachse des Rumpfes bezeichnen kann, geht in der gewöhnlichen Schulterhaltung auch annähernd durch die Mitte der Verbindungslinie beider Schultergelenkmittelpunkte, der sogenannten Schulterlinie, hindurch.

Der Schwerpunkt liegt auf der Längsachse des Rumpfes so, daß er die Strecke zwischen dem Mittelpunkte des Kopfgelenkes und der Mitte der Hüftlinie im Verhältnis 0,61 : 0,39 teilt, wobei die Verhältniszahlen so gewählt sind, daß sie zugleich das Verhältnis der Entfernung des Schwerpunktes von dem einen oder anderen Ende der Längsachse des Rumpfes zu der letzteren selbst angeben. Die Strecke zwischen der Mitte der Schulterlinie und der Mitte der Hüftlinie teilt er im Verhältnis 0,47 : 0,53. Hieraus ist also zu ersehen, daß der Schwerpunkt des Rumpfes der Hüftlinie näher liegt als dem Kopfgelenk, dagegen der Schulterlinie näher als der Hüftlinie.

Durch diese Angaben wird man in den Stand gesetzt, den Schwerpunkt des Rumpfes bei gerader Haltung desselben auch am lebenden Menschen von normalem Körperbau zu bestimmen. Der Mittelpunkt des Atlantooccipitalgelenkes halbiert eine von links nach rechts gehende Linie, welche zwei symmetrisch zur Medianebene gelegene Punkte des Kopfes miteinander verbindet, die sich auf jeder Seite in der Nähe der Mündung des äußeren Gehörganges, etwa am oberen Ansatz der Ohrmuschel befinden. Andererseits durchschneidet die Hüftlinie, wenn man sie auf jeder Seite nach außen verlängert, die Oberfläche des Körpers an Punkten, die sich am lebenden Menschen leicht angeben lassen, da an diesen Stellen sich auf jeder Seite gerade der Trochanter major femoris durchfühlen läßt.

Ebenso mühelos läßt sich am Lebenden die Lage der Schulterlinie bestimmen. Infolgedessen gelingt es leicht, die Entfernung des Kopfgelenkes und der Mitte der Schulterlinie von der Mitte der Hüftlinie mit einer Genauigkeit zu messen, wie sie am Lebenden überhaupt erreichbar ist. Die oben angeführten Verhältniszahlen lassen dann ohne weiteres die Lage des Rumpfschwerpunktes berechnen. Natürlich gilt das auf diese Weise erlangte Resultat nur so lange, als der Rumpf seine gestreckte Haltung beibehält. Bei den vielfachen Krümmungen und Deformationen, welche der Rumpf des lebenden Menschen erfahren kann, ist die Lage des Schwerpunktes im Rumpfe viel größeren Schwankungen unterworfen, als es bei den anderen Körperteilen, mit Ausnahme der Hände, der Fall ist.

Für den Schwerpunkt der beiden größeren Extremitätenabschnitte, also des Oberschenkels, Unterschenkels, Oberarms und Unterarms hat sich übereinstimmend herausgestellt, daß derselbe mit größter Annäherung in die Längsachse des Gliedes fällt, d. h. also in die Verbindungslinie der Mittelpunkte der beiden das Glied begrenzenden Gelenke. Dabei liegt derselbe immer dem proximalen Gelenk näher als dem distalen, wobei man, wie es im anatomischen Sprachgebrauch üblich ist, unter dem proximalen Gelenk dasjenige zu verstehen hat, welches dem Rumpf am nächsten liegt. Bezeichnet man allgemein mit ε_1 bzw. ε_2 das Verhältnis der Entfernungen

des Schwerpunktes vom proximalen bzw. distalen Gelenkmittelpunkte zu der Länge des Gliedes, worunter die Entfernung der beiden Gelenkmittelpunkte voneinander verstanden sein soll, so haben sich für diese beiden Verhältniszahlen im Mittel die folgenden Werte ergeben

Körperteile	ε_1	ε_2
Oberschenkel.	0,44	0,56
Unterschenkel	0,42	0,58
Oberarm. . .	0,47	0,53
Unterarm . .	0,42	0,58

Bezeichnet man als Längsachse des Fußes eine vom hinteren Fersenrand aus nach der Fußspitze ziehende Linie und die Länge dieser Linie als die Länge des Fußes, so liegt der Schwerpunkt des Fußes bei gestreckter Haltung desselben auf seiner Längsachse und teilt seine Länge von hinten nach vorn im Verhältnis 0,43 : 0,57.

Der Schwerpunkt der Hand ist infolge der großen Beweglichkeit der Finger gegen die Mittelhand und der Fingerglieder gegeneinander in seiner Lage natürlich sehr schwankend. Befindet sich die Hand im Ruhezustande, so sind in der Regel die Finger schwach gebeugt. Bei dieser Ruhehaltung liegt dann der Schwerpunkt der Hand zwischen dem Köpfchen des dritten Mittelhandknochens und der Hohlhandfläche, etwa 1 cm von dem ersteren entfernt.

Sieht man von dem Schwerpunkte der Hand ab, so kann man sagen, daß bei allen anderen Extremitätenabschnitten der Schwerpunkt auf der Längsachse liegt und dieselbe in distaler Richtung nahezu übereinstimmend im Verhältnis 4 : 5 teilt; denn diesem Teilungsverhältnis würden für ε_1 und ε_2 die Werte 0,44 und 0,56 entsprechen, die, wie man sieht, nur wenig von den oben angegebenen genaueren Werten abweichen. Auch beim Rumpf ist dieses Teilungsverhältnis zu konstatieren, wenn man auf die Teilung des zwischen den Mitten der Schulter- und Hüftlinie sich erstreckenden Stückes der Längsachse des Rumpfes achtet. Bezeichnet man bei den genannten Extremitätenabschnitten die Entfernung der beiden Gelenkmittelpunkte mit l, so hat man demnach mit genügender Annäherung für die Entfernungen des Schwerpunktes vom proximalen und distalen Gelenkmittelpunkte bezüglich die Werte $^4/_9\, l$ und $^5/_9\, l$. Dies gilt auch für den Abstand des Rumpfschwerpunktes von den Mitten der Schulter- und Hüftlinie, falls man hier unter l die Entfernung dieser beiden Linien voneinander versteht. Da man am Lebenden die Größen l auch für die Extremitätenabschnitte leicht direkt messen kann, so ist man also imstande, auch für diese die Lage des Schwerpunktes bei einem normal gebauten Menschen mit genügender Annäherung zu berechnen. Ob man dabei die abgerundeten Verhältniszahlen $^4/_9$ und $^5/_9$ verwenden

kann, oder auf die in der Tabelle auf Seite 183 angegebenen genaueren Werte derselben zurückzugreifen hat, das kommt ganz auf den Grad der Genauigkeit an, welchen man bei der Messung der Größen l erreicht hat, und auf den Grad der Sicherheit, mit dem man das zu untersuchende Individuum als ein normal gebautes ansehen kann. Absolute Genauigkeit wird sich bei derartigen Messungen und daran anschließenden Berechnungen natürlich überhaupt nicht erreichen lassen.

Bei manchen Bewegungen des menschlichen Körpers kann man den Fuß zum Unterschenkel, bei anderen die Hand zum Unterarm festgestellt annehmen. Es ist daher von Vorteil, wenn man für diese Fälle von vornherein über die Lage des gemeinsamen Schwerpunktes dieser beiden Glieder orientiert ist.

Der Schwerpunkt des Systems Unterschenkel + Fuß liegt zwar nicht mehr genau in der Längsachse des Unterschenkels, da der Schwerpunkt des Fußes bei einer mittleren Haltung desselben etwas vor die Verlängerung dieser Längsachse fällt. Immerhin ist die hierdurch bedingte Abweichung von der Längsachse des Unterschenkels nicht groß genug, als daß man in Anbetracht der unvermeidlichen Fehler bei der Bestimmung der Längsachse diesem Umstande Rechnung tragen könnte. Nimmt man aber den Schwerpunkt des Systems Unterschenkel + Fuß direkt auf der Längsachse des Unterschenkels an, so zeigt sich, daß er die Länge derselben, d. h. also die Strecke vom Mittelpunkte der Knieachse bis zum Mittelpunkte der Achse des oberen Sprunggelenks, im Verhältnis 0,61 : 0,39 oder abgerundet 3 : 2 teilt. Während der Schwerpunkt des Unterschenkels der Knieachse näher liegt als der Achse des Fußgelenks, ist der Schwerpunkt des Systems Unterschenkel + Fuß der Achse des letzteren Gelenks näher gerückt, wie es in Anbetracht der verhältnismäßig großen Masse des Fußes auch nicht anders zu erwarten stand.

Der Schwerpunkt des Systems Unterarm + Hand liegt bei einer mittleren Pronationsstellung der Hand und schwach gebeugten Fingern ziemlich genau noch in der Längsachse des Unterarmes. Er teilt die Länge des letzteren, d. h. also die Strecke zwischen dem Mittelpunkte des Ellbogengelenkes und der Mitte des Handgelenkes, im Verhältnis 0,66 : 0,34, oder abgerundet im Verhältnis 2 : 1; er ist also von der Achse des Ellbogengelenkes gerade doppelt so weit entfernt als vom Mittelpunkte des Handgelenkes, welcher mit dem Mittelpunkte des Köpfchens vom Os capitatum zusammenfällt.

c) *Ableitung der Schwerpunkte verschiedener aus mehreren Gliedern zusammengesetzten Teilsysteme und des Gesamtschwerpunktes des lebenden Menschen.*

Nachdem in der angegebenen Weise die Schwerpunkte der einzelnen Körperteile bestimmt worden sind, kann man dazu übergehen, den in

seiner Lage veränderlichen gemeinsamen Schwerpunkt für zwei oder mehrere derselben und schließlich den Gesamtschwerpunkt des Körpers abzuleiten.

Der gemeinsame Schwerpunkt zweier Massen liegt bekanntlich auf der Verbindungslinie der Einzelschwerpunkte und teilt dieselbe im umgekehrten Verhältnis dieser Massen. Man findet demnach den Schwerpunkt eines Armes, indem man nach der Tabelle auf Seite 179 die Verbindungslinie der Schwerpunkte des Oberarms und des Systems Unterarm + Hand im Verhältnis 0,0312 : 0,0336 oder, was für die Konstruktion zweckmäßiger ist, im Verhältnis 0,481 : 0,519 teilt. Der Schwerpunkt des Systems Rumpf + Kopf teilt, wie man leicht aus der Tabelle auf Seite 179 ableitet, die Verbindungslinie der Schwerpunkte des Rumpfes und Kopfes im Verhältnis 0,142 : 0,858, der Schwerpunkt des Systems Unterschenkel + Fuß die Verbindungslinie der Schwerpunkte des Unterschenkels und des Fußes im Verhältnis 0,253 : 0,747, und der Schwerpunkt eines Beins die Verbindungslinie der Schwerpunkte des Oberschenkels und des Systems Unterschenkel + Fuß im Verhältnis 0,379 : 0,621. Der Gesamtschwerpunkt beider Arme liegt natürlich stets in der Mitte der Verbindungslinie der Schwerpunkte der beiden Arme, und der Gesamtschwerpunkt für beide Beine halbiert die Verbindungsstrecke der Schwerpunkte der beiden Beine. Um nun weiterhin den Schwerpunkt des Systems Rumpf + Kopf + beide Arme zu finden, hat man die Verbindungslinie des Schwerpunktes des Systems Rumpf + Kopf und des Gesamtschwerpunktes beider Arme im Verhältnis 0,207 : 0,793 zu teilen. Der Gesamtschwerpunkt des ganzen Körpers liegt endlich auf der Verbindungslinie des Schwerpunktes des Systems Rumpf + Kopf + beide Arme und des Gesamtschwerpunktes für beide Beine und teilt dieselbe im Verhältnis 0,373 : 0,627.

Für die praktische Durchführung dieser Zusammensetzung der Einzelschwerpunkte zu den Schwerpunkten der Teilsysteme oder dem Gesamtschwerpunkte empfiehlt es sich, den lebenden Körper mit den Schwerpunkten seiner Glieder in der zu untersuchenden Ruhestellung oder Bewegungsphase auf ein rechtwinkliges räumliches Koordinatensystem zu beziehen. Dies läßt sich am einfachsten auf photographischem Wege erreichen, indem man den Körper mindestens in zwei zueinander rechtwinkligen Richtungen, besser aber in noch mehr verschiedenen Richtungen photographiert. Auf Grund der so erlangten Zentralprojektionen kann man dann mit Hilfe geeigneter Formeln[1])

---

1) Vgl. hierzu W. Braune und O. Fischer, Die Bewegungen des Kniegelenks nach einer neuen Methode am lebenden Menschen gemessen. Abhandl. der math. phys. Klasse der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, Band XVII, Nr. II, Seite 98 und ferner: Der Gang des Menschen I. Teil. Abhandl. der math. phys. Klasse der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, Band XXI, Nr. IV, Seite 199.

die rechtwinkligen räumlichen Koordinaten der verschiedenen Gelenkmittelpunkte, und aus diesen wieder die Koordinaten der Einzelschwerpunkte ableiten.

Für die weitere Zusammensetzung der Schwerpunkte lassen sich dreierlei verschiedene Wege einschlagen. Man kann die Schwerpunkte der Teilsysteme und den Gesamtschwerpunkt entweder auf rein geometrischem Wege, durch Konstruktion, darstellen, indem man die Koordinaten dazu verwendet, Orthogonalprojektionen des Körpers auf zwei zueinander senkrechte Ebenen, am einfachsten auf zwei Koordinatenebenen des rechtwinkligen Systems, herzustellen, und dann an diesen Projektionen nach den Methoden der darstellenden Geometrie die Konstruktion der Schwerpunkte vornimmt. Oder man kann aus den Koordinaten der Einzelschwerpunkte direkt auf dem Wege der Rechnung zu den Koordinaten der Systemschwerpunkte und des Gesamtschwerpunktes gelangen. Endlich kann man auch einen Mechanismus zusammensetzen, welcher die Lage dieser Schwerpunkte für jede Stellung des menschlichen Körpers selbsttätig angibt.

Was zunächst die Konstruktion anlangt, so ist dabei zu beachten, daß die oben angegebenen Verhältniszahlen natürlich auch für die Projektionen der Verbindungsstrecken der einzelnen Schwerpunkte gelten. Hat man an den Projektionen auf zwei verschiedene Koordinatenebenen die Lage der Schwerpunkte bestimmt, so kann man dann rückwärts die drei rechtwinkligen Koordinaten derselben mit dem Maßstab abmessen oder, falls die Projektionen etwa auf Millimeterpapier aufgezeichnet sind, direkt ablesen. Die dabei erzielte Genauigkeit ist um so größer, je größer der Maßstab der Projektionen ist. Es empfiehlt sich daher, dieselben zum Zwecke der Konstruktion entweder in ganzer oder doch wenigstens in halber Lebensgröße aufzuzeichnen.

Für die Berechnung der Koordinaten der Schwerpunkte der Teilsysteme und des Gesamtschwerpunktes aus den Koordinaten der Einzelschwerpunkte geht man zweckmäßigerweise von dem Satz (126) des I. Teils auf Seite 103 aus, nach welchem der von einem beliebigen Punkte, hier etwa dem Koordinatenanfangspunkte, aus nach dem Schwerpunkte eines Systems gezogene Vektor gleich der geometrischen Summe der von demselben Punkte nach den Einzelschwerpunkten gezogenen Vektoren ist, nachdem jeder dieser letzteren Vektoren im Verhältnis μ der zu seinem Einzelschwerpunkte gehörenden Masse zu der Gesamtmasse des ganzen Systems verkleinert worden ist. Denkt man diesen Vektorzug nacheinander auf jede der drei Achsen des rechtwinkligen räumlichen Koordinatensystems projiziert und beachtet, daß die Projektionen des vom Koordinatenanfangspunkte nach irgend einem Punkte P gehenden Vektors auf die drei Koordinatenachsen nichts anderes als die drei rechtwinkligen Koordinaten dieses Punktes P sind, so erhält man den

Satz: Jede der drei Koordinaten des Schwerpunktes eines zusammengesetzten Systems ist gleich der algebraischen Summe der im Verhältnis μ verkleinerten gleichnamigen Koordinaten der Einzelschwerpunkte, unter μ das Verhältnis der Masse des Gliedes, dem der Einzelschwerpunkt angehört, zu der Gesamtmasse verstanden.

Denkt man den menschlichen Körper aus n starren Abschnitten zusammengesetzt, welche der Reihe nach von 1 bis n numeriert sind, und bezeichnet mit x_h, y_h, z_h die Koordinaten des Schwerpunktes vom $h$ten Gliede, für welches das Verhältnis seiner Masse zu der Gesamtmasse den Wert μ_h besitzt, so erhält man also zur Berechnung der Koordinaten x_0, y_0, z_0 des Gesamtschwerpunktes die Formeln

$$(220)\quad \begin{aligned} x_0 &= \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 + \cdots \mu_n x_n = \sum_1^n{}^h \mu_h x_h \\ y_0 &= \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \mu_3 y_3 + \cdots \mu_n y_n = \sum_1^n{}^h \mu_h y_h \\ z_0 &= \mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 + \mu_3 z_3 + \cdots \mu_n z_n = \sum_1^n{}^h \mu_h z_h . \end{aligned}$$

Für die numerische Berechnung sind die Werte der Verhältniszahlen μ aus der Tabelle auf Seite 179 zu entnehmen.

Die Formeln (220) können nun ohne weiteres auch dazu dienen, die Koordinaten des Schwerpunktes eines Teilsystems, etwa des ganzen Beins, des Systems Rumpf + Kopf + beide Arme usw. zu berechnen. Es bedeuten dann aber die Größen μ nicht mehr die Verhältnisse der Einzelmassen zu der Gesamtmasse des ganzen menschlichen Körpers, sondern nur die Verhältnisse der Einzelmassen zu der Masse des Teilsystems, und n gibt jetzt auch nur die Anzahl der Glieder des Teilsystems an.

Endlich kann man einen Gelenkmechanismus konstruieren, welcher automatisch für jede Stellung des menschlichen Körpers den Ort des Gesamtschwerpunktes angibt. Ein solcher Mechanismus schließt sich eng an die Konstruktion des Gesamtschwerpunktes aus den Einzelschwerpunkten an; er führt dieselbe mechanisch aus. Da es bei dieser Konstruktion nur auf Teilung variabler Strecken in bestimmten Verhältnissen ankommt, so wird der Gesamtmechanismus sich aus lauter einzelnen Mechanismen zusammensetzen, von denen jeder die Teilung einer innerhalb bestimmter Grenzen variablen Strecke nach gegebenem Verhältnis für jede Länge derselben ausführt. Einen derartigen Gelenkmechanismus veranschaulicht die umstehende Figur 25. Die vier Stäbe, Metallstreifen oder auch Kartonstreifen, AD, DB, EC und FC sind an den Stellen D, E, F und C durch Scharniergelenke

mit parallelen Achsen verbunden. Die Lage der Gelenkachsen und die Dimensionen der einzelnen Stäbe sind so bemessen, daß

$$AE : ED = DF : FB,$$

ferner

$$EC = DF$$

und

$$FC = DE$$

ist, so daß das Viereck $ECFD$ ein Parallelogramm darstellt.

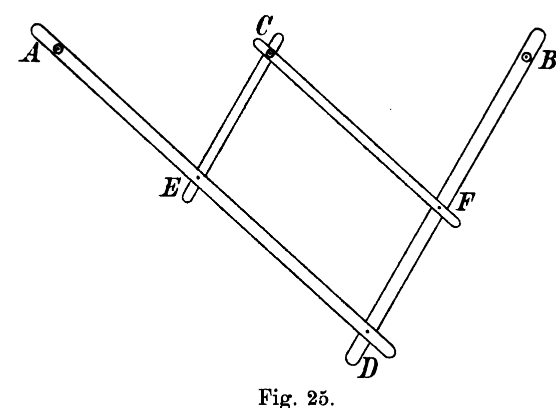


Fig. 25.

Dann läßt sich leicht einsehen, daß die drei Punkte A, C und B stets in gerader Linie liegen, und daß für jede Gelenkstellung stattfindet

$$AC : CB = AE : ED = DF : FB.$$

Die Längen der beiden Stäbe AD und DB können bis zu gewissem Grade ganz willkürlich gewählt werden; sie müssen nur den Bedingungen genügen, daß ihre Summe mindestens gleich der größten und ihre Differenz höchstens gleich der kleinsten Entfernung ist, welche die beiden Punkte A und B annehmen können. In dem besonderen Falle, daß diese Punkte sich bis zum Zusammenfallen einander nähern können, müssen daher AD und DB gleich lang genommen werden; in allen anderen Fällen ist aber Gleichheit dieser beiden Strecken durchaus nicht erforderlich. Verbindet man den Mechanismus im Punkte A durch eine zu den vier Scharnierachsen parallele Achse gelenkig mit einer festen Unterlage, so stellt er den bekannten Storchschnabel dar; bewegt man dabei B auf einer Kurve, so zeichnet C eine hierzu ähnliche, im Verhältnis $AC : AB$ verkleinerte Kurve auf. Verbindet man dagegen den Mechanismus in den Punkten A und B gelenkig mit den Schwerpunkten zweier Körper, so gibt, vorausgesetzt, daß eine solche Verbindung überhaupt möglich ist, der Punkt C für jede Stellung der Körper zueinander den Gesamtschwerpunkt derselben an, falls die Strecken AE und ED, ebenso wie die Strecken DF und FB des Mechanismus, sich umgekehrt wie die Massen der beiden Körper verhalten. Im allgemeinen muß man hierbei den Mechanismus in A und B durch Kugelgelenke mit den Schwerpunkten der beiden Körper verbinden. Nur in dem Falle, daß die Körper selbst durch ein Scharniergelenk miteinander verbunden sind, ᴧnn man diese Verbindungen in A und B durch bloße Scharnierenke bewirken, deren Achsen aber sowohl den vier Scharnierachsen

des Mechanismus, als auch gleichzeitig der Achse des die beiden Körper verbindenden Scharniergelenks parallel sein müssen.

Unter den Gelenken des menschlichen Körpers finden sich nur wenige, welche im streng mechanischen Sinne als Scharniergelenke angesehen werden können. Die meisten besitzen entweder mehrere Grade der Freiheit oder lassen wenigstens innerhalb gewisser Grenzen Schwankungen der Achse zu. Faßt man dagegen die Projektion der Bewegung des menschlichen Körpers auf irgend eine Ebene ins Auge, so kommt von jeder Gelenkbewegung immer nur der Teil zum Vorschein, welcher in einer Drehung der Projektionen der beiden durch das Gelenk verbundenen Körperteile um die zur Projektionsebene senkrechte Gelenkachse besteht. Im allgemeinen werden bei dieser Drehung die Projektionen der Körperteile ihre Dimensionen ändern, und zwar umsomehr, je mehr die tatsächlich stattfindende Gelenkbewegung von einer reinen Drehung um die zur Projektionsebene senkrechte Gelenkachse abweicht. Besitzt dagegen bei einer Bewegung die Achse der wirklichen Gelenkdrehung schon nahezu diese Richtung, so werden auch die Projektionen der Körperteile ihre Größen während der Bewegung nicht wesentlich ändern. Beim Gehen tritt nun z. B. dieser Fall für eine Projektion nahezu ein. Hier finden in allen Gelenken die Drehungen annähernd um Achsen von derselben Richtung statt, nämlich der zur Gangebene senkrechten Richtung; denn die Längsachsen aller Körperteile bleiben bei ihrer Bewegung nahezu der Gangebene parallel. Es erscheinen daher die Längsachsen der Körperteile in der Projektion auf die Gangebene annähernd in ihrer wahren Größe und erleiden nur verhältnismäßig geringe Änderungen ihrer Länge bei der Bewegung.

Verschafft man sich nun ein in den Hauptgelenken bewegliches Modell der Projektion des menschlichen Körpers auf die Medianebene aus Metallblech oder Karton, so kann man durch Veränderung der Gelenkstellungen mit demselben annähernd alle Bewegungsphasen des menschlichen Körpers beim Gehen in ihrer Projektion auf die Gangebene oder bei irgend einer anderen nahezu ebenen Bewegung in der Projektion auf die Bewegungsebene richtig darstellen. Dabei brauchen die 12 Abschnitte, in welche man etwa, wie oben angegeben wurde, den menschlichen Körper zerlegt denkt, nur durch Scharniergelenke mit parallelen, natürlich zur Bewegungsebene senkrechten, Achsen verbunden zu sein. An diesem Modell kann man nun leicht einen Mechanismus anbringen, welcher die Projektion des Gesamtschwerpunktes auf die Bewegungsebene automatisch anzeigt. Die einzelnen Teile desselben brauchen in diesem besonderen Falle nur durch Scharniergelenke untereinander und mit den Projektionen der Einzelschwerpunkte verbunden zu sein, deren Achsen alle den Gelenkachsen des Modells parallel sind. Tafel I veranschaulicht ein solches Modell

der Projektion des menschlichen Körpers mit Schwerpunktsmechanismus. Dasselbe ist seinerzeit von mir aus Karton in halber Lebensgröße ausgeführt worden[1]) und kann in Metall gearbeitet von Herrn Präzisionsmechaniker E. Zimmermann in Leipzig bezogen werden. Wie man leicht erkennt, besteht der Schwerpunktsmechanismus aus lauter Bestandteilen von der durch Figur 25 auf Seite 188 dargestellten Form. Zum Zwecke bequemerer Darstellung sind auf Tafel I die 12 Abschnitte des Körpers numeriert und die Einzelschwerpunkte durch den Buchstaben S mit der Nummer des betreffenden Körperteils als Index bezeichnet worden. Der Rumpf besitzt die Nummer 1, die drei Abschnitte der rechten unteren Extremität tragen in distaler Reihenfolge die Nummern 2, 4 und 6, die der linken unteren Extremität entsprechend die Nummern 3, 5 und 7, ferner die beiden Abschnitte der rechten oberen Extremität die Nummern 8 und 10 und die der linken oberen Extremität die Nummern 9 und 11. Endlich ist der Kopf mit der Nummer 12 versehen. Demnach bedeutet z. B. S_1 den Schwerpunkt des Rumpfes, S_7 den Schwerpunkt des linken Fußes, usw. Die Gelenke zwischen den einzelnen Körperteilen sind mit dem Buchstaben G bezeichnet worden und tragen als Indizes immer die beiden Nummern der durch das Gelenk verbundenen Glieder; so bedeutet z. B. $G_{1,2}$ das rechte Hüftgelenk, $G_{9,11}$ das linke Ellbogengelenk, usw. Endlich sind auch die Gesamtschwerpunkte für mehrere Körperteile mit mehreren Indizes versehen worden, nämlich den Nummern sämtlicher Körperteile, welche zu dem betreffenden Gesamtschwerpunkte gehören; wo es ging, sind diese Indizes in gedrängter Form angegeben worden, wie z. B. in der Form 2 bis 7 für den Gesamtschwerpunkt beider Beine, oder 8 bis 11 für den Gesamtschwerpunkt beider Arme. Demnach bedeutet also z. B. $S_{2,4,6}$ den Schwerpunkt des ganzen rechten Beines, $S_{5,7}$ den Schwerpunkt des Systems linker Unterschenkel + Fuß, $S_{1,12}$ den Schwerpunkt des Systems Rumpf + Kopf, $S_{1,8\text{ bis }12}$ den Schwerpunkt des ganzen auf den beiden Beinen ruhenden Abschnittes des menschlichen Körpers, usw. Der Gesamtschwerpunkt des Körpers ist mit S_0 bezeichnet worden.

Die Figur auf Tafel I zeigt die Stellung des ganzen Mechanismus für eine bestimmte Haltung des Körpers an. Es ist besonders zu beachten, daß mit Ausnahme des Gesamtschwerpunktes S_0 alle mit nur einem Index versehenen Schwerpunkte Einzelschwerpunkte sind und daher am Modell feste Lage innerhalb eines Körperteils besitzen. Dagegen ändern alle mit mehreren Indizes versehenen Schwerpunkte als Systemschwerpunkte, ebenso wie der Gesamtschwerpunkt S_0 beim Übergang aus einer Haltung des Körpers in eine andere im allgemeinen ihre Lage relativ

1) Vgl. Nr. 262 des Hauptkatalogs mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente, herausgegeben von der Deutschen Mathematiker Vereinigung im Jahre 1892.

zu den einzelnen Körperteilen. Die Abmessungen der einzelnen Teilmechanismen richten sich natürlich genau nach den früher angegebenen Verhältniszahlen. So müssen z. B. für den zwischen S_5 und S_7 angebrachten Mechanismus, welcher die Schwerpunkte des linken Unterschenkels und Fußes zu dem Schwerpunkte $S_{5,7}$ des Systems linker Unterschenkel + Fuß zusammensetzt, die einzelnen Kartonstreifen, oder besser Metallstreifen, so gewählt sein, daß

$$S_5 S_{5,7} : S_{5,7} S_7 = 0{,}253 : 0{,}747 \text{ (vgl. Seite 185).}$$

Der Schwerpunkt $S_{5,7}$ wird nun durch den zwischen ihm und dem Schwerpunkte S_3 des linken Oberschenkels eingelenkten Teilmechanismus mit S_3 zu dem Schwerpunkte $S_{3,5,7}$ des ganzen linken Beins zusammengesetzt. Die Längen der hierzu nötigen Streifen müssen so bemessen sein, daß

$$S_3 S_{3,5,7} : S_{3,5,7} S_{5,7} = 0{,}379 : 0{,}621.$$

Der Teilmechanismus, welcher den Schwerpunkt des linken Beines $S_{3,5,7}$ mit dem des rechten Beines $S_{2,4,6}$ zu dem Gesamtschwerpunkte beider Beine $S_{2 \text{ bis } 7}$ zusammengesetzt, muß so konstruiert werden, daß der letztere immer genau in der Mitte zwischen den beiden ersteren liegt. Da die Schwerpunkte beider Beine in der Projektion zur vollständigen Deckung kommen können, so müssen hier sogar die beiden langen Streifen von gleicher Länge sein; die beiden kürzeren Streifen müssen daher beide die halbe Länge eines langen Streifens besitzen. Die Längen der Stäbe des zwischen S_1 und S_{12} angebrachten Teilmechanismus, welcher die Schwerpunkte des Rumpfes und Kopfes zu dem Schwerpunkte des Systems Rumpf + Kopf vereinigt, müssen so gewählt sein, daß immer

$$S_1 S_{1,12} : S_{1,12} S_{12} = 0{,}142 : 0{,}858.$$

Die Teile des im Schwerpunkte $S_{2 \text{ bis } 7}$ für beide Beine einerseits und in dem Schwerpunkte $S_{1,8 \text{ bis } 12}$ des Systems Rumpf + Kopf + beide Arme andererseits eingelenkten Mechanismus, welcher schließlich den Gesamtschwerpunkt S_0 des ganzen Körpers liefert, haben in ihren Dimensionen dem Umstande Rechnung zu tragen, daß für alle Stellungen des menschlichen Körpers die Proportion gelten muß

$$S_{1,8 \text{ bis } 12} S_0 : S_0 S_{2 \text{ bis } 7} = 0{,}373 : 0{,}627 \text{ (vgl. Seite 185).}$$

Es wird nicht nötig sein, weitere Erklärungen hinzuzufügen, da die Figur auf Tafel I sich selbst erklärt. Der Mechanismus führt die Konstruktion des Gesamtschwerpunktes des menschlichen Körpers aus den Einzelschwerpunkten unter genauer Beachtung der oben mitgeteilten Verhältniszahlen für die Projektion auf die Medianebene automatisch aus. Er tut dies mit großer Präzision, wenn er genau konstruiert ist. Die einzige Ungenauigkeit, welche eventuell seinen

Angaben anhaftet, hat darin seinen Grund, daß die Projektionen der Längsachsen der Glieder bei einer nicht vollkommen ebenen Bewegung, also z. B. die Projektionen auf die Gangebene im Verlauf eines Schrittes doch etwas ihre Länge ändern. Diese Fehlerquelle ließe sich noch vollkommen beseitigen, wenn man an den einzelnen Körperteilen die Gelenke innerhalb gewisser Grenzen in ihrer Lage veränderlich machte und nun durch einen Mechanismus von der Art der einzelnen Teilmechanismen dafür sorgte, daß der Einzelschwerpunkt des Körperteils in jedem Falle die Längsachse desselben in dem oben angegebenen (Seite 183) bestimmten Verhältnis teilt.

Hat man sich die Projektion eines ebenen Bewegungsvorganges auf die Bewegungsebene verschafft, so kann man dann mit Hilfe des beschriebenen Schwerpunktsmechanismus durch Auflegen desselben auf die einzelnen Bewegungsphasen die Bahn des Gesamtschwerpunktes des Körpers, sowie der einzelnen Systemschwerpunkte direkt in die Projektion eintragen, oder durch kleine Bleistiftchen, welche an den betreffenden Gelenken des Mechanismus in der Richtung der Achse angebracht sind, selbsttätig eintragen lassen. Ist die Projektion auf Millimeterpapier aufgezeichnet, so lassen sich ferner ohne weiteres zwei Koordinaten der Schwerpunkte ablesen, falls die Projektion auf eine Koordinatenebene ausgeführt ist. Zur Gewinnung der dritten, zu dieser Koordinatenebene senkrechten Koordinate reicht natürlich der eine Mechanismus nicht aus, da er sich nur auf eine Projektion bezieht. Man hätte dann noch einen zweiten Mechanismus von derselben Art zu verwenden, welcher der Projektion auf eine zweite Koordinatenebene angepaßt wäre. Da in dieser Projektion aber dann die Längsachsen der Glieder zum Teil sehr stark verkürzt erscheinen und überhaupt sehr beträchtliche Längenänderungen erfahren werden, die man nicht, wie bei der Projektion auf die Bewegungsebene vernachlässigen kann, so würde ein solcher Schwerpunktsmechanismus nach den obigen Auseinandersetzungen sehr kompliziert werden.

Es empfiehlt sich daher, wenn man nicht nur eine Projektion des Schwerpunktes, sondern seine Lage im Raume feststellen will, sich ein räumliches Modell des menschlichen Körpers, etwa ein in den Hauptgelenken bewegliches Skelett, zu verschaffen, und an diesem einen Schwerpunktsmechanismus nach demselben Prinzip anzubringen. Derselbe könnte so zusammengesetzt sein, wie der durch Tafel I veranschaulichte. Es müßten nur die Enden eines jeden Teilmechanismus in den betreffenden Schwerpunkten durch Kugelgelenke mit den Knochen, bezüglich den benachbarten Teilmechanismen, verbunden sein. Zum Teil würde man dabei von den Knochen, z. B. von einigen Rippen oder von der Schädelkapsel etwas wegnehmen müssen, um die einzelnen Stäbe des Mechanismus nicht in ihren Bewegungen zu hindern. Im übrigen setzen sich der Konstruktion eines solchen räum-

lichen Schwerpunktsmechanismus durchaus keine praktischen Schwierigkeiten entgegen. Es haben bisher nur die Mittel gefehlt, denselben ausführen zu lassen. Ein derartiger Mechanismus wird ebenso wie der aus Kartonstreifen tatsächlich ausgeführte sehr leicht spielen. Denn bewegt man z. B. irgend einen Körperteil, etwa das System rechter Unterarm + Hand, so werden nicht alle Systemschwerpunkte ihren Ort ändern, sondern nur $S_{8,10}$, $S_{8 \text{ bis } 11}$, $S_{1,8 \text{ bis } 12}$ und S_0. Dabei sind ferner die Exkursionen dieser vier Schwerpunkte um so kleiner, je größer das zugehörige Massensystem ist. Die kleinste Bewegung wird daher immer der Gesamtschwerpunkt S_0 des ganzen Körpers ausführen. Die Kraft, mit welcher die Bewegung der Schwerpunkte ausgeführt wird, ist nun aber nach dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten um so größer, je kleiner die Verrückung sich darstellt. Es bedarf daher nur einer sehr geringen Anstrengung, um mit der Drehung des Unterarms im Ellbogengelenk den ganzen Mechanismus in Bewegung zu versetzen; der Gesamtschwerpunkt wird immer mit verhältnismäßig großem Zwange diese Drehung ausführen.

14. Die Hauptpunkte des menschlichen Körpers.

Wie im allgemeinen Teil ausführlich nachgewiesen worden ist, spielen in der Mechanik der Gelenksysteme neben den Schwerpunkten noch andere feste Punkte innerhalb der einzelnen Glieder, die ich als die Hauptpunkte der Glieder bezeichne, eine wichtige Rolle. Die Lage eines jeden Einzelschwerpunktes hängt nur von der Verteilung der Masse innerhalb des betreffenden Gliedes ab, steht aber in gar keiner Beziehung zu den Massen der übrigen Glieder. Der Hauptpunkt eines Gliedes richtet sich dagegen in seiner Lage auch nach den Massen der übrigen Glieder, welche mit seinem Gliede zusammenhängen; denn derselbe stellt ja den Schwerpunkt des zu dem betreffenden Gliede gehörenden reduzierten Systems dar, welches man dadurch erhält, daß man in dem Mittelpunkte eines jeden Gelenkes dieses Gliedes die Massen aller der Glieder des Gelenksystems konzentriert denkt, welche durch das Gelenk entweder unmittelbar oder mittelbar mit ihm in Verbindung stehen. Auf den menschlichen Körper angewendet, erhält man also z. B. den Hauptpunkt des rechten Oberarms, indem man im Mittelpunkte des rechten Ellbogengelenks die Massen des rechten Unterarms mit der Hand, und im Mittelpunkte des rechten Schultergelenkes die Massen aller übrigen Körperteile mit Ausnahme des rechten Armes selbst konzentriert und dem rechten Oberarm hinzugefügt denkt. Der Schwerpunkt dieses fingierten Massensystems, des sogenannten „reduzierten rechten Oberarmsystems", stellt den Hauptpunkt des rechten Oberarms dar. In entsprechender Weise ergibt sich der Hauptpunkt des Rumpfes als Schwerpunkt des „reduzierten Rumpf-

systems", d. h. eines Massensystems, welches man dadurch erhält, daß man den Rumpf im Mittelpunkte eines jeden Schultergelenks durch die Masse des anhängenden Armes, im Mittelpunkte eines jeden Hüftgelenks durch die Masse des anhängenden Beines und im Mittelpunkte des Kopfgelenkes durch die Masse des Kopfes beschwert denkt.

Wenn auch im Rumpfe der Hauptpunkt in der Nähe des Schwerpunktes zu suchen sein wird, so sieht man doch leicht ein, daß der Hauptpunkt des Oberarmes verhältnismäßig weit von dem Schwerpunkte desselben entfernt liegen muß; er wird ziemlich nahe am Schultergelenk liegen infolge der großen Massenkonzentration im Mittelpunkte des Schultergelenks. Das Entsprechende wird für alle Extremitätenabschnitte gelten; überall wird der Hauptpunkt näher dem proximalen Gelenk als dem Schwerpunkte des betreffenden Gliedes zu liegen kommen.

In dem Bild des menschlichen Körpers auf Tafel II ist die ungefähre Lage der einzelnen Hauptpunkte angedeutet worden. In Wirklichkeit liegen die Hauptpunkte der Extremitätenabschnitte noch näher an den proximalen Gelenken; sie sind aber im Interesse der Deutlichkeit absichtlich etwas weiter von diesen entfernt gezeichnet worden. Den zwölf Abschnitten, in welche dabei der ganze Körper zerlegt gedacht ist, sind wieder die schon auf Tafel I verwendeten Nummern beigelegt werden.

Die genaue Lage der Hauptpunkte der einzelnen Abschnitte des menschlichen Körpers läßt sich nun leicht auf Grund der im vorigen Abschnitt vorgenommenen Schwerpunktsbestimmung ableiten. Man sieht ohne weiteres ein, daß man dazu gar nicht die Kenntnis der Massen der einzelnen Glieder selbst braucht, sondern daß man mit den in der Tabelle auf Seite 179 niedergelegten Verhältniszahlen μ der Einzelmassen zu der Gesamtmasse des ganzen Körpers ausreicht.

a) *Bestimmung der Hauptpunkte der einzelnen Körperteile.* Der Hauptpunkt eines Oberschenkels stellt sich als der Gesamtschwerpunkt dreier im Hüftgelenkmittelpunkte, Kniegelenkmittelpunkte und Schwerpunkte des Oberschenkels konzentrierter Massen dar, denen bezüglich die Verhältniszahlen 0,8136, 0,0706 und 0,1158 zukommen. Setzt man diese drei Massenpunkte sukzessiv zu dem gemeinsamen Schwerpunkte zusammen, indem man berücksichtigt, daß der Schwerpunkt des Oberschenkels auf der Verbindungsstrecke des Hüftgelenk- und Kniegelenkmittelpunktes liegt und dieselbe im Verhältnis 0,44 : 0,56 teilt, so ergibt sich, daß der ebenfalls auf dieser Verbindungsstrecke liegende Hauptpunkt des Oberschenkels dieselbe im Verhältnis 0,122 : 0,878 teilt. Ist l die Entfernung der Mittelpunkte des Hüft- und Kniegelenks, so hat infolgedessen der Hauptpunkt des Oberschenkels auf der Längsachse desselben vom Hüftgelenkmittelpunkte

den Abstand 0,122 · l und vom Kniegelenkmittelpunkte den Abstand 0,878 · l.

Der Hauptpunkt eines Unterschenkels ist der Gesamtschwerpunkt dreier im Kniegelenkmittelpunkte, Mittelpunkte des oberen Sprunggelenks und Schwerpunkte des Unterschenkels konzentrierter Massen von den Verhältniszahlen 0,9294, 0,0179 und 0,0527. Da der Schwerpunkt des Unterschenkels auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte vom Knie- und Fußgelenk liegt und dieselbe im Verhältnis 0,42 : 0,58 teilt, so befindet sich auch der Hauptpunkt des Unterschenkels auf dieser Linie und teilt sie im Verhältnis 0,040:0,960. Ist l die zwischen den Mittelpunkten der begrenzenden Gelenke gemessene Länge des Unterschenkels, so besitzt der Hauptpunkt des Unterschenkels von den Mittelpunkten des Knie- und Fußgelenks bezüglich die Abstände 0,040 · l und 0,960 · l.

Der Hauptpunkt eines Fußes stellt sich nur als gemeinsamer Schwerpunkt zweier Massenpunkte dar, welche im Fußgelenkmittelpunkte und Schwerpunkte des Fußes konzentriert zu denken sind und bezüglich die Verhältniszahlen 0,9821 und 0,0179 besitzen. Er teilt demnach die Verbindungsstrecke dieser beiden Punkte im Verhältnis 0,018 : 0,982. Bezeichnet r die Entfernung zwischen dem Mittelpunkte des Fußgelenks und dem Schwerpunkte des Fußes, so besitzt der Hauptpunkt des Fußes von diesen beiden Punkten bezüglich die Abstände 0,018 · r und 0,982 · r. Er liegt also sehr nahe am Mittelpunkte des Fußgelenks.

Der Hauptpunkt eines Oberarmes bedeutet den Gesamtschwerpunkt dreier im Mittelpunkte des Schultergelenks, Mittelpunkte des Ellbogengelenks und Schwerpunkte des Oberarms konzentrierter Massen von den Verhältniszahlen 0,9352, 0,0312 und 0,0336. Berücksichtigt man, daß der Schwerpunkt des Oberarmes auf der Verbindungsstrecke der Mittelpunkte des Schultergelenks und Ellbogengelenks liegt und dieselbe im Verhältnis 0,47 : 0,53 teilt, so findet man, daß der Hauptpunkt des Oberarmes sich ebenfalls auf dieser Verbindungsstrecke befindet, und daß er dieselbe im Verhältnis 0,047 : 0,953 teilt. Bei einer Länge l des Oberarmes, gemessen zwischen den beiden Gelenkmittelpunkten, besitzt demnach der Hauptpunkt desselben von den Mittelpunkten des Schulter- und Ellbogengelenks bezüglich die Abstände 0,047 · l und 0,953 · l.

Der Hauptpunkt des Systems Unterarm + Hand jeder Seite ist der gemeinsame Schwerpunkt von nur zwei Massenpunkten, welche im Mittelpunkte des Ellbogengelenks und im Schwerpunkte des Systems Unterarm + Hand konzentriert zu denken sind, behaftet mit den Verhältniszahlen 0,9688 und 0,0312. Da bei mittlerer Pronationsstellung der Hand der Schwerpunkt des Systems Unterarm + Hand auf der Verbindungsstrecke der Mittelpunkte des Ellbogen-

gelenks und Handgelenks liegt und dieselbe im Verhältnis 0,66:0,34 teilt, so wird der Hauptpunkt des Systems Unterarm + Hand ebenfalls auf dieser Verbindungsstrecke zu suchen sein; die Rechnung ergibt, daß er dieselbe im Verhältnis 0,021 : 0,979 teilt. Bezeichnet l die Entfernung zwischen den Mittelpunkten des Ellbogengelenks und Handgelenks, so wird infolgedessen der Hauptpunkt des Systems Unterarm + Hand vom Ellbogengelenkmittelpunkte den Abstand $0{,}021 \cdot l$ und vom Handgelenkmittelpunkte den Abstand $0{,}979 \cdot l$ besitzen, also sehr nahe am ersteren liegen. Einen Hauptpunkt des Unterarmes und einen solchen der Hand allein aufzusuchen, hat für alle Untersuchungen keinen Zweck, bei denen die Hand zum Unterarm festgestellt angenommen werden kann, und also der Unterarm mit der Hand zusammen als ein starrer Körperteil aufzufassen ist. Dies ist z. B. der Fall beim menschlichen Gang. Für die Untersuchung anderer Bewegungsarten des menschlichen Körpers, wie z. B. deren eines Klavierspielers, wird man dagegen nicht nur die Einzelhauptpunkte des Unterarmes und der Mittelhand, sondern sogar die Hauptpunkte der Fingerglieder berücksichtigen müssen.

Der Hauptpunkt des Rumpfes stellt den Gesamtschwerpunkt von nicht weniger als sechs Massenpunkten dar, welche in den Mittelpunkten der beiden Hüftgelenke, der beiden Schultergelenke, des Atlantooccipitalgelenks und im Schwerpunkte des Rumpfes konzentriert zu denken sind. Dabei kommen einer jeden in einem Hüftgelenkmittelpunkte konzentrierten Masse die Verhältniszahl 0,1864, einer jeden in einem Schultergelenkmittelpunkte konzentrierten Masse die Verhältniszahl 0,0648 und den im Kopfgelenkmittelpunkte und im Schwerpunkte des Rumpfes konzentrierten Massen bezüglich die Verhältniszahlen 0,0706 und 0,4270 zu. Zur Vereinfachung der Hauptpunktsbestimmung kann man die beiden in den Hüftgelenkmittelpunkten konzentrierten Massen durch einen im Mittelpunkte der Hüftlinie befindlichen Massenpunkt von der Verhältniszahl 0,3728, und die beiden in den Schultergelenkmittelpunkten konzentrierten Massen durch einen im Mittelpunkte der Schulterlinie angebrachten Massenpunkt von der Verhältniszahl 0,1296 ersetzen. Dann hat man nur noch vier Massenpunkte zum gemeinsamen Schwerpunkte zusammenzusetzen, welche alle auf einer Geraden, nämlich der Rumpflinie, liegen. Auf dieser Linie wird infolgedessen auch der Hauptpunkt des Rumpfes zu finden sein. Da der Abstand des Kopfgelenkmittelpunktes von der Mitte der Hüftlinie sich zu der Entfernung der Hüft- und Schulterlinienmitte wie 1,35 : 1 verhält, und ferner der Schwerpunkt des Rumpfes die Verbindungstrecke der Mittelpunkte der Hüftlinie und Schulterlinie im Verhältnis 0,53 : 0,47 teilt, so ergibt die Rechnung, daß der Hauptpunkt des Rumpfes diese letztere Verbindungsstrecke im Verhältnis 0,451 : 0,549 teilt. Die Verbindungs-

strecke zwischen den Mittelpunkten der Hüftlinie und des Kopfgelenkes wird dagegen durch den Hauptpunkt des Rumpfes im Verhältnis 0,333 : 0,667 geteilt. Ist h die Entfernung zwischen den Mittelpunkten der Hüft- und Schulterlinie, und l die Entfernung zwischen der Hüftlinienmitte und dem Mittelpunkte des Kopfgelenks, so besitzt demnach der Hauptpunkt des Rumpfes vom Mittelpunkte der Hüftlinie den Abstand $0{,}451 \cdot h$ oder $0{,}333 \cdot l$, vom Mittelpunkte der Schulterlinie den Abstand $0{,}549 \cdot h$ und vom Mittelpunkte des Kopfgelenks den Abstand $0{,}667 \cdot l$. Da l 1,35 mal so groß ist als h, so können natürlich die beiden zuerst angegebenen Abstände nur gleich sein, wenn auch 0,451 auch 1,35 mal so groß ist als 0,333. Dies ist aber tatsächlich der Fall. Ist ferner b die halbe Entfernung der beiden Hüftgelenkmittelpunkte voneinander und a der halbe Abstand der beiden Schultergelenkmittelpunkte, so wird bei aufrechter Haltung des Körpers, wo die Hüftlinie und Schulterlinie annähernd senkrecht auf der Rumpflinie stehen, nach dem Pythagoräischen Lehrsatze die Entfernung des Rumpfhauptpunktes von einem jeden Hüftgelenkmittelpunkte $\sqrt{0{,}203 \cdot h^2 + b^2}$ oder $\sqrt{0{,}111 \cdot l^2 + b^2}$, und die Entfernung desselben von einem jedem Schultergelenkmittelpunkte $\sqrt{0{,}301 \cdot h^2 + a^2}$ betragen. Diese Abstände werden natürlich ungenau, sobald sich eine der beiden Linien gegen die Rumpflinie neigt; sie können daher nur als Mittelwerte betrachtet werden.

Die Bewegung des Kopfes gegenüber dem Rumpf läßt sich bei vielen Bewegungen, z. B. beim Gehen, streng genommen nicht als einfache Drehung um ein zum Rumpfe festes Drehzentrum auffassen, da die Halswirbelsäule dabei sich etwas verbiegt. Will man trotzdem die Annahme eines festen Drehzentrums machen, um die ziemlich verwickelten Bewegungen des Kopfes zu den mittleren Partien des Rumpfes doch wenigstens annähernd berücksichtigen zu können, so wird man der wahren Bewegung näher kommen und auch der Verbiegung der Halswirbelsäule bis zu einem gewissen Grade Rechnung tragen, wenn man das Drehzentrum nicht in den Mittelpunkt des Atlantooccipitalgelenks, sondern viel tiefer, etwa in die Gegend des unteres Halswirbelendes, verlegt. So kann man beispielsweise in manchen Fällen die Bewegungen des Kopfes auf den Mittelpunkt der Schulterlinie beziehen und demnach die Drehungen der Verbindungslinie der Schulterlinienmitte mit dem Scheitelpunkte des Kopfes relativ zum Rumpfe untersuchen. Diese Annahme über den Ort des Drehzentrums des Kopfes bedingt nun eine etwas andere Lage des Rumpfhauptpunktes; denn sie ist gleichbedeutend damit, daß der Kopf im Mittelpunkte der Schulterlinie durch ein Gelenk mit dem Rumpfe verbunden ist, im übrigen aber eine starre Masse darstellt. Für die Bestimmung des Hauptpunktes im Rumpfe hat man dann die mit der Verhältniszahl 0,0706 behaftete Masse des Kopfes im Mittelpunkte der

Schulterlinie konzentriert zu denken. Dies bedingt eine Verschiebung des Rumpfhauptpunktes auf der Rumpflinie nach unten, indem derselbe die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte von Hüft- und Schulterlinie im Verhältnis 0,427 : 0,573 teilt. Der Abstand des Hauptpunktes von der Hüftlinienmitte würde demnach nur $0{,}427 \cdot h$, der von der Schulterlinienmitte dagegen $0{,}573 \cdot h$ betragen. Der Unterschied zwischen diesen Angaben und den früheren auf Seite 197 ist gering; er beträgt $0{,}024 \cdot h$, also noch nicht $2^1/_2$ Prozent der Entfernung zwischen Hüft- und Schulterlinienmitte. Da die wirklichen Bewegungen des Kopfes relativ zum Rumpfe nur durch die Annahme eines zwischen dem unteren Ende der Halbwirbelsäule und dem Kopfgelenk befindlichen instantanen Drehzentrums von wechselnder Lage getroffen werden, so erkennt man aus diesem geringen Unterschiede zwischen den äußersten Grenzen des Zentrums, daß man weder bei der ersten noch bei der zweiten gemachten Annahme Fehler begeht, welche im Mißverhältnis zu der sonst erreichbaren Genauigkeit stehen. Bei der zweiten Annahme würde der Hauptpunkt des Rumpfes von je einem Hüftgelenkmittelpunkte bezüglich Schultergelenkmittelpunkte die Entfernung $\sqrt{0{,}182 \cdot h^2 + b^2}$ bezüglich $\sqrt{0{,}328 \cdot h^2 + a^2}$ besitzen.

Für den Hauptpunkt des Kopfes erhält man auch zwei verschiedene Lagen, je nachdem man das Drehzentrum in das Kopfgelenk oder in die Schulterlinie verlegt. Im ersten Falle stellt der Hauptpunkt des Kopfes den gemeinsamen Schwerpunkt zweier im Mittelpunkte des Atlantooccipitalgelenks und im Schwerpunkte des Kopfes konzentrierter Massen dar, deren Verhältniszahlen 0,9294 und 0,0706 sind. Dabei liegt er, ebenso wie der Kopfschwerpunkt, sehr annähernd auf der Verbindungsstrecke des Kopfgelenkmittelpunktes mit dem Kopfscheitelpunkte. Da der Schwerpunkt des Kopfes diese Verbindungsstrecke im Verhältnis 0,26 : 0,74 teilt, so ergibt die Rechnung, daß der Hauptpunkt des Kopfes dieselbe im Verhältnis 0,018 : 0,982 teilt. Ist l die Länge dieser Strecke, so beträgt also der Abstand des Hauptpunktes vom Kopfgelenkmittelpunkte $0{,}018 \cdot l$ und vom Kopfscheitelpunkte $0{,}982 \cdot l$.

Im zweiten Falle, wenn das Drehzentrum mit dem Mittelpunkte der Schulterlinie zusammenfällt, hat der Hauptpunkt einen wesentlich anderen Ort; denn derselbe hängt ja hauptsächlich mit von der Lage der Gelenkverbindungen des betreffenden Körperteils mit anderen ab. Der Hauptpunkt stellt sich auch bei dieser zweiten Annahme als gemeinsamer Schwerpunkt zweier Massenpunkte von den Verhältniszahlen 0,9294 und 0,0706 dar, nur fällt der erste jetzt in den Mittelpunkt der Schulterlinie hinein. Der Schwerpunkt des Kopfes liegt nun auf der Verbindungsstrecke zwischen dem Mittelpunkte der Schulterlinie und dem Kopfscheitelpunkte und teilt dieselbe wie 0,70 : 0,30. Daraus ergibt sich, daß der Hauptpunkt des Kopfes

dieselbe Strecke im Verhältnis 0,049 : 0,951 teilt. Bedeutet h die Entfernung zwischen dem Mittelpunkte der Schulterlinie und dem Kopfscheitelpunkte, so besitzt demnach der Hauptpunkt des Kopfes von diesen beiden Punkten bezüglich die Abstände $0{,}049 \cdot h$ und $0{,}951 \cdot h$; er liegt also bei dieser zweiten Annahme sehr nahe an der Schulterlinie.

Damit ist die Lage der Hauptpunkte sämtlicher zwölf Körperabschnitte für jedes Individuum ermittelt, welchem die auf Seite 179 angegebenen normalen Massenverhältnisse der einzelnen Körperteile zukommen. Die Angaben über die Abstände der Hauptpunkte von den benachbarten Gelenkmittelpunkten sind ganz allgemein gemacht worden, damit man im gegebenen Falle nach direkter Messung der Dimensionen des betreffenden Individuums diese Abstände leicht berechnen kann.

Die Strecken zwischen den Mittelpunkten der zu einem Körperteil gehörenden Gelenke und dem Hauptpunkte dieses Körperteils führen den Namen „Hauptstrecken". Demnach kommen bei der getroffenen Einteilung des Körpers für den Oberschenkel, Unterschenkel und Oberarm je zwei solcher Hauptstrecken, für das System Unterarm + Hand, sowie für den Fuß und den Kopf je eine Hauptstrecke, dagegen für den Rumpf fünf derartige Hauptstrecken in Betracht.

b) *Verwendung der Hauptpunkte zur Bestimmung des Gesamtschwerpunktes und der Schwerpunkte der Teilsysteme des menschlichen Körpers.* Mit Hilfe der Hauptpunkte und Hauptstrecken kann man nun, wie im allgemeinen Teil nachgewiesen worden ist, auf noch viel einfachere Weise durch Konstruktion zu dem Orte des Gesamtschwerpunktes des menschlichen Körpers gelangen, als dies unter Verwendung der Einzelschwerpunkte möglich war. Man braucht nur von dem Hauptpunkte irgend eines der n Körperteile aus in beliebiger Reihenfolge diejenigen Hauptstrecken der übrigen $n - 1$ Körperteile unter Beibehaltung ihrer im Körper jeweils eingenommenen Richtung aneinanderzusetzen, welche innerhalb des Körpers diesem Hauptpunkte zugekehrt sind. Der Endpunkt des auf diese Weise entstehenden gebrochenen Linienzuges wird dann stets mit dem Gesamtschwerpunkte des menschlichen Körpers zusammenfallen. Führt man diese Konstruktion nicht im Raume, sondern in der Projektion des Körpers auf irgend eine Ebene, z. B. die Frontalebene (vgl. Tafel II) aus, indem man natürlich dann die Projektionen der betreffenden Hauptstrecken zu dem gebrochenen Linienzug zusammensetzt, so erhält man die Projektion des Gesamtschwerpunktes auf diese Ebene.

Benutzt man beispielsweise in Tafel II den Hauptpunkt H_1 des Rumpfes als Ausgangspunkt, so setzt sich also im Raume der gebrochene Linienzug bei der angenommenen Zerlegung des ganzen Körpers in zwölf Abschnitte zusammen aus den beiden Verbindungs-

strecken $\bar{c}_2$ und $\bar{c}_3$ eines Hüftgelenkmittelpunktes $G_{1,2}$ bzw. $G_{1,3}$ mit dem Hauptpunkte H_2 bzw. H_3 seines Oberschenkels, den beiden Verbindungsstrecken $\bar{c}_4$ und $\bar{c}_5$ eines Kniegelenkmittelpunktes $G_{2,4}$ bzw. $G_{3,5}$ mit dem Hauptpunkte H_4 bzw. H_5 seines Unterschenkels, den beiden Verbindungsstrecken $\bar{c}_6$ und $\bar{c}_7$ eines Fußgelenkmittelpunktes $G_{4,6}$ bzw. $G_{5,7}$ mit dem Hauptpunkte H_6 bzw. H_7 seines Fußes, den beiden Verbindungsstrecken $\bar{c}_8$ und $\bar{c}_9$ eines Schultergelenkmittelpunktes $G_{1,8}$ bzw. $G_{1,9}$ mit dem Hauptpunkte H_8 bzw. H_9 seines Oberarmes, den beiden Verbindungsstrecken $\bar{c}_{10}$ und $\bar{c}_{11}$ eines Ellbogengelenkmittelpunktes $G_{8,10}$ bzw. $G_{9,11}$ mit dem Hauptpunkte H_{10} bzw. H_{11} des zugehörigen Systems Unterarm + Hand und endlich der Verbindungsstrecke $\bar{c}_{12}$ des Kopfgelenkmittelpunktes $G_{1,12}$ mit dem Hauptpunkte H_{12} des Kopfes. An Stelle der letzteren kann auch die etwas größere Verbindungsstrecke des Mittelpunktes der Schulterlinie mit demjenigen Hauptpunkte des Kopfes, welcher dem in der Schulterlinie angenommenen Drehzentrum des Kopfes entspricht, verwendet werden; nur muß man in diesem Falle dann auch von dem dieser Annahme entsprechenden etwas tiefer gelegenen Hauptpunkte des Rumpfes bei der Konstruktion ausgehen. Es läßt sich leicht nachweisen, daß man in beiden Fällen zu dem gleichen Endresultat gelangt.

Da nach den früheren Angaben der Schwerpunkt des Kopfes die Verbindungsstrecke des Kopfgelenkmittelpunktes mit dem Kopfscheitelpunkte im Verhältnis 0,26 : 0,74 und die Verbindungsstrecke der Schulterlinienmitte mit dem Kopfscheitel im Verhältnis 0,70 : 0,30 teilt, so kann man leicht berechnen, daß die erstere Verbindungsstrecke im Verhältnis 0,68 : 1 und die letztere im Verhältnis 1,68 : 1 zu der Verbindungsstrecke zwischen dem Mittelpunkte der Schulterlinie und dem Kopfgelenkmittelpunkte steht. Diese steht nun ihrerseits zu dem Abstand zwischen den Mitten der Hüft- und Schulterlinie im Verhältnis 0,35 : 1. Es verhalten sich daher die Verbindungsstrecke des Kopfgelenkmittelpunktes mit dem Kopfscheitelpunkte bezüglich die Verbindungstrecke der Schulterlinienmitte mit dem Kopfscheitelpunkte zu der Verbindungsstrecke der Mitten von Hüft- und Schulterlinie wie 0,24 : 1 bezüglich 0,59 : 1. Daraus ergibt sich aber, daß die beiden verschiedenen Hauptstrecken des Kopfes von der Länge $0{,}018 \cdot l$ bezüglich $0{,}049 \cdot h$ (vgl. Seite 198 und 199) sich zu dem Abstande der Mittelpunkte der Hüft- und Schulterlinie verhalten wie 0,004 : 1 bezüglich 0,028 : 1. Es ist also die Hauptstrecke für den Fall, daß das Drehzentrum des Kopfes in das Kopfgelenk fällt, um 2,4 Prozent des Abstandes der Hüft- und Schulterlinienmitte kleiner, als wenn das Drehzentrum in der Schulterlinie liegt. Um gerade so viel liegt aber im ersten Falle der Hauptpunkt des Rumpfes auf der Rumpflinie höher als im letzten (vgl. Seite 198). Es wird daher der Gesamtschwerpunkt des Körpers in der Normalstellung in beiden Fällen

absolut genau, bei allen anderen Stellungen des Körpers wenigstens mit genügender Genauigkeit an demselben Ort gefunden werden.

Anstatt von dem Hauptpunkte des Rumpfes kann man bei der Konstruktion des Gesamtschwerpunktes von jedem beliebigen anderen Hauptpunkte ausgehen. So empfiehlt es sich z. B., den Hauptpunkt H_6 des rechten Fußes als Ausgangspunkt zu verwenden, wenn man die Bewegungen des Schwerpunktes untersuchen will, während der Körper nur das rechte Bein aufgesetzt hat. Dann kommen aber zum Teil andere Hauptstrecken in Frage, nämlich für den Unterschenkel des rechten Beines die Verbindungsstrecke $-\bar{d}_4$ zwischen dem Mittelpunkte des Fußgelenks und dem Hauptpunkte des Unterschenkels, und zwar in proximaler Richtung, für den Oberschenkel desselben Beines die Verbindungsstrecke $-\bar{d}_2$ des Kniegelenkmittelpunktes mit dem Hauptpunkte des Oberschenkels. Die Hauptstrecke des aufgesetzten Fußes kommt jetzt in Wegfall, dafür tritt aber eine Hauptstrecke des Rumpfes ein, nämlich die Verbindungsstrecke $\overline{G_{1,2}H_1}$ des Hüftgelenkmittelpunktes des aufgesetzten Beines mit dem Hauptpunkte des Rumpfes; die Hauptstrecken der übrigen acht Körperteile sind dieselben wie in dem Falle, daß vom Rumpfhauptpunkte ausgegangen wird.

Wenn es auch an und für sich gleichgültig ist, welchen Hauptpunkt man zum Ausgangspunkte für die Konstruktion des Gesamtschwerpunktes wählt, so empfiehlt es sich doch, im allgemeinen den Hauptpunkt des Rumpfes hierzu zu verwenden. In diesem Falle sind die Hauptstrecken, welche den Vektorzug nach dem Gesamtschwerpunkte zusammensetzen, alle verhältnismäßig klein; der ganze Vektorzug nimmt so wenig Raum ein, daß man die Projektionen desselben leicht in natürlicher Größe aufzeichnen und dadurch eine möglichst große Genauigkeit bei der Bestimmung der Lage des Gesamtschwerpunktes erreichen kann.

Die Konstruktion des Gesamtschwerpunktes mit Hilfe der Hauptpunkte besitzt große Vorzüge gegenüber der oben auseinandergesetzten Methode der Zusammensetzung der einzelnen Schwerpunkte.

Zunächst führt sie viel schneller zum Ziele als diese. Hat man einmal die Lage der Hauptpunkte innerhalb der einzelnen Körperteile festgestellt, so läuft die Konstruktion des Gesamtschwerpunktes nur noch auf eine geometrische Addition, d. h. ein Aneinandersetzen von elf bestimmten, durch die Hauptpunkte gegebenen Strecken hinaus. Bei der Konstruktion mit Hilfe der Einzelschwerpunkte hat man dagegen ebensoviel Verbindungsstrecken zwischen einzelnen Schwerpunkten erst in bestimmtem Verhältnis zu teilen. Die Ermittelung der Hauptpunkte selbst erfordert aber nicht mehr Arbeit als die Bestimmung der Einzelschwerpunkte am lebenden Körper; denn in beiden

Fällen handelt es sich darum, die Längsachsen der einzelnen Körperteile in gegebenem Verhältnis zu teilen.

Viel wichtiger aber als dieser mehr praktische Vorteil ist die Tatsache, daß man in den Hauptstrecken direkt ein Maß besitzt für den Einfluß, welchen die Bewegung der verschiedenen Körperteile und Systeme von Körperteilen auf die Lage und Verschiebung des Gesamtschwerpunktes ausübt. Bewegt man z. B. allein einen Fuß, etwa den rechten, während alle übrigen Körperteile ihre Stellung im Raume beibehalten, so kann man sich leicht davon überzeugen, daß dabei der Gesamtschwerpunkt des Körpers einen Kreis beschreibt, dessen Radius gleich der Hauptstrecke $\bar{c}_6$ des rechten Fußes ist, d. h. also gleich der Strecke zwischen dem Gelenkmittelpunkte $G_{4,6}$ des rechten oberen Sprunggelenks und dem Hauptpunkte H_6 des rechten Fußes. Da die Reihenfolge der aneinandergesetzten Hauptstrecken bei dem nach dem Schwerpunkte des Körpers führenden Vektorzug beliebig ist, so braucht man den letzteren nur so zusammenzusetzen, daß die Hauptstrecke $\bar{c}_6$ des rechten Fußes zuletzt kommt. Bewegt man dann nur den rechten Fuß, so bleiben alle zu den übrigen Körperteilen gehörenden Hauptstrecken in Ruhe, und es bewegt sich allein die Hauptstrecke $\bar{c}_6$ des rechten Fußes in der Weise, daß sie sich um den ruhenden Endpunkt der in dem Vektorzuge voraufgehenden Hauptstrecke herumdreht; ihr eigener Endpunkt, der die Lage des Gesamtschwerpunktes anzeigt, bewegt sich also auf einem Kreise um einen festen Punkt des Raumes, dessen Radius eben die Länge dieser Hauptstrecke $\bar{c}_6$ des rechten Fußes besitzt. Das entsprechende gilt für die übrigen Endglieder, also den linken Fuß, den Kopf, und jedes System Unterarm + Hand. Immer wird bei alleiniger Bewegung eines dieser Endglieder der Gesamtschwerpunkt des menschlichen Körpers auf einem Kreise mit festem Mittelpunkte wandern, dessen Radius gleich der Hauptstrecke dieses Endgliedes ist. Man braucht in jedem Falle nur den etwa vom Hauptpunkte des Rumpfes aus nach dem Gesamtschwerpunkte führenden Vektorzug so zusammenzusetzen, daß die Hauptstrecke des betreffenden Endgliedes dabei zuletzt kommt, um dies unmittelbar einzusehen.

Bewegt man nicht nur ein Endglied allein, sondern gleichzeitig eine Reihe von Gliedern, die sich an das erstere anschließen, so kommt es auf die gegenseitige Stellung dieser Glieder an, welchen Einfluß eine derartige Bewegung auf den Gesamtschwerpunkt ausübt. Aber auch über diese komplizierteren Verhältnisse kann man sich leicht mit Hilfe der Hauptpunkte und Hauptstrecken Klarheit verschaffen.

Dreht man z. B. unter Festhaltung aller anderen Körperteile nur das ganze rechte Bein im Hüftgelenk in der Weise, daß dabei die Haltung des Beines sich nicht ändert und also keine Bewegung im Knie- und Fußgelenk eintritt, so kann man jetzt das ganze, sich wie

ein starrer Abschnitt verhaltende Bein als ein Endglied auffassen. Der Gesamtschwerpunkt des Körpers wird daher auch in diesem Falle sich auf einem Kreise bewegen, dessen Radius gleich dem Abstande des Hauptpunktes des ganzen rechten Beines, welcher mit $H_{2,6}$ bezeichnet sein soll, vom Mittelpunkte des rechten Hüftgelenks ist. Nun steht nach den ausführlichen Erörterungen in 9b) bei jedem Gelenksystem der Hauptpunkt eines Systems von Gliedern in innigster Beziehung zu den Hauptpunkten und Hauptstrecken der einzelnen das System zusammensetzenden Glieder. Die vom Mittelpunkte des rechten Hüftgelenks nach dem Hauptpunkte des ganzen rechten Beines führende Strecke $\overline{G_{1,2}H_{2,6}}$, welche durch $\bar{c}_{2,6}$ bezeichnet sein mag, ist nämlich gleich der geometrischen Summe der drei Hauptstrecken des Oberschenkels, Unterschenkels und Fußes, welche dem Hüftgelenk innerhalb des Beines am nächsten liegen, d. h. also es ist

$$\bar{c}_{2,6} = \bar{c}_2 + \bar{c}_4 + \bar{c}_6. \tag{221}$$

Zu jeder anderen Haltung des Beines gehört im allgemeinen auch ein anderer Wert der Hauptstrecke $\bar{c}_{2,6}$ und infolgedessen des Radius der Kreisbahn, auf welcher sich der Gesamtschwerpunkt des Körpers bei alleiniger Bewegung des starren rechten Beines verschiebt. Jeder der drei Abschnitte des Beines beeinflußt dabei nach (221) den Wert von $\bar{c}_{2,6}$ nach Maßgabe der Größe und Richtung seiner Hauptstrecke $\bar{c}$ gegenüber den beiden anderen Hauptstrecken. Insofern kann man also auch in diesem Falle sagen, daß der Einfluß, welchen sowohl der Oberschenkel als auch der Unterschenkel durch seine Stellung und Bewegung gegenüber den anderen Gliedern auf die Lage und Verschiebung des Gesamtschwerpunktes des menschlichen Körpers ausübt, durch die proximale Hauptstrecke desselben dargestellt wird.

Dies gilt schließlich auch allgemein, wenn das Bein während seiner Drehung um den Mittelpunkt des Hüftgelenks durch Bewegung im Knie- und Fußgelenk seine Gestalt ändert. Dann bewegt sich zwar der Gesamtschwerpunkt nicht mehr auf einem Kreise, weil ja die Strecke $\bar{c}_{2,6}$ dabei nicht mehr konstant bleibt; die Bewegung desselben kann aber in diesem Falle ihrer Richtung und Geschwindigkeit nach aufgefaßt werden als die Resultante aus drei Kreisbewegungen mit den Radien $\bar{c}_2$, $\bar{c}_4$ und $\bar{c}_6$.

Nach 9b) steht der Hauptpunkt $H_{2,6}$ des ganzen rechten Beines auch in enger Beziehung zu dem Schwerpunkte $S_{2,6}$ des ganzen Beines. Der letztere liegt auf der Verlängerung der Verbindungsstrecke $\overline{G_{1,2}H_{2,6}}$, und zwar in einem Abstande vom Mittelpunkte $G_{1,2}$ des Hüftgelenks, welcher sich zu dem Abstande $c_{2,6}$ des Hauptpunktes $H_{2,6}$ von demselben Gelenkmittelpunkte verhält wie die Gesamtmasse des menschlichen Körpers zu der Masse des ganzen Beines.

Zu dem Schwerpunkte des rechten Beines hätte man auch da-

durch gelangen können, daß man das Bein vom Körper losgelöst denkt und als dreigliedriges Gelenksystem für sich betrachtet. Die den drei Abschnitten des Beines entsprechenden Hauptpunkte H_2', H_4' und H_6' erscheinen dann alle in distaler Richtung weiter fortgerückt, da am proximalen Gelenk eines jeden der drei Glieder für die Zusammensetzung des zugehörigen reduzierten Systems die Massen des Rumpfes, Kopfes und der übrigen drei Extremitäten in Wegfall kommen. Demnach erscheinen die drei neuen proximalen Hauptstrecken $\bar{c}_2'$, $\bar{c}_4'$ und $\bar{c}_6'$ im Verhältnis der Gesamtmasse des Körpers zu der Masse des Beines größer als die Hauptstrecken $\bar{c}_2$, $\bar{c}_4$ und $\bar{c}_6$. Zu ganz entsprechenden Resultaten gelangt man bei der isolierten Betrachtung irgend eines anderen Teilsystems des menschlichen Körpers, etwa des ganzen Armes.

c) *Die Einwirkung der Schwere auf die einzelnen Abschnitte des menschlichen Körpers.*

Die Hauptpunkte spielen auch eine wichtige Rolle bei der Beurteilung der Einwirkung der Schwere auf die einzelnen Körperteile. An einem einzigen starren Körper wirkt bekanntlich die Schwere wie eine einzige im Schwerpunkte angreifende, vertikal nach unten gerichtete Kraft von der Größe des Gewichts dieses Körpers. Hängt dagegen der Körper noch mit anderen durch Gelenke zusammen, so treten zu dieser Gewichtskraft außerdem noch an den Gelenken neue Kräfte hinzu, welche ebenfalls der Schwere ihren Ursprung verdanken. Denn nach den Auseinandersetzungen im allgemeinen Teil findet sich unter den Komponenten des Drucks in jedem einen Körperteil begrenzenden Gelenk eine vertikal nach unten gerichtete Komponente vor, welche gleich dem Gewicht des angrenzenden Teilsystems ist. Alle diese Schwerkräfte lassen sich aber zu einer Resultante zusammensetzen, die an Größe dem Gesamtgewicht des menschlichen Körpers gleich ist, und deren Angriffspunkt, wie man aus der Zusammensetzung der reduzierten Systeme ohne weiteres erkennt, gerade der Hauptpunkt des betreffenden Körperteils ist.

Es läßt sich nun weiterhin nachweisen, daß, wenn der menschliche Körper nicht gerade frei in der Luft schwebt, sondern an irgend welchen Stellen mit der Außenwelt in Berührung ist, in jedem Falle zu dieser im Hauptpunkte angreifenden Gewichtskraft noch eine andere entgegengesetzt gleiche Kraft hinzutritt, welche die erstere zu einem Kräftepaar ergänzt. Drückt z. B. der Körper nur mit einem Gliede, etwa einem Fuß, gegen eine starre Fläche der Außenwelt, etwa den Fußboden, so ruft die Reaktion dieser Fläche an dem der Druckstelle zugekehrten Gelenk eines jeden Körperteils unter anderen Komponenten eine Druckkraft hervor, welche dem Gewicht des ganzen Körpers entgegengesetzt gleich ist. Diese bildet daher mit der im Hauptpunkte des betreffenden Körperteils angreifenden Gewichtskraft ein Kräfte-

paar, dessen Achsenmoment das von seiten der Schwere auf den Körperteil ausgeübte Drehungsmoment darstellt. Findet dagegen die Berührung mit der Außenwelt an verschiedenen Gliedern zugleich statt, so verteilen sich die von der Schwere verursachten, vertikal nach oben gerichteten Reaktionskräfte auf alle Gelenke des betreffenden Körperteils, welche einer Berührungsstelle zugekehrt sind. Die Resultante aller ist dann wieder dem Gesamtgewicht des ganzen Körpers entgegengesetzt gleich und setzt sich mit der im Hauptpunkte des Körperteils angreifenden Gewichtskraft zu dem auf den letzteren drehend einwirkenden Kräftepaar der Schwere zusammen.

Wenn nur ein Teilsystem des menschlichen Körpers beweglich, der übrige Körper dagegen fixiert gedacht ist, so kann man dieses System in Rücksicht auf die Einwirkung der Schwere als selbständiges Gelenksystem auffassen und gelangt dann zu ganz entsprechenden Resultaten. Nimmt man z. B. an, der Rumpf mit dem Schultergürtel oder das Becken seien durch irgend welche äußeren Kräfte im Raume fixiert, dann läßt sich der Arm im einen und das Bein im anderen Falle als Gelenksystem für sich betrachten. Es rücken dann die Hauptpunkte in den einzelnen Abschnitten der betreffenden Extremität in distaler Richtung von den proximalen Gelenken fort, weil an letzteren jetzt die Massen des Rumpfes, Kopfes und der anhängenden übrigen Extremitäten bei der Zusammensetzung der reduzierten Systeme in Wegfall kommen. Die Schwere wirkt infolgedessen auf die einzelnen Abschnitte der Extremität jetzt wie eine in den neuen Hauptpunkten angreifende vertikal nach unten ziehende Kraft ein, deren Größe nur noch gleich dem Gewicht der Extremität ist. Im Mittelpunkte des Schultergelenks beim Arm, oder des Hüftgelenks beim Bein und in allen proximalen Gelenken der einzelnen Glieder kommt dann noch eine entgegengesetzt gleiche Gewichtskraft hinzu, welche die im Hauptpunkte angreifende zu dem wirksamen Kräftepaar ergänzt. So wirkt also in diesem Falle die Schwere auf den Oberarm mit einem Kräftepaar ein, dessen Kräfte im neuen Hauptpunkte des Oberarms einerseits und im Mittelpunkte des Humeruskopfes andererseits angreifen und gleich dem Gewicht des ganzen Armes sind. Das auf den Unterarm einwirkende Kräftepaar setzt sich aus den beiden im neuen Hauptpunkte des Unterarms einerseits und im Mittelpunkte des Ellbogengelenks andererseits angreifenden entgegengesetzt gleichen Kräften zusammen, welche ebenfalls durch das Gesamtgewicht des Armes gemessen werden. In ganz entsprechender Weise gestalten sich die Verhältnisse an den Teilen der unteren Extremität.

15. Bestimmung der Trägheitsmomente der verschiedenen Körperteile.

Die Größe eines Trägheitsmomentes kann man im allgemeinen nicht

durch Rechnung finden. Bei homogenen Körpern von geometrisch definierter Form ist es vielfach möglich; dann läuft die Ermittlung des Trägheitsmomentes auf eine unter Umständen recht komplizierte Aufgabe der Integralrechnung hinaus. Auch bei einigen Körpern von ungleicher Dichtigkeit ist die Aufgabe zu lösen, wenn sich nämlich die Dichtigkeit in der Weise ändert, daß der Körper als aus einer stetigen Folge homogener konzentrischer Kugelschalen angesehen werden kann. Es lassen sich in diesem Falle, wie Schlömilch gezeigt hat[1]), die Trägheitsmomente von symmetrischen Rotationskörpern auf die von Kugeln und Kugelschalen mit endlicher Dicke zurückführen. Bei den Abschnitten des menschlichen und tierischen Körpers kann man dagegen die Größen der Trägheitsmomente nur auf empirischem Wege ableiten.

Die Methode, welche uns seiner Zeit nach mehreren Vorversuchen als die geeignetste zur empirischen Bestimmung der Trägheitsmomente menschlicher Körperteile erschien, bestand in folgendem.

Der für die Untersuchung ausgesuchte Leichnam, bei welchem vor allen Dingen auf normalen Körperbau gesehen war, wurde zuerst, wie bei der Bestimmung der Schwerpunktslagen, durch Einlegen in eine Kältemischung in eine starre Masse verwandelt und dann an den Gelenken in die zu untersuchenden Teile zersägt. Nun wurde bei jedem Körperteil die Schwingungsdauer für zwei einander parallele Achsen bestimmt, deren Ebene den Schwerpunkt enthielt, und zwar so, daß die Achsen sich auf verschiedenen Seiten des Schwerpunktes befanden. Ursprünglich wurden für diese Schwingungsversuche in die Körperteile eingeschlagene Stahlstäbe mit kreisrundem Querschnitt als Achsen verwendet. Es hatte sich aber herausgestellt, daß bei der Drehung der Körperteile um diese Achsen die Reibung so beträchtlich war, daß sie einen nicht zu vernachläßigenden Einfluß auf die Schwingungsdauer ausübte. Deshalb gingen wir dann zu Stahlachsen mit verhältnismäßig großem quadratischen Querschnitt über und verbanden dadurch die Achse unverrückbar fest mit dem Körperteil. Die Schwingung fand dann mit äußerst geringer Reibung um die dem Schwerpunkte zugekehrte Kante der Stahlachse statt, mit welcher das ganze Pendel auf einer glatten Unterlage drehbar aufgehängt war. Während man bei runden Achsen auf das Gewicht, die Dimensionen und die Massenverteilung der stähleren Achsen keine Rücksicht zu nehmen brauchte, mußten jetzt die Trägheitsmomente der beiden, während aller Schwingungsversuche fest mit dem Körperteil in Verbindung bleibenden Achsen natürlich mit in Rechnung gezogen werden.

---

1) O. Schlömilch, Über die Bestimmung der Massen und der Trägheitsmomente symmetrischer Rotationskröper von ungleichförmiger Dichtigkeit. Abhandl. der math.-phys. Klasse der Königl. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. Bd. II. Nr. IV. 1854.

In Figur 26 ist die Lage der beiden stählernen Achsen A_1 und A_2 in einem Körperteil schematisch angedeutet worden.

Bezeichnet S den Schwerpunkt des Körperteils allein (ohne Berücksichtigung der Schwere der Stahlstäbe) und ε_1, ε_2 die Entfernungen desselben von den ihm zunächst liegenden Kanten A_1, A_2 der beiden Stahlstäbe, welche als Schwingungsachsen benutzt wurden (in der Figur die stark gezeichneten Kanten), und liegt der Schwerpunkt S genau in der durch die beiden parallelen Achsen A_1, A_2 bestimmten Ebene, so muß, wenn die Entfernung dieser beiden Achsen λ ist,

(222) $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \lambda$ sein.

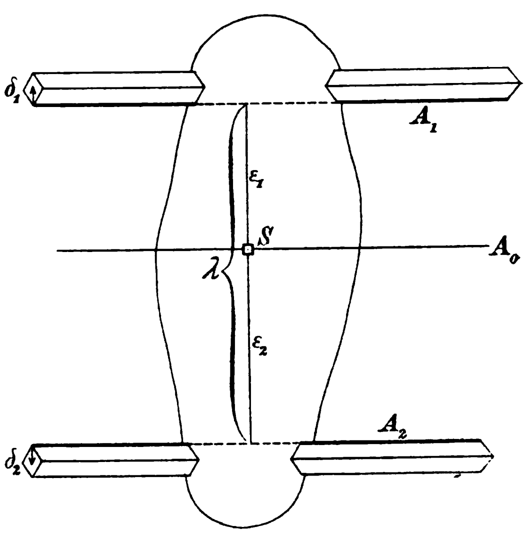


Fig. 26.

Bezeichnet ferner

m die Masse des Gliedes (ohne die Stahlstäbe),

$\varkappa_0$ den Trägheitsradius des Gliedes allein in bezug auf die durch den Schwerpunkt S gehende und zu A_1, A_2 parallele Achse A_0,

μ_1 die Masse des Stahlstabes mit der Achse A_1,

δ_1 die halbe Diagonale seines Querschnitts,

μ_2 die Masse des anderen Stahlstabes mit der Achse A_2

δ_2 die halbe Diagonale seines Querschnitts,

τ_1 die Schwingungsdauer des Massensystems (Glied und Stahlstäbe zusammen) für die Schwingungsachse A_1,

τ_2 die entsprechende Schwingungsdauer für die Achse A_2,

g die Beschleunigung der Schwere,

so ist zunächst in bezug auf die Achse A_1:

das Trägheitsmoment des Gliedes allein $m(\varkappa_0^2 + \varepsilon_1^2)$

Das Trägheitsmoment des oberen Stahlstabes $\mu_1 \left(\frac{\delta_1^2}{3} + \delta_1^2\right) = \frac{4}{3}\mu_1 \delta_1^2$,

Das Trägheitsmoment des unteren Stahlstabes

$$\mu_2 \left(\frac{\delta_2^2}{3} + (\lambda + \delta_2)^2\right) = \frac{1}{3}\mu_2 [\delta_2^2 + 3(\lambda + \delta_2)^2],$$

und in bezug auf die Achse A_2:

Das Trägheitsmoment des Gliedes allein $m(\varkappa_0^2 + \varepsilon_2^2)$,

Das Trägheitsmoment des oberen Stabes

$$\mu_1\left(\frac{\delta_1^2}{3}+(\lambda+\delta_1)^2\right)=\frac{1}{3}\,\mu_1\,[\delta_1^2+3\,(\lambda+\delta_1)^2],$$

Das Trägheitsmoment des unteren Stahlstabes $\mu_2\left(\frac{\delta_2^2}{3}+\delta_2^2\right)=\frac{4}{3}\,\mu_2\delta_2^2$.
Daraus folgt nach den Pendelgesetzen:

$$(223)\qquad \begin{aligned} \tau_1 &= \pi\sqrt{\frac{m(\varkappa_0^2+\varepsilon_1^2)+\frac{4}{3}\mu_1\delta_1^2+\frac{1}{3}\mu_2[\delta_2^2+3(\lambda+\delta_2)^2]}{g[m\varepsilon_1+\mu_1\delta_1+\mu_2(\lambda+\delta_2)]}},\\ \tau_2 &= \pi\sqrt{\frac{m(\varkappa_0^2+\varepsilon_2^2)+\frac{1}{3}\mu_1[\delta_1^2+3(\lambda+\delta_1)^2]+\frac{4}{3}\mu_2\delta_2^2}{g[m\varepsilon_2+\mu_1(\lambda+\delta_1)+\mu_2\delta_2]}}. \end{aligned}$$

Aus diesen beiden Gleichungen und Gleichung (222) lassen sich nun die drei unbekannten Größen ε_1, ε_2 und $\varkappa_0$ leicht berechnen, da alle anderen Größen bei jedem Versuch gemessen worden sind. Zunächst berechnet man die Werte der Schwerpunktsabstände ε_1 und ε_2 und bekommt dadurch eine sehr genaue Kenntnis der Lage des Schwerpunktes. Nachdem ε_1 und ε_2 bestimmt worden sind, kann man dann mit Hilfe einer der beiden Gleichungen (223) den Wert von $\varkappa_0$ ableiten.

Die Versuche ergaben nun zunächst das bemerkenswerte Resultat, daß bei den größeren Extremitätenabschnitten (mit Ausnahme des Fußes und der Hand) die Trägheitsmomente für alle zu der Längsachse des Körperteils senkrechten Schwerpunktsachsen mit großer Annäherung einander gleich sind, so daß also die Zentralträgheitsellipsoide derselben sich ziemlich genau als Rotationsellipsoide darstellen, deren Rotationsachsen mit den Längsachsen der Glieder zusammenfallen. Nachdem diese Tatsache gefunden war, brauchte man also nur noch die Trägheitsmomente bzw. Trägheitsradien für irgend eine zur Längsachse senkrechte Achse und außerdem für die Längsachse selbst zu bestimmen.

In folgender Tabelle finden sich als Beispiel für die Anwendung der Formeln (222) und (223) die bei einem der angestellten Versuche gefundenen beiden Trägheitsradien für die größeren Extremitätenabschnitte und außerdem für den Kopf, Rumpf, die Systeme Rumpf + Kopf, Unterschenkel + Fuß und die ganzen Extremitäten der Trägheitsradius in bezug auf eine zur Längsachse senkrechte und beim Rumpf und Kopf zugleich frontale Schwerpunktsachse angegeben. Ferner sind auch die Gewichte und die Massenzahlen der Körperteile, die zu den Trägheitsradien gehörenden Trägheitsmomente derselben, ihre Längen und die Abstände e_1, e_2 ihres Schwerpunktes von den bei aufrechter Stellung des Körpers bzw. oben und unten liegenden Gelenkmittelpunkten in die Tabelle eingetragen worden.

Die Gewichte, Massen, Schwerpunktslagen und Trägheitsmomente einzelner Teile des menschlichen Körpers.

Körperteile		Gewicht in kg	Massenzahl	Länge l in cm	Entfernung des Schwerpunktes: e_1 von oben in cm	e_2 von unten in cm	Trägheitsradien $\varkappa$ und Trägheitsmoment $m\varkappa^2$ für Achsen durch den Schwerpunkt — Achse senkrecht zur Längsachse des Gliedes: $\varkappa$ in cm	$m\varkappa^2$	Achse parallel der Längsachse des Gliedes: $\varkappa$ in cm	$m\varkappa^2$
Rumpf + Kopf		23,790	0,02425	72,75	42,61	30,14	21,08	10,7750		
Rumpf		19,910	0,02029	56,75 [1])	34,50	22,25	16,73	5,6819		
Kopf		3,880	0,00396	16,0 [2])	11,93	4,07	6,81	0,1834		
Ganze untere Extremität	r	7,840	0,00799	78,9	32,74	46,16	25,10	5,0344		
	l	7,640	0,00779	79,2	32,42	46,78	25,08	4,8981		
Oberschenkel	r	4,860	0,00495	35,9	15,72	20,18	11,01	0,6004	4,55	0,1025
	l	4,810	0,00490	36,65	15,90	20,75	11,43	0,6405	4,56	0,1019
Unterschenkel + Fuß	r	2,980	0,00304	43,9	(24,77	19,13	14,41	0,6305) [6])		
	l	2,800	0,00285	43,1	21,94	21,16	15,10	0,6507		
Unterschenkel	r	2,070	0,00211	37,9	16,13	21,77	9,16	0,1770	3,12	0,0205
	l	1,890	0,00193	37,1	16,30	20,80	9,66	0,1798	3,05	0,0179
Fuß	r	0,910	0,00093	Höhe 6,0 Länge 20,0 [3])	6,38	13,62	5,91	0,0324	6,21	0,0358
	l	0,910	0,00093	Höhe 6,0 Länge 20,0 [3])	6,95	13,05	5,97	0,0331	6,24	0,0361
Ganze obere Extremität	r	2,360	0,00245	59,0	25,18	33,82	18,38	0,8127		
	l	2,470	0,00252	58,5	27,17	31,33	17,60	0,7798		
Oberarm	r	1,243	0,00127	25,5	11,37	14,13	7,95	0,0801	2,79	0,0099
	l	1,252	0,00128	27,1	12,31	14,79	7,79	0,0774	2,74	0,0096
Unterarm + Hand	r	1,117	0,00114	36,0 [4])	15,99	20,01	10,43	0,1238	2,75	0,0086
	l	1,205	0,00123	35,5 [5])	17,02	18,48	11,24	0,1551	2,71	0,0090
Ganzer Körper		44,057	0,04491	150,5						

Um diese Resultate auf einen beliebigen normal gebauten lebenden Körper übertragen zu können, muß man zunächst für die zur Längsachse eines Gliedes senkrechten Schwerpunktsachsen das Verhältnis der Trägheitsradien zur Länge des Gliedes ableiten. Aus den in der

1) Länge des Rumpfes bedeutet hier die Entfernung zwischen der Mitte des Atlantooccipitalgelenks und der Verbindungslinie der beiden Hüftgelenkmittelpunkte.

2) Länge des Kopfes bedeutet die Entfernung vom Scheitel bis zur Mitte des Atlantooccipitalgelenks.

3) Länge des Fußes bedeutet die Entfernung der Fußspitze von der Achse des oberen Sprunggelenks.

4) Davon waren 24 cm Unterarmlänge und 12 cm Entfernung des I. Interphalangealgelenks vom Handgelenk.

5) Hiervon waren 25 cm Unterarmlänge und 10,5 cm Entfernung des I. Interphalangealgelenks vom Handgelenk.

6) Diese vier Werte waren nicht durch direkte Messung gewonnen, sondern erst hinterher auf Umwegen; sie machen infolgedessen nicht den gleichen Anspruch auf Genauigkeit wie die anderen.

Tabelle niedergelegten Werten von $\varkappa_0$ und l erhält man für dieses Verhältnis $\varkappa_0/l$ folgende Werte:

Rumpf + Kopf		0,29
Rumpf		0,29
Kopf		0,43
Ganze untere Extremität	r	0,32
	l	0,32
Oberschenkel	r	0,31
	l	0,31
Unterschenkel + Fuß	r	0,33
	l	0,35
Unterschenkel	r	0,24
	l	0,26
Fuß	r	0,30
	l	0,30
Ganze obere Extremität	r	0,31
	l	0,30
Oberarm	r	0,31
	l	0,29
Unterarm + Hand	r	0,29
	l	0,32.

Als Länge des Kopfes war hierbei der Abstand des Scheitels vom Mittelpunkte des Atlantooccipitalgelenks verwendet. Nimmt man dagegen, wie es sonst üblich ist, als Kopflänge die Entfernung des Scheitels vom unteren Kinnrand, welche bei dem betreffenden Versuchsindividuum 22 cm betrug, so ergibt sich beim Kopf für $\varkappa_0/l$ der Wert 0,31. Daraus geht aber hervor, daß der Kopf sich inbetreff seines Trägheitsmomentes für die frontale und horizontale Schwerpunktsachse wie eine homogene Kugel verhält, deren Durchmesser gleich der Entfernung des Scheitels vom Kinn ist; denn für eine solche berechnet man als Wert des Verhältnisses des Trägheitsradius zum Durchmesser 0,316.

Diese und die anderen oben angeführten Verhältniszahlen weichen, wie man sieht, nur wenig voneinander ab. Das Mittel aus allen beträgt 0,30. Man hat daher das Resultat, daß für alle zur Längsachse senkrechten Schwerpunktsachsen der größeren Extremitätenabschnitte und auch für die zur Hüftachse parallele Schwerpunktsachse des Rumpfes und des Kopfes die Trägheitsradien zu der Länge des Gliedes in dem konstanten Verhältnis 3 : 10 stehen, wobei hier als Länge des Kopfes der Abstand des Scheitels vom unteren Kinnrand genommen

ist, während bei den übrigen Gliedern unter der Länge der Abstand der Mittelpunkte der beiden das Glied begrenzenden Gelenke zu verstehen ist.

Für die Trägheitsradien in bezug auf die Längsachse der Glieder selbst ließ sich eine entsprechende konstante Beziehung zur Länge des Gliedes nicht finden, dagegen zeigte sich ein wenigstens annähernd konstantes Verhältnis desselben zu der mittleren Dicke des Gliedes. Die Untersuchung ergab nämlich, daß bei den größeren Extremitätenabschnitten das Verhältnis zwischen dem Trägheitsradius in bezug auf die Längsachse und der mittleren Dicke des Gliedes annähernd den konstanten Wert 0,35 besitzt.

Durch diese Resultate wird man nun in den Stand gesetzt, am lebenden Menschen annähernd die Größen der Trägheitsradien und Trägheitsmomente eines jeden Gliedes für alle zur Längsachse senkrechten Achsen des Schwerpunktes und für die Längsachse selbst abzuleiten. Man hat zu diesem Zweck nur die Länge l und die mittleren Dicken d der Glieder zu messen. Bezeichnet man mit $\varkappa_0'$ den Trägheitsradius für eine zur Längsachse senkrechte Schwerpunktsachse und mit $\varkappa_0''$ den Trägheitsradius für die Längsachse, so hat man zunächst annähernd

$$\varkappa_0' = 0{,}3\, l \qquad \varkappa_0'' = 0{,}35\, d. \tag{224}$$

Unter Benutzung der auf Seite 179 angegebenen Verhältniszahlen μ der Masse m eines Gliedes zur Gesamtmasse m_0 des ganzen menschlichen Körpers erhält man dann für die entsprechenden Trägheitsmomente die Werte mit Hilfe der Formeln:

$$m\varkappa_0'^2 = 0{,}09\, \mu m_0 l^2 \qquad m\varkappa_0''^2 = 0{,}12\, \mu m_0 d^2. \tag{225}$$

Da die Trägheitsmomente für alle zur Längsachse senkrechten Achsen bei den größeren Extremitätenabschnitten gleich groß sind, so genügt die Kenntnis der beiden Trägheitsradien $\varkappa_0'$ und $\varkappa_0''$, um die Trägheitsradien und damit die Trägheitsmomente für alle anderen Achsen durch den Schwerpunkt des betreffenden Körperteils zu bestimmen. Bezeichnet man mit $\varkappa_0$ allgemein den Trägheitsradius für eine Schwerpunktsachse, welche mit der Längsachse des Gliedes den Winkel γ bildet, so hat man nach der Theorie der Trägheitsmomente

$$\varkappa_0 = \sqrt{\varkappa_0'^2 \sin^2\gamma + \varkappa_0''^2 \cos^2\gamma}. \tag{226}$$

Als Beispiel für die Verwendung dieser Formel sollen die Trägheitsradien der vier größeren Extremitätenabschnitte auf Grund der in der Tabelle auf Seite 209 angegebenen Werte von $\varkappa_0'$ und $\varkappa_0''$

für alle um je 5° voneinander verschiedenen Werte von γ berechnet werden. Nimmt man das Mittel aus den für die beiden Körperseiten gefundenen Werten dieser beiden Trägheitsradien, so erhält man zunächst für

	$\varkappa_0'$	$\varkappa_0''$
Oberschenkel	11,22 cm	4,56 cm
Unterschenkel	9,41 cm	3,09 cm
Oberarm	7,87 cm	2,77 cm
Unterarm + Hand .	10,84 cm	2,73 cm

Hieraus berechnen sich nun mit Hilfe der Formel (226) die folgenden Werte des Trägheitsradius $\varkappa_0$ für die verschiedenen um je 5° in ihrer Neigung zur Längsachse voneinander abweichenden Schwerpunktsachsen:

Die Werte der Trägheitsradien $\varkappa_0$ für Achsen durch den Schwerpunkt, welche mit der Längsachse des Gliedes einen Winkel γ bilden (von 5° zu 5°) (in Zentimetern).

Größe des Winkels γ	Oberschenkel	Unterschenkel	Oberarm	Unterarm + Hand
0°	4,56	3,09	2,77	2,73
5°	4,65	3,19	2,84	2,88
10°	4,89	3,45	3,05	3,28
15°	5,28	3,85	3,36	3,85
20°	5,75	4,34	3,74	4,51
25°	6,29	4,86	4,17	5,21
30°	6,86	5,41	4,61	5,91
35°	7,44	5,96	5,05	6,61
40°	8,01	6,50	5,49	7,28
45°	8,56	7,00	5,90	7,90
50°	9,08	7,48	6,29	8,49
55°	9,56	7,91	6,64	9,02
60°	9,98	8,29	6,95	9,49
65°	10,35	8,63	7,23	9,89
70°	10,66	8,91	7,46	10,23
75°	10,90	9,12	7,64	10,49
80°	11,08	9,28	7,77	10,69
85°	11,18	9,38	7,84	10,80
90°	11,22	9,41	7,87	10,84

Diese Werte gelten für alle Achsen, welche mit der Längsachse den betreffenden spitzen Winkel γ bilden, gleichgültig in welcher Ebene durch die Längsachse sie liegen. Man hat daher schon eine klare Vorstellung von der Änderung des Trägheitsradius mit der Änderung der Achsenrichtung, wenn man sich die Länge von $\varkappa_0$ für

alle Achsen vergegenwärtigt, welche in einer durch die Längsachse des Gliedes hindurchgehenden Ebene liegen. Um sich diese Abhängigkeit des Trägheitsradius $\varkappa_0$ von dem Winkel γ noch besser veranschaulichen zu können, als es beim bloßen Betrachten der obigen Tabelle möglich ist, finden sich auf Tafel III für den speziellen Fall des Oberarms von einem Punkte aus, welcher den Schwerpunkt des Oberarms darstellen soll, alle in einer Ebene durch die Längsachse liegenden Achsen mit 5^0 Winkelabstand aufgezeichnet. Auf jeder dieser Achsen ist dann die aus der obigen Tabelle zu ersehende Länge des Trägheitsradius $\varkappa_0$ in natürlicher Größe vom Schwerpunkte aus nach beiden Seiten hin abgetragen. Gleichzeitig sind die Endpunkte aller dieser Strecken durch eine Kurve miteinander verbunden worden. Diese Kurve, welche die Form einer in den Nebenscheiteln eingedrückten Ellipse besitzt, gestattet ohne Mühe durch graphische Interpolation auch die Trägheitsradien für alle zwischenliegenden Achsen zu bestimmen.

Denkt man sich die Figur auf Tafel III um die als Längsachse des Oberarms bezeichnete Gerade herumgedreht, so erhält man eine Rotationsfläche, welche in anschaulicher Weise die Länge des Trägheitsradius für alle nur überhaupt möglichen Achsen durch den Schwerpunkt des Oberarms erkennen läßt. Man kann sich diese Rotationsfläche am besten mit dem Oberarm fest verbunden denken, wobei natürlich der Mittelpunkt derselben mit dem Schwerpunkte und die Rotationsachse der Fläche mit der Längsachse des Oberarms sich decken muß. Dann gibt jeder vom Schwerpunkte in irgend einer Richtung bis an die Fläche gezogene Radius vector durch seine Länge den Trägheitsradius für die Schwerpunktsachse an, welche mit dieser Richtung übereinstimmt.

Die entsprechenden Rotationsflächen, welche die Trägheitsradien für die Schwerpunktsachsen des Oberschenkels, Unterschenkels oder des Systems Unterarm + Hand veranschaulichen, besitzen im wesentlichen die gleiche Form; nur sind ihre Dimensionen entsprechend den verschiedenen Dimensionen dieser Körperteile etwas andere.

Berücksichtigt man die oben angegebene einfache Beziehung zwischen den Trägheitsradien $\varkappa_0'$ und $\varkappa_0''$ einerseits und der Länge l und Dicke d des Gliedes andererseits, so kann man nach (224) die zur Berechnung der übrigen Trägheitsradien führende Formel (226) auch in folgender Form schreiben.

$$(227) \qquad \varkappa_0 = \sqrt{0{,}09\, l^2 \sin^2\gamma + 0{,}12\, d^2 \cos^2\gamma},$$

woraus für das Trägheitsmoment selbst folgt

$$(228) \qquad m\varkappa_0^2 = \mu m_0 \sqrt{0{,}09\, l^2 \sin^2\gamma + 0{,}12\, d^2 \cos^2\gamma}.$$

Damit hat man zugleich die Trägheitsmomente für alle anderen

Achsen des Körperteiles, welche nicht durch den Schwerpunkt hindurchgehen, gewonnen; denn verläuft eine Achse im Abstande a vom Schwerpunkte eines Körpers, so erhält man das zugehörige Trägheitsmoment, wenn man das Trägheitsmoment für die zu dieser Achse parallele Schwerpunktsachse einfach um den Betrag ma^2 vermehrt. Auf diese Weise lassen sich also leicht die Trägheitsmomente eines Gliedes für alle Gelenkachsen, z. B. des Oberarms für alle Achsen des Schultergelenks, leicht ableiten. Berücksichtigt man, daß bei den größeren Extremitätenabschnitten die Längsachse durch die Mittelpunkte der das Glied begrenzenden Gelenke hindurchgeht, so erkennt man, daß das Trägheitsmoment für die Längsachse des Gliedes beim Übergang vom Schwerpunkte zu einem Gelenkmittelpunkte seinen Wert beibehält, während alle anderen Trägheitsmomente sich vergrößern, wenn man von einer Schwerpunktsachse zu der parallelen Gelenkachse übergeht. Da nun schon unter allen Schwerpunktsachsen die Längsachse, wie man aus der Tabelle auf Seite 212 und aus Tafel III erkennt, dadurch ausgezeichnet war, daß sie den kleinsten Trägheitsradius besitzt, so ist daher das Trägheitsmoment für die Längsachse eines Gliedes überhaupt das kleinste, welches das Glied besitzt. Daraus erklärt sich, daß die Beugemuskeln und Streckmuskeln, welche gleichzeitig ein Glied um seine Längsachse zu drehen suchen, ein verhältnismäßig geringes Drehungsmoment für die Längsachse besitzen, und daß die Muskeln, welche nur eine Drehung eines Gliedes um seine Längsachse bewirken, verhältnismäßig geringe Masse aufweisen.

16. Die Drehungsmomente der Muskeln.

a) *Definition der Drehungsmomente. Statisches Maß eines Muskels.*

Wenn ein Muskel sich kontrahiert oder auch nur bei passiver Dehnung rein elastisch gespannt ist, so wirkt er stets mindestens an zwei Stellen mit Kräften auf verschiedene Körperteile ein. Kann er sich ungehindert zwischen seinen beiden, gewöhnlich als Ansatz und Ursprung unterschiedenen Insertionsstellen ausspannen, so zieht er am Ansatz mit einer nach dem Ursprung gerichteten Kraft und gleichzeitig am Ursprung mit einer entgegengesetzt gleichen Kraft, die also die Richtung nach dem Ansatz hin besitzt. Nur durch die Berücksichtigung dieser beiden Kräfte läßt sich die Krafteinwirkung des Muskels auf die zwischen seinen Insertionsstellen liegenden Körperteile verstehen und voraussagen.

Häufig inseriert sich ein Muskel nicht nur an einem nahezu als Punkt auffaßbaren kleinen Flächenstück, sondern an einer verhältnismäßig ausgedehnten Fläche des Knochens. Läßt sich dann trotzdem eine Resultante aller von den einzelnen Muskelfasern ausgeübten Züge mit genügender Genauigkeit annehmen, so hat man an jedem der

beiden Knochen als Insertionspunkt den Ausgangspunkt dieser resultierenden Zugrichtung aufzufassen.

In vielen Fällen kommt es vor, daß ein Muskel durch Knochenvorsprünge an seinem geradlinigen Verlauf zwischen Ursprung und Ansatz gehindert wird. Findet dies nur an den beiden Knochen statt, welche die Insertionen tragen, während der Muskel an den etwa noch dazwischen liegenden Körperteilen nicht in seinem geradlinigen Verlaufe gestört wird, so braucht man nur als Insertionsstellen diejenigen zu betrachten, zwischen denen er sich geradlinig auszuspannen vermag, um das Problem seiner Wirkung auf den ersten Fall zurückzuführen. Befinden sich dagegen auch an den Zwischengliedern Knochenvorsprünge, über welche der Muskel sich hinweglegt, so kann man ihn für die Untersuchung seiner Kraftäußerung durch jeden dieser Vorsprünge in je zwei Muskeln getrennt annehmen, welche nur insofern sich nicht wie zwei verschiedene Muskeln verhalten, als sie stets zugleich gespannt sind und dabei immer genau gleiche Spannung aufweisen. Es läßt sich also auch in diesem im menschlichen Körper vielfach vorkommenden Falle das Muskelproblem auf den einfachen Fall zurückführen, daß ein Muskel sich zwischen seinen Insertionsstellen ungehindert auszuspannen vermag. Die allgemeine Untersuchung kann sich daher auf diesen Fall beschränken.

Jede der beiden sich bei der aktiven Kontraktion oder passiven Anspannung eines Muskels einstellenden entgegengesetzt gleichen Kräfte, die im folgenden als Ursprungskraft und Ansatzkraft unterschieden werden sollen, ist für den Körperteil, an welchem sie angreift, als äußere Kraft aufzufassen. Beide zusammen stellen jedoch für das ganze Gelenksystem ein Paar innerer Kräfte dar. Nach den ausführlichen Auseinandersetzungen in 5b) wirken nun zwei solche Kräfte auf jedes in ihrem unmittelbaren Wirkungsbereich liegende Glied mit einem Kräftepaar ein. Das Moment dieses Kräftepaars ist dabei als das auf diesen Körperteil ausgeübte Drehungsmoment aufzufassen, mit welchem der Muskel den betreffenden Körperteil um eine zu der Ebene des Kräftepaares senkrechte Achse in dem einen oder anderen Drehungssinne herum zu drehen bestrebt ist. Die primäre Einwirkung eines Muskels äußerst sich also in einem Bestreben, eine Reihe von Körperteilen in Drehung zu versetzen. Die Wirkung auf die diese Körperteile verbindenden Gelenke ist erst eine sekundäre Erscheinung. Wenn z. B. ein Muskel auf zwei durch ein Gelenk verbundene Körperteile mit Kräftepaaren von gleichem Moment und auch gleichem Drehungssinn einwirkt, ein Fall, der zwar nicht bei eingelenkigen, wohl aber bei mehrgelenkigen Muskeln eintreten kann, so sucht dieser Muskel primär keine Bewegung in dem Verbindungsgelenk hervorzurufen. Die unter Umständen trotzdem eintretende Gelenkbewegung ist dann nur eine Folge

des Einflusses, welchen die Bewegung eines Körperteiles infolge des Gelenkzusammenhanges im allgemeinen auf die Bewegung der übrigen Körperteile ausübt; sie ist also eine sekundäre Erscheinung, ebenso wie die in der Regel gleichzeitig auftretende Bewegung in Gelenken, über welche der Muskel gar nicht hinwegzieht (vgl. hierzu den späteren Abschnitt 18).

Handelt es sich nun um einen eingelenkigen Muskel, so kommen die Kräftepaare, deren Momente die Drehungsmomente des Muskels darstellen, auf folgende Weise zustande [vgl. hierzu 5bα) und Fig. 10 auf Seite 49]. Auf das Glied, welches den Ansatz des Muskels trägt, wirkt zunächst direkt die Ansatzkraft ein. Es übt aber auch die Ursprungskraft einen Einfluß aus, indem sie im Gelenk einen Druck auf das Ansatzglied verursacht, welcher gerade so groß ist, als ob die Ursprungskraft im Mittelpunkte des Gelenkes angriffe, wobei natürlich dieser Gelenkmittelpunkt als dem Ansatzglied angehörig aufzufassen ist. Diese im Ansatzpunkte und im Gelenkmittelpunkte angreifenden beiden Kräfte sind also entgegengesetzt gleich; sie bilden das auf das Ansatzglied einwirkende Kräftepaar. Am Ursprungsglied greift zunächst direkt die Ursprungskraft an; zu dieser kommt im Gelenkmittelpunkte, welcher jetzt als fester Punkt des Ursprungsgliedes aufzufassen ist, eine Druckkraft hinzu, die der Ansatzkraft an Größe und Richtung gleich, d. h. also der Ursprungskraft entgegengesetzt gleich ist. Beide Kräfte setzen wiederum das Kräftepaar zusammen, mit welchem der Muskel auf das Ursprungsglied einwirkt.

Das soeben geschilderte Zustandekommen der beiden Kräftepaare gilt für alle eingelenkigen Muskeln in gleicher Weise. Nur muß man, falls der Muskel sich von seinen anatomischen Insertionsstellen aus erst über Knochenvorsprünge hinweglegt, diejenigen Punkte der beiden durch das eine Gelenk verbundenen Körperteile als Insertionspunkte auffassen, zwischen denen der Muskel sich tatsächlich ungehindert über das Gelenk hinweg auszuspannen vermag. Es kommt dabei gar nicht in betracht, ob auf dieser Strecke alle Muskelfasern vorhanden sind oder nicht; es beeinträchtigt sogar die Gültigkeit der Schlüsse nicht im mindesten, wenn der Muskel sich nur mit einem Stück seiner Sehne geradlinig zwischen den beiden Körperteilen ausspannt, so wie es z. B. beim M. tibialis anterior der Fall ist. Weiterhin sind die beiden Kräftepaare auch ganz unabhängig von dem jeweiligen Bewegungszustande des Körpers; sie sind dieselben, wenn der Muskel sich aus der Ruhe kontrahiert, als wenn die beiden Körperteile im Moment der Kontraktion schon in beliebiger Bewegung begriffen sind. Dagegen ändern sie sich im allgemeinen mit veränderter Winkelstellung des Gelenks. Endlich sind die Kräftepaare auch von speziellen Voraussetzungen über die Beweglichkeit der Insertionsstellen und Gelenke ganz unabhängig.

Die Momente der beiden Kräftepaare sind an Größe gleich, ihr Drehungssinn ist dagegen bei einem eingelenkigen Muskel verschieden. Es sind daher die Drehungsmomente, welche ein eingelenkiger Muskel auf die beiden Insertionsglieder ausübt, stets entgegengesetzt gleich, so daß also ihre Summe den Wert Null besitzt.

Bei einem zweigelenkigen Muskel kommen die Kräftepaare, mit welchen er auf die beiden Körperteile einwirkt, an denen sich seine Insertionen befinden, in genau derselben Weise zustande wie bei einem eingelenkigen Muskel. Die eine Kraft des Paares ist immer die im Insertionspunkte selbst angreifende Muskelkraft; die andere wird durch den Druck dargestellt, welchen die im zweiten Insertionspunkte angreifende Muskelkraft an dem ihrem Angriffspunkte zugekehrten Gelenk des den ersten Insertionspunkt tragenden Körperteils verursacht. Vorausgesetzt ist dabei wieder zunächst, daß der Muskel sich zwischen zwei Stellen der beiden Körperteile, an denen er inseriert, ungehindert ausspannen kann, also nicht durch einen am mittleren Körperteil befindlichen Knochenvorsprung aus seinem geradlinigen Verlaufe abgelenkt wird. Auf den mittleren Körperteil wirkt unter diesen Umständen der Muskel mit einem Kräftepaar ein, welches auf folgende Weise entsteht. Sowohl die Ansatzkraft als auch die Ursprungskraft übt einen Druck auf das ihr zunächst liegende Gelenk des mittleren Körperteils aus, welcher ihr an Größe und Richtung gleich ist. Diese beiden Druckkräfte bilden das Kräftepaar, welches den mittleren Körperteil zu drehen sucht.

Die Momente der drei Kräftepaare stellen nun wieder die vom Muskel auf die drei in seinem Wirkungsbereich liegenden Körperteile ausgeübten Drehungsmomente dar. Von Drehungsmomenten, welche auf die beiden Gelenke ausgeübt werden, kann hier gar keine Rede mehr sein. Zwischen den drei auf die Körperteile ausgeübten Drehungsmomenten besteht eine sehr einfache Beziehung. Dieselben würden sich nämlich zusammen das Gleichgewicht halten, also keine Drehung mehr hervorbringen, wenn sie nicht auf drei verschiedene, sondern auf ein und denselben Körper einwirkten. Davon kann man sich leicht auf folgende Weise Rechenschaft geben. Die Drehungsmomente sind nach den obigen Auseinandersetzungen unabhängig davon, ob die Körperteile frei in den Gelenken beweglich sind oder nicht. Denkt man sich also die beiden Gelenke festgestellt, so werden die Drehungsmomente des Muskels hierdurch nicht geändert. Die drei Körperteile bilden aber dann einen einzigen starren Körper, auf welchen nunmehr die drei Drehungsmomente in derselben Weise einwirken wie auf die einzelnen Teile. Da nun aber, wie wohl ohne weiteres ersichtlich ist, der Muskel kein Drehungsbestreben mehr ausüben kann, wenn alle Gelenke, über die er hinwegzieht, festgestellt sind, so müssen auch bei Freiheit der Gelenke die drei Drehungs-

momente so bemessen sein, daß sie sich gegenseitig in ihrer Wirkung aufheben, wenn man sie zu einem resultierenden Drehungsmoment zusammensetzen wollte. Für einen eingelenkigen Muskel müssen daher insbesondere nach diesem Satze die beiden Drehungsmomente entgegengesetzt gleich sein, wie es in der Tat der Fall ist.

Bisher war angenommen worden, daß der zweigelenkige Muskel nicht durch den mittleren Körperteil aus seinem geradlinigen Verlauf zwischen den Insertionsstellen, bezüglich den diese vertretenden Stellen der beiden äußeren Körperteile, abgelenkt wird. Findet dagegen eine solche Ablenkung des Muskelzuges statt, so kann man für die Ableitung der drei Drehungsmomente den Muskel als eine Kombination von zwei eingelenkigen Muskeln auffassen. Der eine Muskel zieht nur über das eine Gelenk, der andere nur über das andere Gelenk hinweg, und beide besitzen immer die gleiche Spannung. Als Insertionen der beiden eingelenkigen Teilmuskeln sind dabei wiederum die Stellen aufzufassen, zwischen denen sie sich ungehindert vom mittleren Körperteil nach den beiden anderen ausspannen können. Jeder der beiden Teilmuskeln gibt natürlich zu zwei Drehungsmomenten Veranlassung, so daß der mittlere Körper der Einwirkung zweier Drehungsmomente unterliegt, deren Resultante das auf denselben ausgeübte Drehungsmoment darstellt. Zwischen dem letzteren und den auf die beiden anderen Körperteile ausgeübten Drehungsmomenten besteht nun wieder die obige Beziehung, daß sie sich gegenseitig in ihrer Wirkung vernichten würden, wenn sie auf einen einzigen starren Körper einwirkten. Das geht hier ohne weiteres aus dem Umstande hervor, daß die zu einem Teilmuskel gehörenden beiden Drehungsmomente entgegengesetzt gleich sind, so daß also alle vier eine verschwindende Resultante besitzen.

Die einfache Beziehung, welche in allen Fällen zwischen den drei Drehungsmomenten eines zweigelenkigen Muskels besteht, gibt ein einfaches Mittel an die Hand, ohne neue Messung am Präparat das dritte Drehungsmoment zu bestimmen, wenn die beiden anderen bekannt sind. Es ist verhältnismäßig leicht, das Drehungsmoment am Präparat direkt zu bestimmen, welches auf einen Körperteil ausgeübt wird, an dem der Muskel inseriert. Zu dem Zwecke braucht man nur in der zu untersuchenden Gelenkstellung die beiden anderen Körperteile, und damit das dieselben verbindende Gelenk, zu fixieren, und kann dann mit einer der für diesen Zweck ausgebildeten Methoden das Drehungsmoment messen, welches der Muskel unter den speziellen Bedingungen auf den Insertionskörperteil ausübt. Das letztere stimmt nämlich in diesem besonderen Falle mit dem überein, was man gewöhnlich als das Drehungsmoment bezeichnet, mit welchem der Muskel auf das allein frei gelassene Gelenk einwirkt. Hat man aber einmal die zu den beiden Insertionskörperteilen gehörenden Drehungs-

momente erst gewonnen, so kann man aus diesen dann ohne Mühe das Drehungsmoment des mittleren Körperteils ableiten, welches am Präparat direkt nicht so einfach zu bestimmen ist. Man braucht zu diesem Zwecke nur die beiden schon gewonnenen Drehungsmomente zu einem resultierenden Drehungsmoment zusammenzusetzen; von diesem unterscheidet sich das auf den mittleren Körperteil ausgeübte Drehungsmoment allein durch den Drehungssinn, der deshalb in das Gegenteil umzukehren ist.

Zu der direkten Messung der Drehungsmomente für die beiden Insertionskörperteile kann man verschiedene Wege einschlagen. Eine Methode besteht darin, daß man an geeigneten Gelenkpräparaten entweder die variablen Arme der Kräftepaare selbst oder die Längen mißt, von denen die Arme abhängen, und dann im letzteren Falle ihre Werte mittels Konstruktion oder Rechnung ableitet. Ein anderer Weg ist der, daß man durch eine genügende Anzahl von Messungen am Präparat die Verkürzungen bestimmt, welche der Muskel von einer extremen Gelenkstellung aus für verschiedene Drehungen um eine bestimmte Gelenkachse erleidet. Hat man auf diese Weise die Verkürzung als Funktion des Drehungswinkels gewonnen und diese Abhängigkeit etwa durch ein Diagramm dargestellt, so kann man aus letzterem dann leicht für jede Gelenkstellung die Größe des Drehungsmomentes in bezug auf die bestimmte Gelenkachse ableiten; denn das Drehungsmoment ist nach 5b) proportional dem Differentialquotienten der Verkürzung des Muskels nach dem Drehungswinkel, weil bei konstanter Spannung die Verkürzung ein Maß für die vom Muskel bei der Drehung geleistete Elementararbeit darstellt.

Handelt es sich endlich um einen Muskel, der über mehr als zwei Gelenke sich geradlinig ausspannt, so kann man nach demselben Prinzip wie bei den zweigelenkigen Muskeln die Kräftepaare konstruieren, mit denen derselbe auf die verschiedenen in seinem unmittelbaren Wirkungsbereich liegenden Körperteile einwirkt. Die Kräftepaare an den beiden Insertionskörperteilen setzen sich auch hier wieder zusammen aus der im Insertionspunkte, bezüglich dessen Stellvertreter, angreifenden Muskelkraft und einer entgegengesetzt gleichen Druckkraft in demjenigen Gelenke des Insertionskörperteiles, über welches der Muskel hinwegzieht. Auf einen mittleren Körperteil wirkt dagegen der Muskel in jedem der beiden Gelenke, die er überspannt, als Druck. Auch diese beiden Druckkräfte sind entgegengesetzt gleich; denn eine jede stimmt mit derjenigen der beiden Muskelkräfte überein, welche an dem Insertionskörperteil angreift, mit dem der mittlere Körperteil durch das betreffende Gelenk in unmittelbarer oder wenigstens mittelbarer Verbindung steht. So gibt also auch hier der Muskel zu einem Kräftepaar Veranlassung.

Wird ein mehrgelenkiger Muskel durch Knochenvorsprünge oder

andere Muskeln am geradlinigen Verlauf zwischen den beiden Insertionskörperteilen gehindert, so ist er wiederum gleichwertig mit einer Kette aufeinanderfolgender Muskeln, von denen jeder nur noch über eine geringere Anzahl von Muskeln geradlinig hinwegzieht.

Auch für einen beliebigen mehrgelenkigen Muskel gilt unter allen Umständen der Satz, daß die Drehungsmomente, mit denen er auf die einzelnen Körperteile einwirkt, sich zusammen das Gleichgewicht halten würden, wenn sie alle einen einzigen starren Körper beeinflußten. Denn stellt man alle Gelenke fest, über welche der Muskel hinwegzieht, so vermag derselbe dieses starre System natürlich nicht mehr in Drehung zu versetzen. Das aus den sämtlichen Drehungsmomenten zusammengesetzte resultierende Drehungsmoment muß also die Größe Null besitzen.

Läßt man nur ein Gelenk frei, während man alle anderen feststellt, so verhält sich der Muskel wie ein eingelenkiger. Die Drehungsmomente, mit denen er auf die beiden durch das beweglich gelassene Gelenk miteinander verbundenen starren Systeme von Körperteilen einwirkt, sind dann nach dem früheren entgegengesetzt gleich, d. h. sie besitzen gleiche Größe, aber entgegengesetzten Drehungssinn. Ein jedes derselben bildet dabei das resultierende Drehungsmoment für die sämtlichen Drehungsmomente, mit denen der Muskel auf die jetzt starr verbundenen Körperteile des betreffenden Systems einwirkt.

Mit Hilfe dieser Sätze lassen sich die zu den einzelnen Körperteilen gehörenden Drehungsmomente leicht unter Anwendung der Methoden zur Bestimmung der Drehungsmomente eines eingelenkigen Muskels gewinnen. Um dies verständlich zu machen, seien die aufeinanderfolgenden Körperteile, auf welche ein Muskel Drehungsmomente ausübt, von 1 bis n numeriert und jedem Drehungsmoment die betreffende Nummer als Index beigegeben. Dann läßt sich zunächst das Drehungsmoment D_1 leicht dadurch empirisch bestimmen, daß man alle Gelenke bis auf das eine, welches den ersten und zweiten Körperteil verbindet, feststellt. Läßt man dagegen nur das Gelenk zwischen dem zweiten und dritten Körperteil frei, so erhält man durch Messung ein Drehungsmoment, welches die Resultante der beiden Drehungsmomente D_1 und D_2 darstellt. Da D_1 schon vorher gewonnen ist, so kann man nunmehr auch D_2 selbst ableiten. Bei Fixation aller Gelenke mit Ausnahme desjenigen, welches den dritten und vierten Körperteil verbindet, erhält man weiterhin das resultierende Drehungsmoment von D_1, D_2 und D_3 und kann infolgedessen D_3 bestimmen. Fährt man in dieser Weise fort, so erhält man schließlich die sämtlichen Drehungsmomente $D_1, D_2, D_3 \cdots D_n$.

Durch die Ableitung der Drehungsmomente, mit denen ein Muskel auf die sämtlichen zwischen seinen Insertionsstellen liegenden Körperteile einwirkt, ist die bewegende Wirkung desselben noch nicht klar-

gestellt, wie man zuweilen angenommen hat. Die Bewegungen, welche ein Muskel bei isolierter Kontraktion und unter Ausschluß aller anderen Kräfte, wie z. B. der Schwere, an den Körperteilen und den sie verbindenden Gelenken hervorrufen würde, hängen nicht allein von den Drehungsmomenten des Muskels ab. Dieselben richten sich außerdem nach den Massen der Körperteile, nach der Massenverteilung innerhalb eines jeden, und vor allen Dingen nach der besonderen Art der Gelenkverbindungen; sie werden weiterhin in ganz bestimmter Weise durch die eintretenden Bewegungen der übrigen Körperteile und, falls die Kontraktion des Muskels nicht aus der Ruhe geschieht, durch den schon vorhandenen Bewegungszustand des ganzen Körpers beeinflußt. Die Abhängigkeit des Bewegungseffektes eines Muskels von allen diesen Faktoren findet ihren exakten Ausdruck in den Bewegungsgleichungen des Gelenksystems.

Die Kenntnis der Drehungsmomente stellt daher zwar einen notwendigen und wesentlichen Beitrag für die Beurteilung der Wirkungsweise eines Muskels dar, sie reicht aber allein nicht aus, um die infolge der Kontraktion des Muskels eintretenden Bewegungen verstehen und voraussagen zu können. Kommt dagegen trotz der durch Innervation hervorgerufenen Vergrößerung der Spannung eines Muskels keine Bewegung zustande, so daß derselbe anderen einwirkenden Muskelkräften, Schwerkräften u. a. das Gleichgewicht hält, so wird sein Einfluß auf die verschiedenen Körperteile durch die auf dieselben ausgeübten Drehungsmomente vollkommen charakterisiert. Demnach stellen die Drehungsmomente nur ein statisches Maß für die Wirkung eines Muskels dar.

b) *Die Ableitung der Drehungsmomente an speziellen Beispielen erläutert.*

Als Beispiel soll die Bestimmung der Drehungsmomente für drei Muskeln der unteren Extremität vorgenommen werden, bei denen die Drehungsmomente sich in charakteristischer Weise voneinander unterscheiden. Der erste Muskel sei der M. iliacus, welcher nur über das Hüftgelenk, der zweite der M. biceps femoris caput breve, welcher nur über das Kniegelenk, und der dritte Muskel der M. semimembranosus, welcher sowohl über das Hüftgelenk als auch über das Kniegelenk hinwegzieht. Die resultierenden Zugrichtungen dieser drei Muskeln liegen annähernd in Ebenen, welche auf der mittleren Achse des Kniegelenks senkrecht stehen. Daher werden auch die Ebenen der von diesen drei Muskeln auf die verschiedenen Körperteile ausgeübten Kräftepaare zu dieser Achse des Kniegelenks senkrecht stehen; die Muskeln suchen also die Körperteile um Achsen zu drehen, welche zur mittleren Knieachse parallel laufen.

Der erste Muskel wirkt nur auf Rumpf und Oberschenkel, der zweite auf Oberschenkel und Unterschenkel, der dritte dagegen auf

Rumpf, Oberschenkel und Unterschenkel mit Drehungsmomenten ein. Man kann daher für die Untersuchung dieser Muskeln den menschlichen Körper als ein dreigliedriges Gelenksystem auffassen, bei welchem das erste Glied durch den ganzen Körper mit Ausnahme des einen Beins, das zweite Glied durch den Oberschenkel und das dritte Glied durch das System Unterschenkel + Fuß dieses Beins dargestellt wird. Gleichzeitig kann man das Gelenksystem als ein ebenes auffassen, da hierbei im Hüftgelenk nur Drehungen um eine zu der mittleren Knieachse parallele Achse in Frage kommen.

α) Die Methode der Ableitung.

Das von einem Muskel auf einen Körperteil ausgeübte Drehungsmoment ändert sich im allgemeinen mit der Gelenkstellung der Körperteile zueinander, auch wenn die Spannung des Muskels konstant bleibt; denn das Drehungsmoment ist eine Funktion der Gelenkwinkel. Dabei ist nun grundsätzlich zu unterscheiden, ob der Muskel allein über das Hüftgelenk oder allein über das Kniegelenk, oder ob er über beide Gelenke hinwegzieht. Bei den Muskeln der beiden ersten Arten sind die Drehungsmomente nur mit der Gelenkstellung im Hüftgelenk bezüglich im Kniegelenk veränderlich; bei den Muskeln der letzten Art hängen dagegen die Drehungsmomente im allgemeinen sowohl von der Stellung des Hüftgelenks, als auch von der des Kniegelenks ab. Will man sich ein anschauliches Bild der Abhängigkeit der Drehungsmomente von den Gelenkstellungen verschaffen, so kann das in den beiden ersten Fällen durch Kurven, im letzten Falle dagegen in der Regel nur durch Flächen geschehen.

Die genannten Kurven gewinnt man auf die Art, daß man auf einer horizontalen geraden Linie von einem festen Punkte derselben aus Strecken abträgt, welche den von einer bestimmten Gelenkstellung aus gemessenen Gelenkwinkeln im Hüftgelenk, bezüglich Kniegelenk proportional sind; dann kann man hierdurch jede Stellung in dem Gelenk, von welchem allein die Drehungsmomente des betreffenden eingelenkigen Muskels beeinflußt werden, durch einen Punkt der Geraden darstellen. Denkt man darauf von jedem dieser Punkte aus senkrecht zu der Geraden eine Strecke nach oben oder unten gezogen, deren Länge dem auf einen Körperteil ausgeübten Drehungsmoment proportional ist, so hat man in der die Endpunkte aller dieser Strecken verbindenden Kurve ein klares Bild von der Änderung des Drehungsmomentes mit der Gelenkstellung, falls man nur in der Richtung, in welcher die Strecken abgetragen werden, auch dem Drehungssinne des auf den Körperteil ausgeübten Drehungsmomentes Rechnung trägt. In dieser Hinsicht empfiehlt es sich nach den früheren Festsetzungen über das Vorzeichen der Drehungsmomente, die Strecke nach oben zu ziehen, wenn der Muskel von einer bestimmten Seite aus gesehen den Körperteil im umgekehrten Sinne

des Uhrzeigers zu drehen sucht, dagegen nach unten für den Drehungssinn des Uhrzeigers. Eine auf diese Weise konstruierte Kurve soll kurz die zu dem Körperteil gehörende „Momentkurve" heißen.

Die Fläche, welche die Abhängigkeit des von einem zweigelenkigen Muskel auf einen Körperteil ausgeübten Drehungsmomentes von den Gelenkstellungen des zweigliedrigen Systems zur Darstellung bringt, gewinnt man folgendermaßen. In einer horizontalen Ebene denke man sich von einem festen Koordinatenanfangspunkte aus zwei zueinander rechtwinklige Koordinatenachsen eingezeichnet. Von dem Koordinatenanfangspunkte aus trage man auf der einen Achse Strecken, welche den Gelenkwinkeln des Hüftgelenks, und auf der anderen solche, welche den Gelenkwinkeln des Kniegelenks proportional sind, ab. Auf diese Weise ordnet man jeder durch bestimmte Werte der beiden Gelenkwinkel charakterisierten Haltung der unteren Extremität einen ganz bestimmten Punkt der horizontalen Ebene zu, nämlich den Punkt, dessen Koordinaten den beiden Gelenkwinkeln proportional sind. Denkt man darauf wiederum von jedem Punkte der Koordinatenebene aus entsprechend dem Drehungssinn nach oben oder unten senkrecht zu der Ebene eine Strecke gezogen, welche dem zu der betreffenden Haltung des Systems gehörenden Drehungsmoment proportional ist, so liegen die Endpunkte aller dieser Strecken in einer Fläche, welche ein anschauliches Bild der Abhängigkeit des auf einen Körperteil ausgeübten Drehungsmomentes von der Haltung der unteren Extremität gibt. Eine solche Fläche soll im folgenden kurz als die zu dem Körperteil gehörende „Momentfläche" bezeichnet sein.

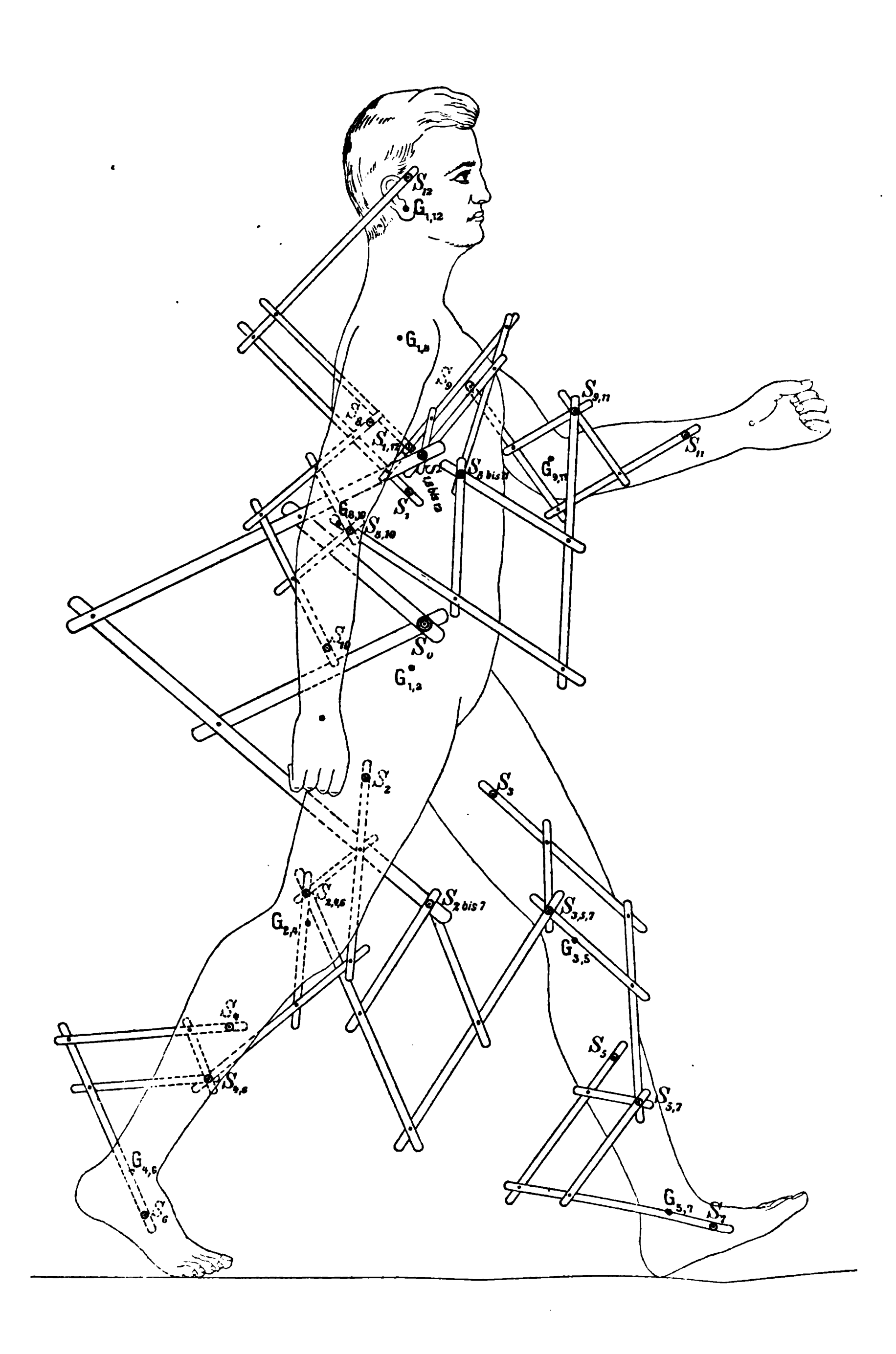
Bei der Konstruktion der Momentkurven und Momentflächen muß natürlich vorausgesetzt werden, daß die Spannung des Muskels auf die Einheit des physiologischen Querschnittes bezogen bei allen Stellungen des zweigliedrigen Systems die gleiche ist. Dann ist aber das Drehungsmoment proportional dem Produkt aus dem Arm des Kräftepaares, zu dem es gehört, und der Anzahl der Flächeneinheiten des physiologischen Querschnittes. Man kann daher dieses veränderliche Produkt direkt zur Darstellung der Momentkurven und Momentflächen verwenden. Nimmt man als Einheit des Drehungsmomentes 1 Zentimeterkilogramm und stellt dieselbe durch eine Länge von 1 Millimeter dar, so gibt die Anzahl der Millimeter einer jeden Ordinate dann die Anzahl der Zentimeterkilogramme des Drehungsmomentes für den Fall an, daß der Muskel auf die Einheit des physiologischen Querschnittes bezogen eine Spannung von 1 Kilogramm besitzt.

Während die durch einen Muskel hervorgerufenen Bewegungen sich ändern, wenn ein Gelenk festgestellt wird, oder sonst die mechanischen Verhältnisse, unter denen der Muskel zur Kontraktion gelangt, sich ändern, hängen die auf einen Körperteil in den verschiedenen Gelenkstellungen ausgeübten Drehungsmomente in keiner Weise von

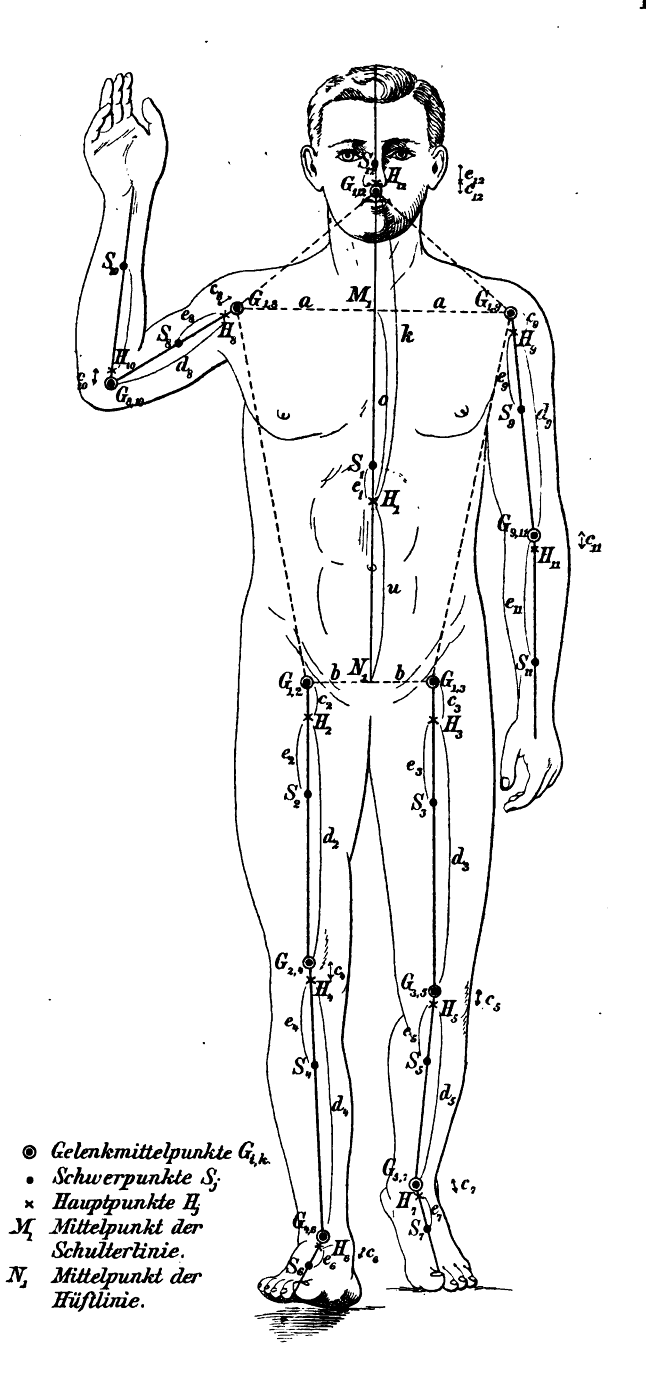
den besonderen Bedingungen für die Bewegung ab. Sie sind dieselben, wenn das Bein sich gegen das feststehende Becken bewegt, als wenn der Fuß auf dem Boden aufgesetzt ist, und das Bein unter Mitnahme des ganzen übrigen Körpers sich nur gegen den feststehenden Fuß bewegen kann. Man darf daher für die Ableitung des statischen Maßes der oben angeführten Muskeln das auf das Becken, bezüglich den Rumpf ausgeübte Drehungsmoment nicht unberücksichtigt lassen, trotzdem diese Muskeln einen nur geringen kinetischen Einfluß auf diesen Körperteil ausüben. Es kommen also im vorliegenden Falle drei Körperteile in Betracht, nämlich der Rumpf, der Oberschenkel und der Unterschenkel, auf welche von den in Frage stehenden Muskeln mit Drehungsmomenten eingewirkt werden kann. Die eingelenkigen Muskeln beeinflußen nur zwei von denselben, der zweigelenkige dagegen alle drei Körperteile. Die von einem der eingelenkigen Muskeln auf die beiden benachbarten Körperteile ausgeübten Drehungsmomente sind nach den früheren Auseinandersetzungen entgegengesetzt gleich; ihre Summe hat also den Wert Null. Desgleichen muß die Summe der drei Drehungsmomente, mit denen der zweigelenkige Muskel auf alle drei Körperteile einwirkt, verschwinden. Dies ist eine unmittelbare Folge der für den angegebenen Muskel nahezu erfüllten Voraussetzung, daß alle drei Kräftepaare in einer Ebene liegen; die letztere steht dabei auf der Richtung der mittleren Knieachse und der damit parallelen allein in Frage kommenden Hüftachse senkrecht. Würden die Kräftepaare, mit denen ein Muskel auf die drei Körperteile einwirkt, in verschiedene, zueinander geneigte Ebenen fallen, so würde nicht die algebraische, sondern die sogenannte geometrische Summe der drei Drehungsmomente den Wert Null ergeben.

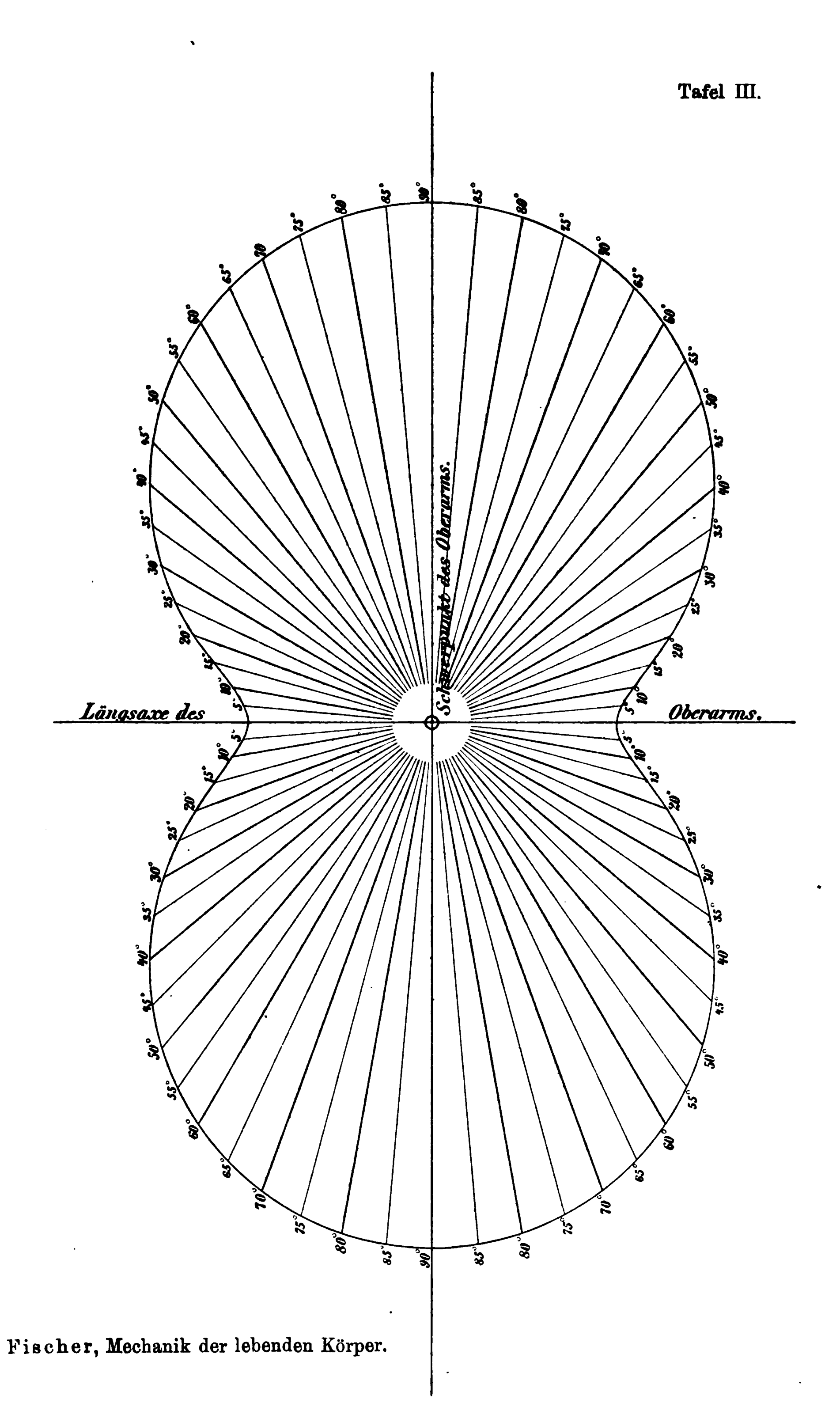
Man braucht daher für einen eingelenkigen Muskel nur ein Drehungsmoment, für einen zweigelenkigen Muskel dagegen nur zwei Drehungsmomente direkt zu messen, und kann dann das noch fehlende Drehungsmoment leicht ohne weitere Messung angeben.

Die Ableitung der Drehungsmomente am Präparat muß es bei der Messung der Arme der verschiedenen Kräftepaare und des Muskelquerschnittes bewenden lassen; denn der noch fehlende Spannungsfaktor ist ja von den Dimensionen und der Ansatzweise des Muskels ganz unabhängig. Nimmt man an, daß der Muskel pro Quadratzentimeter des physiologischen Querschnittes die Spannung von 1 Kilogramm besitzt, so hat man dann in dem Produkt aus der Anzahl der Zentimeter des Armes eines Kräftepaares und der Anzahl der Quadratzentimeter des physiologischen Querschnittes direkt die Maßzahl für das gesamte Drehungsmoment, gemessen in Zentimeterkilogramm. Bestimmt man in dieser Weise für alle Körperteile, auf welche ein Muskel mit Kräftepaaren einwirkt, die Drehungsmomente, so stellt

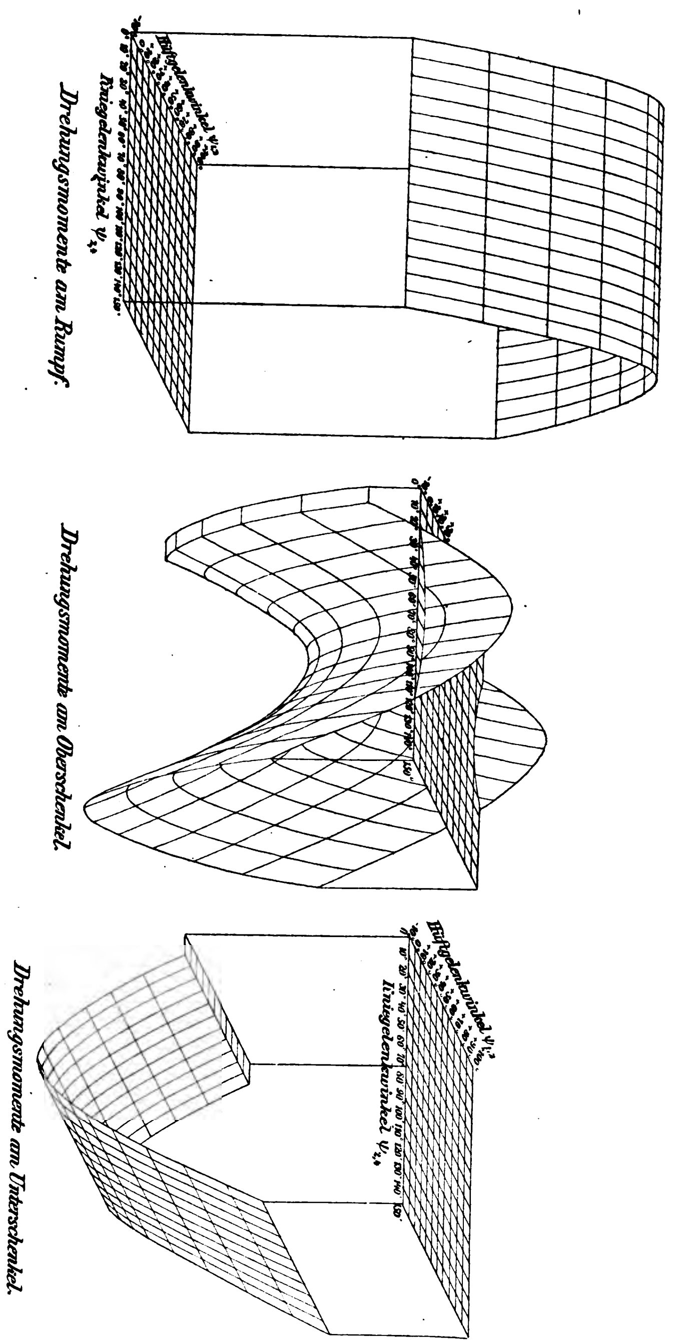


Fischer, Mechanik der lebenden Körper.


Gelenkmittelpunkte $G_{i,k}$.
Schwerpunkte S_j
Hauptpunkte H_j
M_1 Mittelpunkt der Schulterlinie.
N_1 Mittelpunkt der Hüftlinie.


Längsaxe des
Oberarms.
Schwerpunkt des Oberarms.

Tafel IV.



Fischer, Mechanik der lebenden Körper.

die Gesamtheit derselben das statische Maß des Muskels für den Fall dar, daß er pro Quadratzentimeter die Spannung von 1 Kilogramm besitzt. Hat man weiterhin diese Bestimmung für verschiedene Muskeln ausgeführt, so hat man damit die Möglichkeit gewonnen, die verschiedenen Muskeln in bezug auf ihre statische Wirkungsweise miteinander zu vergleichen.

Die Messung der Arme der einzelnen Kräftepaare läßt sich im vorliegenden Falle besonders einfach gestalten. Die Voraussetzung, daß die Achsen der von allen angeführten Muskeln verursachten Drehungsmomente zu der horizontal und frontal gerichteten Knieachse parallel laufen sollen, kommt im Grunde darauf hinaus, daß man von den Muskelkräften nur diejenigen Komponenten in Betracht zieht, welche einer zur Knieachse senkrechten Ebene, also z. B. der Medianebene des Körpers, parallel laufen. Diese Bedingung ist für die hier in Frage kommenden Muskeln mit großer Annäherung erfüllt. Um sich aber von etwaigen geringen Komponenten unabhängig zu machen, die zur Medianebene senkrecht, der Knieachse also parallel laufen, braucht man nur die ganze untere Extremität mit den Muskeln auf die Medianebene projiziert zu denken. Man kann dann in dieser zu den Gelenkachsen senkrechten Projektion noch die gleichen Bewegungen der einzelnen Körperteile gegeneinander ausführen, wie an der Extremität selbst, und bekommt auch den ganzen Einfluß der Muskeln auf die zur Medianebene des Körpers parallelen Bewegungen der Körperteile und Gelenke. Insbesondere wird man die Arme der Kräftepaare, deren Ebenen ja ebenfalls alle zur Medianebene parallel vorausgesetzt waren, in der Projektion in unverkürztem Maße erhalten. Es empfiehlt sich daher, die Messung derselben an einer solchen Projektion auf die Medianebene vorzunehmen; dies ist nicht nur bequemer als die Bestimmung an einem geeigneten Präparat, sondern führt auch zu ebenso genauen Resultaten.

Die Genauigkeit, welche bei derartigen Messungen an Präparaten erreicht werden kann, wird vielfach überschätzt. Man mag sich nur einmal alle die Fehlerquellen vergegenwärtigen, mit denen die Bestimmung des Abstandes des resultierenden Muskelzuges von einer Gelenkachse behaftet ist, und bei noch so großer Sorgfalt in der Anstellung der Versuche bis zu einem gewissen Grade behaftet bleiben muß.

Zunächst ist schon die Angabe der Insertionspunkte des resultierenden Muskelzuges nur annähernd zu machen. In Wirklichkeit hat man es ja stets mit mehr oder weniger ausgedehnten Insertionsflächen zu tun; die Bevorzugung je eines Punktes derselben, den man als Insertionspunkt des resultierenden Muskelzuges auffaßt, ist aber unter allen Umständen innerhalb gewisser Grenzen willkürlich. Meistens wird die Annahme einer Resultante sämtlicher von den verschiedenen

Muskelfasern ausgeübten Kräfte überhaupt nicht streng zutreffen. Aber selbst wenn in genügender Annäherung mit der Existenz einer Resultante gerechnet werden kann, so hat man doch durchaus kein exaktes Mittel, dieselbe aufzufinden; denn dies würde wiederum die genaue Kenntnis der Richtung der einzelnen Muskelfasern und ihrer Spannungen voraussetzen. Da es sehr wahrscheinlich ist, daß die verschiedenen einen Muskel bildenden Fasern durchaus nicht in gleicher Weise bei der Kontraktion gespannt sind, und daß ihr Spannungsverhältnis sich mit der Gelenkbewegung fortwährend ändert, so kann man nicht einmal in den Fällen, wo voraussichtlich eine Resultante existiert, mit Sicherheit von einer unveränderlichen Lage der zum resultierenden Muskelzug gehörenden Insertionspunkte reden.

Die bis zu gewissem Grade also willkürlich gewählten Insertionspunkte denkt man nun mit einem Faden verbunden, welcher sich in entsprechender Weise wie der Muskel entweder ungehindert oder über einzelne Knochenvorsprünge hinweg ausspannt und daher direkt als der resultierende Muskelzug aufgefaßt wird. Nach dem Abstande dieses Fadens von den Gelenken bemißt man die Arme der einwirkenden Kräftepaare. Hierin liegt natürlich in vielen Fällen eine neue Fehlerquelle; denn ein solcher Faden wird im allgemeinen nicht in gleicher Weise aus seinem geradlinigen Verlauf herausgedrängt, als es beim wirklichen Muskel infolge der Anlehnung an andere Muskeln und an Knochenvorsprünge, sowie der Verbindung mit Bindegewebsstreifen u. a. der Fall ist. Wollte man zur Vermeidung dieser Fehlerquelle den Muskel intakt lassen, aber nur eine mittlere Linie innerhalb desselben für die Messung verwenden, so würde wiederum die Bestimmung dieser mittleren Zugrichtung erschwert und mit neuen Fehlern behaftet sein. Man muß daher versuchen, bei der Messung des Abstandes des Muskelfadens von den Gelenkachsen dem Einfluß der Dicke des Muskels Rechnung zu tragen; zu absolut genauen Resultaten kann man aber selbstverständlich dabei nicht gelangen.

Dazu kommt nun noch, daß der Abstand der resultierenden Zugrichtung von der Gelenkachse oder dem Mittelpunkte eines Gelenks sich schon deshalb nicht genau messen läßt, weil in den meisten Fällen weder eine unveränderliche Achse noch auch ein unveränderlicher Mittelpunkt in einem organischen Gelenk existiert, sondern mit der Änderung der Gelenkstellung gewöhnlich auch eine geringe Änderung in der Lage der Drehungsachse oder des Drehpunktes einhergeht. Die genaue Kenntnis der Gelenkbewegung ist nur durch Versuche am Lebenden zu gewinnen, während die Messung der Drehungsmomente am Präparat vorgenommen werden muß. Die am Lebenden gewonnenen Resultate können aber infolge der individuellen Verschiedenheiten nicht ohne weiteres auf die Verhältnisse an dem zu untersuchenden Präparat übertragen werden.

Aus alledem geht wohl zur Genüge hervor, daß bei der Messung der Arme der einzelnen Kräftepaare nicht immer eine Genauigkeit bis auf einen Millimeter oder gar auf Bruchteile eines Millimeters erreicht werden kann. Daher sind auch die genaueren Verfahren, welche man zur Ermittlung der Drehungsmomente ausgebildet und angewendet hat, wie z. B. die Methode der Ableitung aus der Verkürzungskurve, zwar theoretisch interessant, die Genauigkeit der mit ihrer Hilfe gewonnenen Resultate steht aber in keinem Verhältnis zu der aufgewendeten Mühe. Die viel einfachere und bequemer auszuführende direkte Messung der Arme der Kräftepaare steht jener Methode jedenfalls an Genauigkeit nicht nach, besitzt aber dafür den Vorteil größerer Anschaulichkeit.

Gerade im vorliegenden Falle, wo man nach den obigen Auseinandersetzungen nur die Projektionen auf die Medianebene zu berücksichtigen braucht, läßt sich das Verfahren der direkten Messung ganz besonders einfach gestalten. Man braucht nur die den drei Körperteilen zugrunde liegenden Knochen, also das Becken, das Femur und die Tibia nebst Fibula mit den Insertionen der in Frage kommenden Muskeln in der Normalstellung einzeln auf einen starken, sehr wenig biegsamen, zur Medianebene parallel gestellten Karton zu projizieren, diese Projektionen auszuschneiden und miteinander nach Art des Hüft- und Kniegelenks drehbar zu verbinden, und kann dann die Messung der Drehungsmomente direkt an diesem ebenen Gelenkmodell vornehmen. Dabei läßt sich sehr wohl dem Umstande Rechnung tragen, daß die Achse des Kniegelenks während der Beugung nach hinten wandert und sich gleichzeitig etwas der Tibia nähert. Da in dieser Projektion die Insertionsflächen zum Teil bedeutend verkürzt erscheinen, so ist auch vielfach die Willkür in der Wahl der Insertionspunkte geringer, als wenn man die letztere am Präparat selbst vornimmt.

Vorausgesetzt ist bei dieser Methode natürlich, daß die Projektionen der einzelnen Knochen mit ihren Insertionen sehr genau ausgeführt worden sind. Dies ist aber nur eine Frage der Technik und läßt sich mit geeigneten Instrumenten bis zu jedem nur wünschenswerten Grade von Genauigkeit erreichen. Zum Zwecke der weiter unten mitgeteilten Messungen der Drehungsmomente ist folgendermaßen verfahren worden. Die Projektionstafel war auf einer horizontalen Tischplatte befestigt. Über dieser Tafel wurde der zu projizierende Knochen mittels geeigneter Stative und Klemmen in einer Lage fixiert, welche derselbe bei horizontal gestellter Medianebene des ganzen Körpers in seiner Normalstellung einnehmen würde. Ist die Projektionstafel genau horizontal orientiert, so kann man mit Hilfe eines einfachen Senkelfadens, welcher unten mit einem in eine feine Spitze auslaufenden Metallkegel beschwert ist, die Projektion der Umrisse des Knochens in der Weise ausführen, daß man den Faden dicht

an dem Knochen vorbeiführt. Noch einfacher ist es aber, hierzu ein schmales auf der einen Seite scharfkantiges Lineal zu verwenden, welches an einem auf der Projektionstafel verschiebbaren Metallfuß so befestigt ist, daß es bei allen Verschiebungen des Fußes immer senkrecht zu der Projektionstafel gestellt bleibt; dann ist es nicht einmal nötig, die letztere und die Medianebene des Kochens genau horizontal zu richten. Man hat nur dafür zu sorgen, daß beide parallel sind.

In der zuletzt beschriebenen Weise sind nun zunächst die Konturen der Knochen projiziert worden. Das verwendete Lineal lief unten in eine Spitze aus, welche genau in der Verlängerung der scharfen Kante des metallenen Lineals lag und durch eine besondere Vorrichtung gegen die Projektionstafel gedrückt werden konnte, so daß man die Projektion eines beliebigen Punktes des Knochenumrisses als feinen Stich auf derselben markieren konnte. Nachdem die Umrisse projiziert waren, ließen sich dann leicht auch die Begrenzungen der am Knochen besonders kenntlich gemachten Insertionsflächen in die Projektion einzeichnen.

β) Die Arme der Kräftepaare und die Werte der Drehungsmomente.

Da der M. iliacus allein über das Hüftgelenk hinwegzieht, so wirkt er, wie schon erwähnt, nur auf den Rumpf und den Oberschenkel direkt mit Kräftepaaren ein, während er auf den Unterschenkel kein Drehungsmoment ausübt. Die Arme der beiden Kräftepaare sind bei jeder Stellung des Hüftgelenks gleich groß, nämlich gleich dem kürzesten Abstande des resultierenden Muskelzuges vom Mittelpunkte des Hüftgelenks; der Drehungssinn ist aber bei dem einen entgegengesetzt wie bei dem anderen. Bezeichnet man im folgenden stets den Arm eines Kräftepaares und das zugehörige Drehungsmoment als positiv, wenn das betreffende Kräftepaar einen Körperteil von der rechten Seite aus gesehen im umgekehrten Sinne des Uhrzeigers zu drehen sucht, so kommt dem Arm und dem Drehungsmoment bei einem mit der Bewegung des Uhrzeigers übereinstimmenden Drehungssinne das negative Vorzeichen zu. In diesem Sinne kann man sagen, daß der M. iliacus auf den Rumpf stets mit einem negativen, auf den Oberschenkel dagegen mit einem positiven Drehungsmoment einwirkt.

Für die Bestimmung des Armes der beiden entgegengesetzt gleichen Kräftepaare des M. iliacus kommt nur dasjenige Stück des resultierenden Muskelzuges in Frage, welches sich ungehindert zwischen dem Becken und dem Oberschenkelknochen ausspannen kann. In der extremen Streckstellung des Femur gegen das Becken zieht der Muskel aber dicht vor dem Kopfe des Femur vorbei, so daß der Abstand des resultierenden Muskelzuges vom Mittelpunkte des Femurkopfes gleich

dem Radius des letzteren vermehrt um die Dicke der Muskelplatte ist. Hieraus ergibt sich nach Messungen an dem erwähnten Modell, welches die genaue Projektion des Beckens und der unteren Extremität auf die Medianebene darstellt, für den Arm der beiden Kräftepaare die Länge von 3,0 cm. Es ist wohl zu beachten, daß die Lage der Insertionsflächen des Muskels in der Fossa iliaca des Darmbeins einerseits und am Trochanter minor des Femur andererseits hier in keiner Weise für die Größe des Drehungsmomentes maßgebend sind. An Stelle der eigentlichen Insertionen, bezüglich der Mittelpunkte der Insertionsflächen, treten hier die beiden Stellen am Darmbein und am Femurkopf, zwischen denen der Muskel sich geradlinig ausspannen kann. Am Darmbein ist dies ungefähr die Spina iliaca anterior inferior, welche ja allerdings, ebenso wie die Spina iliaca anterior superior der Ursprungsfläche sowieso mit angehört, aber keineswegs deren Mittelpunkt bildet; am Femur ist es ein bestimmter Punkt der Oberfläche des Kopfes. Man kann eben aus der bloßen Kenntnis des Ursprungs und Ansatzes eines Muskels in sehr vielen Fällen durchaus noch keinen Schluß auf die Drehungsmomente ziehen.

Die Länge von 3,0 cm für den Arm der Kräftepaare gilt zunächst für die äußerste Streckstellung. Es läßt sich aber leicht nachweisen, daß die Verhältnisse, welche für die Größe des Armes maßgebend sind, sich nicht ändern, wenn man das Femur gegen das Becken um einen Winkel bis zu 80° aus der extremen Streckstellung heraus beugt. Daher besitzt auch in allen diesen Beugestellungen der Arm der Kräftepaare noch denselben Wert von 3,0 cm. Erst in der Nähe der rechtwinkligen Beugestellung hat der Ansatz des Muskels am Trochanter minor des Femur eine solche Stellung gegenüber dem Becken eingenommen, daß sich nun der Muskel vom Femurkopf abheben und dadurch der resultierende Muskelzug vom Gelenkmittelpunkte noch weiter entfernen kann.

Die Werte der sich hieraus ergebenden Arme der Kräftepaare, mit denen der M. iliacus bei der Gesamtspannung von 1 Kilogramm auf das Becken und das Femur einwirkt, finden sich in der folgenden Tabelle niedergelegt. Dabei sind in Übereinstimmung mit der Bezeichnungsweise auf Tafel II hier und in den späteren entsprechenden Tabellen die einzelnen Gelenkstellungen im Hüftgelenk durch den Winkel $\psi_{1,2}$ gekennzeichnet worden, um welchen die Längsache des Oberschenkels von ihrer Richtung in der Normalstellung[1]) abweicht. Die äußerste Streckstellung im Leben, bei der der Oberschenkel noch um ca. 10° von der Normalstellung nach hinten gedreht erscheint, ist durch $-10°$, die Beugestellungen sind dementsprechend durch

1) Vgl. Abhandlungen der math.-phys. Klasse der Königl. Sächs. Gesellsch. d. Wissenschaften, Bd. XV, Nr. VII, Seite 599.

positive Winkel bezeichnet worden. Da man nach Messungen der Brüder Weber[1]) im Leben unter normalen Verhältnissen den Oberschenkel gegen das Becken gewöhnlich nur bis zur rechtwinkligen Beugestellung erheben kann, so sind die Bestimmungen der Drehungsmomente nur bis zu der durch $\psi_{1,2} = 100^0$ charakterisierten Beugestellung ausgeführt worden. Ein auf den Rumpf ausgeübtes Drehungsmoment soll im folgenden entsprechend der für die Körperteile früher eingeführten Numerierung (vgl. Tafel II) immer mit D_{m_1} und der Arm des zugehörigen Kräftepaares mit h_1, ein auf den Oberschenkel ausgeübtes Drehungsmoment mit D_{m_2} und der Arm seines Kräftepaares mit h_2, und endlich ein auf den Unterschenkel ausgeübtes Drehungsmoment mit D_{m_4} und der Arm des zugehörigen Kräftepaares mit h_4 bezeichnet werden. Hiervon ist in der folgenden Tabelle Gebrauch gemacht:

Arme der Kräftepaare des M. iliacus, in Zentimeter:

Hüftgelenkwinkel $\psi_{1,2}$	-10^0	0^0	$+10^0$	$+20^0$	$+30^0$	$+40^0$	$+50^0$	$+60^0$	$+70^0$	$+80^0$	$+90^0$	$+100^0$
h_1	— 3,0	— 3,0	— 3,0	— 3,0	— 3,0	— 3,0	— 3,0	— 3,0	— 3,0	— 3,6	— 4,4	— 4,9
h_2	+ 3,0	+ 3,0	+ 3,0	+ 3,0	+ 3,0	+ 3,0	+ 3,0	+ 3,0	+ 3,0	+ 3,6	+ 4,4	+ 4,9

Die Stellung des Kniegelenks hat auf die Werte dieser Arme keinen Einfluß. Da der M. iliacus auf den Unterschenkel kein Drehungsmoment ausübt, so besitzt in diesem Falle der Arm h_4 für alle Gelenkstellungen den Wert Null.

Der M. iliacus besitzt nun einen physiologischen Querschnitt von abgerundet 8 qcm. Nimmt man an, daß die Spannung dieses Muskels pro Quadratzentimeter seines physiologischen Querschnittes, die man als die spezifische Spannung desselben bezeichnen kann, 1 Kilogramm beträgt, so ergeben sich die folgenden

Werte der Drehungsmomente D_{m_1} und D_{m_2}, mit denen der M. iliacus auf den Rumpf und den Oberschenkel bei 1 kg spezifischer Spannung in den verschiedenen Stellungen des Beins einwirkt, in Zentimeterkilogramm:

Hüftgelenkwinkel $\psi_{1,2}$	-10^0	0^0	$+10^0$	$+20^0$	$+30^0$	$+40^0$	$+50^0$	$+60^0$	$+70^0$	$+80^0$	$+90^0$	$+100^0$
D_{m_1}	— 24	— 24	— 24	— 24	— 24	— 24	— 24	— 24	— 24	— 29	— 35	— 39
D_{m_2}	+ 24	+ 24	+ 24	+ 24	+ 24	+ 24	+ 24	+ 24	+ 24	+ 29	+ 35	+ 39

Die Momentkurve, welche die Abhängigkeit des Drehungsmomentes D_{m_2} von dem Hüftgelenkwinkel erkennen läßt, ist durch Figur 27 in der Weise dargestellt worden, daß einem Winkel von je 10^0 die Länge von je 3 mm auf der horizontalen Abszissenlinie entspricht, und das Drehungsmoment von n Zentimeterkilogramm durch eine Ordinaten-

1) W. u. E. Weber, Mechanik der menschlichen Gehwerkzeuge. Göttingen 1836. § 63. Seite 147 oder Wilhelm Webers Werke, Bd. VI, S. 101.

länge von n Millimeter veranschaulicht ist. Die Momentkurve verläuft über der Abszissenlinie, weil der Muskel nur mit positiven Drehungsmomenten auf den Oberschenkel einwirkt. Die entsprechende Momentkurve, welche die Abhängigkeit des auf das Becken ausgeübten Drehungsmomentes D_{m_1} vom Hüftgelenkwinkel darstellt, würde unterhalb der Abszissenachse liegen und das Spiegelbild dieser Kurve in bezug auf die Abszissenachse bilden.

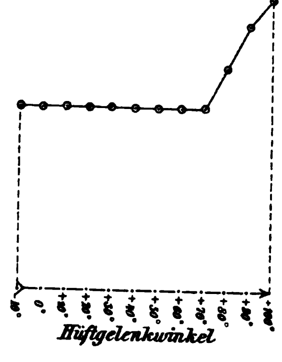


Fig. 27.

Da der M. biceps femoris caput breve nur eingelenkiger Muskel des Kniegelenks ist, so besitzt für ihn das Drehungsmoment D_1 unabhängig von der Stellung des Beins den Wert Null. Auf den Oberschenkel und Unterschenkel wirkt er dagegen mit entgegengesetzt gleichen Drehungsmomenten D_{m_2} und D_{m_4} ein, deren Werte abhängig sind von der Größe des Winkels $\psi_{2,4}$ im Kniegelenk, welchen die Längsachse des Unterschenkels mit der Verlängerung der Längsachse des Oberschenkels bildet.

Der Muskel vermag sich in den meisten Stellungen des Kniegelenks ungehindert zwischen seinen Insertionen am Labium laterale der Linea aspera femoris und am Capitulum fibulae auszuspannen. Nur in der Nähe der äußersten Streckstellung wird er durch den Epicondylus lateralis femoris am geradlinigen Verlauf gehindert. Die Arme h_2 und h_4 seiner beiden Kräftepaare sind daher im Anfang der Beugung gleich dem Abstande des hinteren Randes des lateralen Epicondylus von der Knieachse, vermehrt um die halbe Dicke der Sehne. Die Messung ergab 2,5 cm. Bei einer Beugestellung im Kniegelenk, welche dem Werte $\psi_{2,4} = 20^0$ entspricht, verläßt darauf der Muskel den Epicondylus und spannt sich nun geradlinig zwischen seinen Insertionsstellen aus. Dabei nimmt der Abstand seiner mittleren Zugrichtung von der Achse fortwährend zu, bis er nach der rechtwinkligen Beugestellung des Kniegelenks, bei $\psi_{2,4} = 100^0$, das Maximum von 5,8 cm erreicht hat. Bei dieser Stellung zeigt nämlich in der Projektion auf die Medianebene die Verbindungslinie des Drehpunktes des Kniegelenks mit dem Muskelansatz am Capitulum fibulae eine Richtung, welche auf der Richtung des resultierenden Muskelzuges senkrecht steht. Bei fortschreitender Beugung nähert sich dann der resultierende Muskelzug, oder vielmehr dessen Verlängerung über den Ansatz hinaus, wieder der Knieachse, so daß der Arm der Kräftepaare kleiner wird; er behält aber in der äußersten Beugestellung immer noch eine Größe, welche über die Anfangsgröße hinausgeht. Die sich aus dieser Messung ergebenden Werte der Arme sind die folgenden.

Arme der Kräftepaare des M. biceps femoris caput breve, in Zentimeter:

Kniegelenkwinkel $\psi_{2,4}$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°
h_2	+ 2,5	+ 2,5	+ 2,5	+ 2,9	+ 3,5	+ 4,2	+ 4,7	+ 5,1
h_4	− 2,5	− 2,5	− 2,5	− 2,9	− 3,5	− 4,2	− 4,7	− 5,1

Kniegelenkwinkel $\psi_{2,4}$	80°	90°	100°	110°	120°	130°	140°	150°
h_2	+ 5,5	+ 5,6	+ 5,8	+ 5,6	+ 5,2	+ 4,6	+ 4,1	+ 3,7
h_4	− 5,5	− 5,6	− 5,8	− 5,6	− 5,2	− 4,6	− 4,1	− 3,7

Da der physiologische Querschnitt des kurzen Bicepskopfes rund 6 qcm beträgt, so erhält man hieraus folgende

Werte der Drehungsmomente D_{m_2} und D_{m_4}, mit denen der M. biceps femoris caput breve auf den Oberschenkel und den Unterschenkel bei 1 kg spezifischer Spannung in den verschiedenen Stellungen des Beins einwirkt, in Zentimeterkilogramm:

Kniegelenkwinkel $\psi_{2,4}$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°
D_{m_2}	+ 15	+ 15	+ 15	+ 17	+ 21	+ 25	+ 28	+ 31
D_{m_4}	− 15	− 15	− 15	− 17	− 21	− 25	− 28	− 31

Kniegelenkwinkel $\psi_{2,4}$	80°	90°	100°	110°	120°	130°	140°	150°
D_{m_2}	+ 33	+ 34	+ 35	+ 34	+ 31	+ 28	+ 25	+ 22
D_{m_4}	− 33	− 34	− 35	− 34	− 31	− 28	− 25	− 22

In Figur 28 findet sich die zugehörige Momentkurve aufgezeichnet, welche die Abhängigkeit des auf den Oberschenkel ausgeübten Drehungsmomentes D_{m_2} vom Kniegelenkwinkel veranschaulicht. Die entsprechende Kurve für das Drehungsmoment D_{m_4} des Unterschenkels würde wieder einfach das Spiegelbild dieser in bezug auf die Abszissenachse sein.

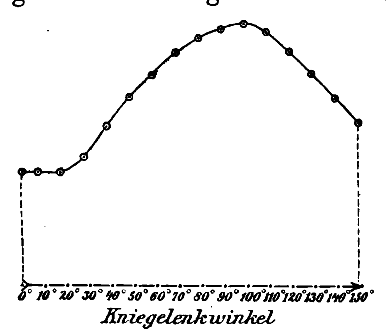


Fig. 28.

Vergleicht man die Momentkurve von Fig. 28 mit der von Fig. 27, so erkennt man zunächst, daß beide Muskeln den Oberschenkel in gleichem Sinne zu drehen suchen. Während aber das vom M. iliacus hervorgebrachte Drehungsmoment bei Änderung der Gelenkstellung im Hüftgelenk nahezu bis zur rechtwinkligen Beugestellung konstant bleibt und erst bei höheren Beugegraden beträchtlich an Wert zunimmt, vergrößert sich das vom kurzen Kopf des

M. biceps femoris auf den Oberschenkel ausgeübte Drehungsmoment schon bei geringeren Beugegraden im Kniegelenk. Das letztere erreicht aber schon kurz nach der rechtwinkligen Beugestellung des Knies seinen Maximalwert und nimmt dann bei höheren Beugegraden wieder ab.

Der dritte als Beispiel herangezogene Muskel, der M. semimembranosus, wirkt auf alle drei Körperteile mit nicht verschwindenden Drehungsmomenten ein. Dabei nehmen die Drehungsmomente im allgemeinen sowohl bei einer Änderung der Gelenkstellung im Hüftgelenk als auch bei einer solchen im Kniegelenk andere Werte an. Es ist daher im Prinzip nicht ausreichend, wenn man beispielsweise die Drehungsmomente bei allen möglichen Stellungen des Hüftgelenks ableitet, während man das Kniegelenk in einer bestimmten Stellung, etwa der äußersten Streckstellung, fixiert hat, sondern man muß dieselbe Messung für eine genügend große Anzahl von anderen Stellungen des Kniegelenks wiederholen. Greift man, wie bisher 16 um 10^0 voneinander abstehende Gelenkstellungen des Kniegelenks und 12 um je 10^0 verschiedene Stellungen des Hüftgelenks zur Messung heraus, so ist man also im Grunde genötigt, für 192 verschiedene Haltungen des ganzen Beins die drei Arme h_1, h_2 und h_4 zu bestimmen.

Es stellt sich nun aber bei genauerem Eingehen auf die Verhältnisse an der unteren Extremität heraus, daß diese umfangreiche Arbeit für den M. semimembranosus, sowie auch für eine ganze Reihe anderer über das Hüft- und Kniegelenk hinwegziehender Muskeln nicht nötig ist, sondern daß man in Anbetracht der überhaupt erreichbaren Genauigkeit schon mit 28 Messungen zum Ziele gelangt.

Fixiert man nämlich das Kniegelenk in einer bestimmten Stellung und führt das Hüftgelenk sukzessive in alle möglichen Stellungen über, so wird zwar im allgemeinen der Abstand der resultierenden Zugrichtung eines zweigelenkigen Muskels vom Hüftgelenk sich dabei ändern, dagegen wird gleichzeitig der Abstand von der Achse des Kniegelenks nur verhältnismäßig geringe Schwankungen erleiden. Dies läßt sich leicht einsehen. Wenn das Kniegelenk fixiert ist, so bilden die beiden Knochen des Unterschenkels mit dem Oberschenkelknochen ein starres System. Bewegt man nun das Becken im Hüftgelenk gegen den als fixiert angenommenen Oberschenkel, so wird im allgemeinen auch der am Becken befindliche Ursprung des zu untersuchenden zweigelenkigen Muskels seine Lage gegen dieses starre System verändern, während der im Unterschenkel liegende Ansatz in demselben fest bleibt. Es dreht sich daher der resultierende Muskelzug um den festen Ansatz. Da nun dieser Drehpunkt beim M. semimembranosus und den meisten anderen über das Hüft- und Kniegelenk hinwegziehenden Muskeln nahe an der Achse des Kniegelenks liegt, während er infolge der großen Länge des Oberschenkels vom

Mittelpunkte des Hüftgelenks verhältnismäßig weit entfernt ist, so wird bei den Bewegungen des Beckens im Hüftgelenk sich der Abstand der resultierenden Zugrichtung des Muskels vom Hüftgelenkmittelpunkte beträchtlich, dagegen sein Abstand von der Knieachse nur sehr wenig ändern können. So zeigt sich in der Tat, daß bei den Drehungen des Beckens der Abstand der resultierenden Zugrichtung des M. semimembranosus vom Hüftgelenk im ganzen um 25 mm, der vom Kniegelenk dagegen nur um ca. $^1/_2$ mm in seiner Größe schwankt. Bei anderen Muskeln sind zwar die Änderungen des Abstandes von der Knieachse etwas größer; sie liegen aber auch hier innerhalb der bei derartigen Messungen unvermeidlichen Fehlergrenzen. Beim M. rectus femoris ist dagegen sogar Konstanz dieses Abstandes vorhanden.

Da nun der Abstand des resultierenden Muskelzuges von der Knieachse den Arm h_4 des Kräftepaares darstellt, mit welchem der Muskel auf den Unterschenkel einwirkt, so hat man das Resultat, daß das vom M. semimembranosus auf den Unterschenkel ausgeübte Drehungsmoment D_{m_4} sich mit genügender Annäherung von der Stellung des Hüftgelenks unabhängig zeigt und nur eine Funktion des Kniegelenkwinkels $\psi_{2,4}$ ist.

Denkt man andererseits das Hüftgelenk festgestellt und nur das Kniegelenk beweglich, so zeigt sich, daß bei den Drehungen im Kniegelenk sich zwar der Abstand des resultierenden Muskelzuges von der Knieachse beträchtlich ändert, dagegen sein Abstand vom Hüftgelenkmittelpunkte nur geringen Schwankungen unterliegt. Da durch den Abstand vom Hüftgelenkmittelpunkte der Arm h_1 des Kräftepaares bestimmt wird, mit welchem der Muskel auf das Becken einwirkt, so ist also das am Becken ausgeübte Drehungsmoment D_{m_1} nahezu unabhängig von der Stellung des Kniegelenks und nur eine Funktion des Hüftgelenkwinkels $\psi_{1,2}$.

Dagegen ist das Drehungsmoment D_{m_2}, welches der M. semimembranosus am Oberschenkel hervorruft, im allgemeinen sowohl mit der Stellung im Hüftgelenk als auch mit der im Kniegelenk veränderlich; es stellen sich also der Arm h_2 des mittleren Kräftepaares und das Moment D_{m_2} desselben als Funktion beider Winkel dar. Es braucht nun aber weder h_2 noch D_{m_2} direkt gemessen zu werden. Zwischen den Armen der drei Kräftepaare eines zweigelenkigen Muskels besteht die Beziehung, daß ihre algebraische Summe Null ist, sofern man nur konsequent das Vorzeichen eines jeden Armes nach dem Drehungssinn des Kräftepaares bemißt. Auch die drei Drehungsmomente, mit denen der Muskel auf Becken, Oberschenkel und Unterschenkel einwirkt, müssen die algebraische Summe Null besitzen. Man hat also die Beziehungen

$$(226)\qquad \begin{aligned} h_1 + h_2 + h_4 &= 0 \\ D_{m_1} + D_{m_2} + D_{m_4} &= 0. \end{aligned}$$

Mit Hilfe derselben kann man den dritten Arm bzw. das dritte Drehungsmoment berechnen, sobald die beiden anderen bekannt sind.

Hieraus ergibt sich, daß man in der Tat mit 28 direkten Messungen ausreicht, um die Werte der drei Drehungsmomente des M. semimembranosus für alle um je 10^0 voneinander verschiedenen Werte der beiden Gelenkwinkel $\psi_{1,2}$ und $\psi_{2,4}$ abzuleiten. Die Messung hat zunächst folgendes ergeben.

Arme h_1 des M. semimembranosus für verschiedene Werte des Hüftgelenkwinkels, in Zentimeter:

Hüftgelenkwinkel $\psi_{1,2}$	-10^0	0^0	$+10^0$	$+20^0$	$+30^0$	$+40^0$	$+50^0$	$+60^0$	$+70^0$	$+80^0$	$+90^0$	$+100^0$
h_1	+ 3,1	+ 3,9	+ 4,6	+ 5,1	+ 5,5	+ 5,6	+ 5,5	+ 5,3	+ 5,0	+ 4,6	+ 4,1	+ 3,4

Diese Werte sind von der Stellung im Kniegelenk unabhängig und gelten daher für jeden beliebigen Wert von $\psi_{2,4}$.

Arme h_4 des M. semimembranosus für verschiedene Werte des Kniegelenkwinkels, in Zentimeter:

Kniegelenkwinkel $\psi_{2,4}$	0^0	10^0	20^0	30^0	40^0	50^0	60^0	70^0
h_4	— 2,5	— 2,5	— 3,0	— 3,3	— 3,6	— 3,9	— 4,1	— 4,1
Kniegelenkwinkel $\psi_{2,4}$	80^0	90^0	100^0	110^0	120^0	130^0	140^0	150^0
h_4	— 4,0	— 3,8	— 3,6	— 3,3	— 2,9	— 2,5	— 2,0	— 1,6

Diese Werte sind von der Stellung im Hüftgelenk unabhängig, sie gelten daher für jeden beliebigen Wert von $\psi_{1,2}$.

Vermöge der Beziehung (226) berechnen sich folgende Werte des Armes h_2.

Arme h_2 des M. semimembranosus für verschiedene Werte des Hüftgelenkwinkels $\varphi_{1,2}$ und des Kniegelenkwinkels $\psi_{2,4}$, in Zentimeter:

Kniegelenkwinkel $\psi_{2,4}$	Hüftgelenkwinkel $\psi_{1,2}$											
	-10^0	0^0	$+10^0$	$+20^0$	$+30^0$	$+40^0$	$+50^0$	$+60^0$	$+70^0$	$+80^0$	$+90^0$	$+100^0$
0^0	— 0,6	— 1,4	— 2,1	— 2,6	— 3,0	— 3,1	— 3,0	— 2,8	— 2,5	— 2,1	— 1,6	— 0,9
10^0	— 0,6	— 1,4	— 2,1	— 2,6	— 3,0	— 3,1	— 3,0	— 2,8	— 2,5	— 2,1	— 1,6	— 0,9
20^0	— 0,1	— 0,9	— 1,6	— 2,1	— 2,5	— 2,6	— 2,5	— 2,3	— 2,0	— 1,6	— 1,1	— 0,4
30^0	+ 0,2	— 0,6	— 1,3	— 1,8	— 2,2	— 2,3	— 2,2	— 2,0	— 1,7	— 1,3	— 0,8	— 0,1
40^0	+ 0,5	— 0,3	— 1,0	— 1,5	— 1,9	— 2,0	— 1,9	— 1,7	— 1,4	— 1,0	— 0,5	+ 0,2
50^0	+ 0,8	0	— 0,7	— 1,2	— 1,6	— 1,7	— 1,6	— 1,4	— 1,1	— 0,7	— 0,2	+ 0,5
60^0	+ 1,0	+ 0,2	— 0,5	— 1,0	— 1,4	— 1,5	— 1,4	— 1,2	— 0,9	— 0,5	0	+ 0.7
70^0	+ 1,0	+ 0,2	— 0,5	— 1,0	— 1,4	— 1,5	— 1,4	— 1,2	— 0,9	— 0,5	0	+ 0,7
80^0	+ 0,9	+ 0,1	— 0,6	— 1,1	— 1,5	— 1,6	— 1,5	— 1,3	— 1,0	— 0,6	— 0,1	+ 0,6
90^0	+ 0,7	— 0,1	— 0,8	— 1,3	— 1,7	— 1,8	— 1,7	— 1,5	— 1,2	— 0,8	— 0,3	+ 0,4
100^0	+ 0,5	— 0,3	— 1,0	— 1,5	— 1,9	— 2,0	— 1,9	— 1,7	— 1,4	— 1,0	— 0,5	+ 0,2
110^0	+ 0,2	— 0,6	— 1,3	— 1,8	— 2,2	— 2,3	— 2,2	— 2,0	— 1,7	— 1,3	— 0,8	— 0,1
120^0	— 0,2	— 1,0	— 1,7	— 2,2	— 2,6	— 2,7	— 2,6	— 2,4	— 2,1	— 1,7	— 1,2	— 0,5
130^0	— 0,6	— 1,4	— 2,1	— 2,6	— 3,0	— 3,1	— 3,0	— 2,8	— 2,5	— 2,1	— 1,6	— 0,9
140^0	— 1,1	— 1,9	— 2,6	— 3,1	— 3,5	— 3,6	— 3,5	— 3,3	— 3,0	— 2,6	— 2,1	— 1,4
150^0	— 1,5	— 2,3	— 3,0	— 3,5	— 3,9	— 4,0	— 3,9	— 3,7	— 3,4	— 3,0	— 2,5	— 1,8

Der physiologische Querschnitt des M. semimembranosus beträgt abgerundet 15 qcm. Man erhält daher die folgenden

Werte des Drehungsmomentes D_{m_1}, mit welchem der M. semimembranosus auf das Becken bei 1 kg spezifischer Spannung in den verschiedenen Stellungen des Hüftgelenks einwirkt, in Zentimeterkilogramm:

Hüftgelenkwinkel $\psi_{1,2}$	-10^0	0^0	$+10^0$	$+20^0$	$+30^0$	$+40^0$	$+50^0$	$+60^0$	$+70^0$	$+80^0$	$+90^0$	$+100^0$
D_{m_1}	+47	+59	+69	+77	+83	+84	+83	+80	+75	+69	+62	+51

Diese Werte gelten für jede beliebige Größe des Kniegelenkwinkels $\psi_{2,4}$.

Werte des Drehungsmomentes D_{m_2}, mit welchem der M. semimembranosus auf den Oberschenkel bei 1 kg spezifischer Spannung in den verschiedenen Stellungen des Beins einwirkt, in Zentimeterkilogramm:

Kniegelenkwinkel $\psi_{2,4}$	Hüftgelenkwinkel $\psi_{1,2}$											
	-10^0	0^0	$+10^0$	$+20^0$	$+30^0$	$+40^0$	$+50^0$	$+60^0$	$+70^0$	$+80^0$	$+90^0$	$+100^0$
0^0	−9	−21	−32	−39	−45	−47	−45	−42	−38	−32	−24	−14
10^0	−9	−21	−32	−39	−45	−47	−45	−42	−38	−32	−24	−14
20^0	−2	−14	−24	−32	−38	−39	−38	−35	−30	−24	−17	−6
30^0	+3	−9	−20	−27	−33	−35	−33	−30	−26	−20	−12	−2
40^0	+8	−5	−15	−23	−29	−30	−29	−26	−21	−15	−8	+3
50^0	+12	0	−11	−18	−24	−26	−24	−21	−17	−11	−3	+8
60^0	+15	+3	−8	−15	−21	−23	−21	−18	−14	−8	0	+11
70^0	+15	+3	−8	−15	−21	−23	−21	−18	−14	−8	0	+11
80^0	+14	+2	−9	−17	−23	−24	−23	−20	−15	−9	−2	+9
90^0	+11	−2	−12	−20	−26	−27	−26	−23	−18	−12	−5	+6
100^0	+8	−5	−15	−23	−29	−30	−29	−26	−21	−15	−8	+3
110^0	+3	−9	−20	−27	−33	−35	−33	−30	−26	−20	−12	−2
120^0	−3	−15	−26	−33	−39	−41	−39	−36	−32	−26	−18	−8
130^0	−9	−21	−32	−39	−45	−47	−45	−42	−38	−32	−24	−14
140^0	−17	−29	−39	−47	−53	−54	−53	−50	−45	−39	−32	−21
150^0	−23	−35	−45	−53	−59	−60	−59	−56	−51	−45	−38	−27

Werte des Drehungsmomentes D_{m_4}, mit welchem der M. semimembranosus auf den Unterschenkel bei 1 kg spezifischer Spannung in den verschiedenen Stellungen des Kniegelenks einwirkt, in Zentimeterkilogramm:

Kniegelenkwinkel $\psi_{2,4}$	0^0	10^0	20^0	30^0	40^0	50^0	60^0	70^0
D_{m_4}	−38	−38	−45	−50	−54	−59	−62	−62
Kniegelenkwinkel $\psi_{2,4}$	80^0	90^0	100^0	110^0	120^0	130^0	140^0	150^0
D_{m_4}	−60	−57	−54	−50	−44	−38	−30	−24

Diese Werte von D_{m_4} gelten für jede beliebige Größe des Hüftgelenkwinkels $\psi_{1,2}$.

Die Abhängigkeit der verschiedenen Drehungsmomente des M. semimembranosus von den Gelenkstellungen ist auf Tafel IV durch die entsprechenden Momentflächen veranschaulicht. Die Figuren bedeuten Schrägprojektionen. Das horizontal angenommene rechtwinklige Koordinatensystem, dessen Koordinaten den beiden Gelenkwinkeln $\psi_{1,2}$ und $\psi_{2,4}$ proportional sind, ist durch ein Koordinatennetz dargestellt. In demselben gehört zu jedem zur Untersuchung herausgegriffenen Werte des Hüftgelenkwinkels $\psi_{1,2}$ eine Gerade der einen Schar und zu jedem verwendeten Werte des Kniegelenkwinkels $\psi_{2,4}$ eine Gerade der anderen, zur ersten rechtwinkligen Schar des Koordinatennetzes. Daher entspricht jeder Haltung des Beins, für welche die drei Drehungsmomente bestimmt worden sind, ein Schnittpunkt zweier sich rechtwinklig durchkreuzenden Geraden des Netzes. Von jedem dieser 192 Kreuzungspunkte aus ist nun je nach dem Vorzeichen des Drehungsmomentes nach oben oder unten eine Strecke abgetragen, welche durch die Anzahl ihrer Millimeter direkt die Anzahl der Zentimeterkilogramm für das Drehungsmoment angibt, mit welchem der Muskel bei einer Spannung von 1 kg pro Quadratzentimeter seines physiologischen Querschnittes auf den betreffenden Körperteil in der dem Kreuzungspunkte des Netzes entsprechenden Haltung des Beins einwirkt.

Die Endpunkte aller dieser Strecken sind in ganz entsprechender Weise wie ihre Anfangspunkte durch Kurven verbunden, welche in ihrer Gesamtheit die Gestalt der Momentfläche deutlich erkennen lassen. Die so entstandenen beiden Scharen von Kurven bilden ein Koordinatennetz auf der Momentfläche; sie stehen in engem Zusammenhang zu den Scharen von Geraden des ebenen horizontalen Koordinatennetzes, indem die letzteren die Orthogonalprojektionen der ersteren darstellen. Die eine Schar von Kurven auf der Momentfläche gehört demnach zu den 12 verwendeten Werten des Hüftgelenkwinkels $\psi_{1,2}$, die andere Schar zu den 16 untersuchten Stellungen des Kniegelenks. Es kommt daher jeder Linie des Netzes auf der Momentfläche entweder ein bestimmter Wert von $\psi_{1,2}$ oder ein solcher von $\psi_{2,4}$ zu, den man leicht durch Vergleichung mit dem ebenen Koordinatennetz auffinden kann.

Die zum Drehungsmoment D_{m_1} gehörende Fläche (das Bild am weitesten links auf Tafel IV) liegt in ihrer ganzen Ausdehnung über dem ebenen Koordinatennetz; die Ordinaten ihrer Punkte sind daher ohne Ausnahme positiv. Dies stimmt damit überein, daß der M. semimembranosus den Rumpf, von der rechten Seite aus betrachtet, im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers zu drehen sucht. Gleichzeitig erkennt man in der Figur, daß die Schar von Kurven auf der Fläche,

welche zu verschiedenen Werten des Hüftgelenkwinkels gehören, aus lauter Geraden besteht, die zum ebenen Koordinatennetz parallel laufen. Dies entspricht der Tatsache, daß das zu einer bestimmten Stellung im Hüftgelenk gehörende Drehungsmoment D_{m_1} von der gleichzeitigen Stellung im Kniegelenk unabhängig ist. Aus der Gestalt der Fläche erkennt man auf den ersten Blick, daß das Drehungsmoment mit wachsendem Hüftgelenkwinkel zunächst an Größe stetig zunimmt, bis es bei $\psi_{1,2} = 40^0$ sein Maximum erreicht hat. Von da an nimmt es wieder ab und geht schließlich in der extremen Beugestellung des Hüftgelenks nahezu bis auf seinen Anfangswert zurück.

Die Momentfläche für das Drehungsmoment D_{m_4} (das Bild am weitesten rechts auf Tafel IV) liegt unterhalb des ebenen Koordinatennetzes, da der Muskel den Unterschenkel in allen Haltungen des Beins, von der rechten Seite aus gesehen, im Sinne des Uhrzeigers zu drehen sucht. Bei dieser Fläche besteht die andere Kurvenschar aus geraden, zum ebenen Koordinatennetz parallelen Linien, was damit übereinstimmt, daß das zu einer bestimmten Stellung des Kniegelenks gehörende Drehungsmoment D_{m_4} von der gleichzeitigen Stellung im Hüftgelenk unabhängig ist. Von der Streckstellung des Kniegelenks an nimmt das Drehungsmoment D_{m_4} zunächst an absoluter Größe zu, bis es bei einer Beugestellung im Kniegelenk zwischen 60^0 und 70^0 das Maximum derselben erreicht hat. Darauf nimmt die absolute Größe des Drehungsmomentes stetig ab und geht schließlich in der äußersten Beugestellung auf einen Wert herunter, welcher bedeutend kleiner ist als ihr Anfangswert.

Während die beiden zu den Drehungsmomenten D_{m_1} und D_{m_4} gehörenden Momentflächen verhältnismäßig einfache Form besitzen, indem sie Teile von allgemeinen Zylinderflächen darstellen, ist die Momentfläche des Drehungsmomentes D_{m_2} (das mittlere Bild auf Tafel IV) viel komplizierter gestaltet. Keine der beiden Kurvenscharen des Netzes auf der Fläche besteht aus geraden Linien. Dabei zeigen an jedem Punkte der Fläche die beiden durch ihn hindurchgehenden Kurven entgegengesetzte Krümmung. Die Kurven der einen Schar sind nach oben, die der anderen durchweg nach unten konkav. Infolgedessen läßt sich diese Momentfläche des M. semimembranosus mit einer Sattelfläche vergleichen. Wenn auch der größte Teil der Fläche unter dem ebenen Koordinatennetz liegt, so verläuft sie doch zum Teil auch über demselben. Es sucht daher der M. semimembranosus den Oberschenkel zwar in den meisten Stellungen des Beins, von der rechten Seite aus gesehen, im Sinne des Uhrzeigers zu drehen, in den extremsten Stellungen des Hüftgelenks und gleichzeitig mittleren Beugestellungen des Kniegelenks beeinflußt er den Oberschenkel dagegen auch im umgekehrten Drehungssinne. Dazwischen liegt eine Reihe von Haltungen des Beins, in denen der Muskel überhaupt kein

Drehungsbestreben für den Oberschenkel zeigt; diese Stellungen entsprechen den Punkten des ebenen Koordinatennetzes, in welchen die Fläche dasselbe durchdringt. Behält man eine bestimmte Stellung im Kniegelenk bei und geht aus der extremen Streckstellung des Hüftgelenks allmählich in die äußerste Beugestellung über, so nimmt die absolute Größe des Drehungsmoments D_{m_2} zunächst zu, bis sie ein Maximum erreicht hat, und geht dann wieder nahezu auf ihren Anfangswert zurück. Das Maximum entspricht dabei annähernd der mittleren Beugestellung des Hüftgelenks. Hält man dagegen das Hüftgelenk in irgend einer Stellung fest und geht von der äußersten Streckstellung des Kniegelenks allmählich zu der extremen Beugestellung desselben über, so nimmt dabei umgekehrt die absolute Größe des Drehungsmoments D_{m_2} erst ab bis zu einem Minimalwert und steigt dann wieder an, so daß sie zuletzt den Anfangswert beträchtlich überschritten hat. Das Minimum liegt auch hier etwa in der mittleren Beugestellung des Kniegelenks. Alles dies ist unmittelbar aus der Darstellung der zum Oberschenkel gehörenden Momentfläche auf Tafel IV zu erkennen.

Durch die Werte der Drehungsmomente und die zugehörigen Momentkurven bzw. Momentflächen ist nun für die drei als Beispiel herausgegriffenen Muskeln der unteren Extremitäten das statische Maß ihrer Wirkung festgestellt. In entsprechender Weise hat man die Drehungsmomente für alle Skelettmuskeln abzuleiten. Diese Untersuchung ist bisher nur noch auf eine Reihe anderer Muskeln des Beins[1]) und des Armes[2]) ausgedehnt worden.

Durch die Bestimmung des statischen Maßes für die Wirkung der verschiedenen Muskeln hat man nun nicht nur die Grundlage für eine Statik des menschlichen Körpers geschaffen, sondern man hat damit zugleich einen notwendigen Beitrag für die Untersuchung der bewegenden Wirkung der Muskeln gewonnen; denn die auf der rechten Seite der Bewegungsgleichungen stehenden Größen Q_φ (vgl. hierzu Seite 53) setzen sich aus den Drehungsmomenten aller auf das Gelenksystem einwirkenden Kräfte zusammen; sie enthalten also beim menschlichen Körper die Drehungsmomente der wirksamen Muskeln als einen wesentlichen Bestandteil.

17. Gleichgewichtsprobleme.

Durch die Kenntnis der Drehungsmomente, mit denen die Muskeln

1) Vgl. das statische und kinetische Maß für die Wirkung eines Muskels, erläutert an ein- und zweigelenkigen Muskeln des Oberschenkels. Abhandl. der math. phys. Klasse der Königl. Sächs. Ges. d. Wissensch. Bd. XXVII, Nr. V, 1902.

2) Vgl. die Rotationsmomente der Beugemuskeln am Ellbogengelenk des Menschen. Abhandl. der math. phys. Klasse der Königl. Sächs. Ges. d. Wissensch. Bd. XV, Nr. III, 1889.

und die Schwere auf die einzelnen Körperteile einwirken, wird man in den Stand gesetzt, eine ganze Reihe von Problemen aus der Statik des menschlichen Körpers zu lösen. Wenn der menschliche Körper, oder auch nur einzelne Teile desselben, in irgend einer Haltung gegen die Umgebung in Ruhe verharren, so sind es neben der Schwere und äußeren Reaktionskräften, welche an den Unterstützungsflächen hervorgerufen werden, in der Regel noch Muskelkräfte, welche zur Sicherung der Körperhaltung beitragen. Die Fälle, in denen keine Muskeln tätig zu sein brauchen, um eine Gleichgewichtsstellung des Körpers hervorzubringen, sind selten; sie beschränken sich im großen und ganzen auf die Arten des Liegens und Sitzens, bei denen alle Teile des Körpers entweder durch eine Unterlage oder durch andere Abschnitte des Körpers, eventuell unter Vermittlung von Gelenkbändern, genügend unterstützt und dadurch am Herabfallen gehindert sind. Im allgemeinen würde der menschliche Körper ohne Muskelaktionen seine jeweilige Haltung nicht beibehalten können; die einzelnen Teile desselben würden sich so lange senken, bis der Schwerpunkt eines jeden eine möglichst tiefe Stellung eingenommen hat. Um dies zu verhindern, müssen dann eben die Muskeln in der Weise aktiv eingreifen, daß sie durch die Kraft ihrer Kontraktion den Körperteilen die entgegengesetzte Bewegung zu erteilen suchen als die Schwere.

Damit nun trotz Einwirkung von Schwere und Muskeln keine Gelenkbewegung eintritt, so daß der ganze Körper in seiner Haltung verharrt und höchstens eine Translationsbewegung ausführen kann, ist notwendig und hinreichend, daß für jeden einzelnen Körperteil die geometrische Summe aller einwirkenden Drehungsmomente verschwindet. Dies ergibt sich einfach als Folge des allgemein gültigen Prinzips der virtuellen Verrückungen[1]), wenn man in Rücksicht zieht, welche Elementararbeiten nach 5) die an einem Gelenksystem angreifenden äußeren und inneren Kräfte bei den verschiedenen möglichen Verrückungen des Systems leisten.

a) *Allgemeine Gleichgewichtsbedingungen für das zweigliedrige ebene Gelenksystem.*

Als Beispiel sei ein zweigliedriges ebenes Gelenksystem in Betracht gezogen, bei welchem das erste Glied um eine im Raume feste Achse drehbar ist, und die beiden Glieder durch ein Scharniergelenk mit paralleler Achse verbunden sein sollen. Der nur im Ellbogengelenk gegliederte rechte Arm stellt ein derartiges System dar, falls man den Rumpf mit dem Schultergürtel fixiert annimmt und im Schultergelenk nur Drehungen um eine Achse zuläßt, welche der

1) Vgl. Beiträge zur Muskelstatik. I. Über das Gleichgewicht zwischen Schwere und Muskeln am zweigliedrigen System. Abhandl. der math. phys. Klasse der Königl. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. Bd. XXIII, Nr. IV, 1896.

Achse des Ellbogengelenks parallel läuft. Figur 29 stelle die Projektion des rechten Armes auf die zu den Gelenkachsen senkrechte Bewegungsebene dar. $G_{1,8}$ und $G_{8,10}$ bedeuten, wie auf Tafel II, die Mittelpunkte des rechten Schultergelenks und Ellbogengelenks, ferner ist S_8 der Schwerpunkt des Oberarms und S_{10} der Schwerpunkt des aus Unterarm und Hand zusammengesetzten starren Systems, und endlich sind H_8 und H_{10} die Hauptpunkte des Oberarms und des Systems Unterarm + Hand, welche allerdings in Wirklichkeit noch näher an $G_{1,8}$ und $G_{9,10}$ liegen, als es im Interesse der Deutlichkeit in Figur 29, ebenso wie auf Tafel II, gezeichnet ist.

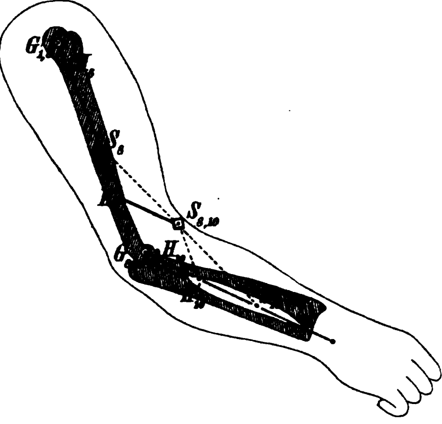


Fig. 29.

Bezeichnet man nun wieder mit m_0 die Masse des ganzen Körpers und mit m_8 und m_{10} die Massen der beiden Abschnitte des rechten Arms, ferner mit r_8 und c_8 die Abstände des Schwerpunktes S_8 und des Hauptpunktes H_8 vom Schultergelenkmittelpunkte $G_{1,8}$, desgleichen mit r_{10} und c_{10} die Abstände des Schwerpunktes S_{10} und des Hauptpunktes H_{10} vom Ellbogengelenkmittelpunkte $G_{8,10}$, und endlich mit l_8 die Entfernung des Ellbogengelenkmittelpunktes vom Schultergelenkmittelpunkte, so hat man aus der Definition der Hauptpunkte zunächst die Beziehungen

$$(227)\qquad \begin{aligned} m_0 c_8 &= m_8 r_8 + m_{10} l_8 \\ m_0 c_{10} &= m_{10} r_{10}. \end{aligned}$$

Vergrößert man die Hauptstrecken c_8 und c_{10} im Verhältnis $m_0 : (m_8 + m_{10})$, so gelangt man zu Punkten H_8' und H_{10}' auf den Längsachsen der beiden Glieder, welche als die Hauptpunkte des Oberarms und des Systems Unterarm + Hand aufzufassen sind, falls man den Arm ganz vom übrigen Körper losgelöst denkt. Dieselben sollen als partielle Hauptpunkte von den zum ganzen Körper gehörenden totalen Hauptpunkten H_8 und H_{10} unterschieden werden. Für die partiellen Hauptstrecken c_8' und c_{10}' gilt nach (227)

$$(228)\qquad \begin{aligned} (m_8 + m_{10}) c_8' &= m_8 r_8 + m_{10} l_8 \\ (m_8 + m_{10}) c_{10}' &= m_{10} r_{10}. \end{aligned}$$

Der Schwerpunkt $S_{8,10}$ des ganzen rechten Armes liegt daher nach den Eigenschaften der Hauptpunkte von H_8' um den Vektor c_{10}' entfernt.

Setzt man nun noch voraus, daß die feste Achse des Schultergelenks, um welche allein der Oberarm sich drehen kann, und die ihr parallele Achse des Ellbogengelenks horizontal verlaufen, so steht die Bewegungsgebene dieses ebenen zweigliedrigen Gelenksystems vertikal. Die Drehungsmomente, mit denen die Schwere auf die beiden Körperteile einwirkt, lassen sich unter diesen Umständen leicht ableiten.

Nach 14c) ruft die Schwere in diesem Falle am Oberarm ein Kräftepaar hervor, dessen eine Kraft in H_8' und dessen andere in $G_{1,8}$ angreift. Die erstere ist vertikal nach unten, die letztere vertikal nach oben gerichtet, und beide sind gleich dem Gewicht $G_8 + G_{10}$ des ganzen Armes, wobei unter G_8 das Gewicht des rechten Oberarms und unter G_{10} das Gewicht des Systems Unterarm + Hand zu verstehen ist. Auf das System Unterarm + Hand wirkt die Schwere mit einem Kräftepaar, dessen Kräfte ebenfalls durch das Gewicht des ganzen Armes gemessen werden. Die eine Kraft, welche vertikal nach unten gerichtet ist, greift in H_{10}', die andere, vertikal nach oben gerichtete, im Mittelpunkte $G_{8,10}$ des Ellbogengelenks an.

Die Arme der beiden Kräftepaare, welche in der beifolgenden Figur 30 angedeutet sind, stimmen mit den Projektionen der beiden Hauptstrecken c_8' und c_{10}' auf die Horizontale überein. Bezeichnet man mit φ_8 und φ_{10} die Winkel, welche die Längsachsen der beiden Abschnitte des Arms mit der nach unten gerichteten Vertikalen bilden, so hat also der eine Kraftarm die Länge $c_8' \sin\varphi_8$ und der andere die Länge $c_{10}' \sin\varphi_{10}$. Bezeichnet man mit D_{s_8} und $D_{s_{10}}$ die Drehungsmomente, mit denen die Schwere auf den Oberarm einerseits und das System Unterarm + Hand andererseits einwirkt, und beachtet, daß bei positiven Winkeln φ (wie in Fig. 30) die beiden Drehungsmomente eine Drehung im Sinne des Uhrzeigers, d. h. also im negativen Drehungssinne hervorzubringen suchen, so hat man für dieselben die Werte

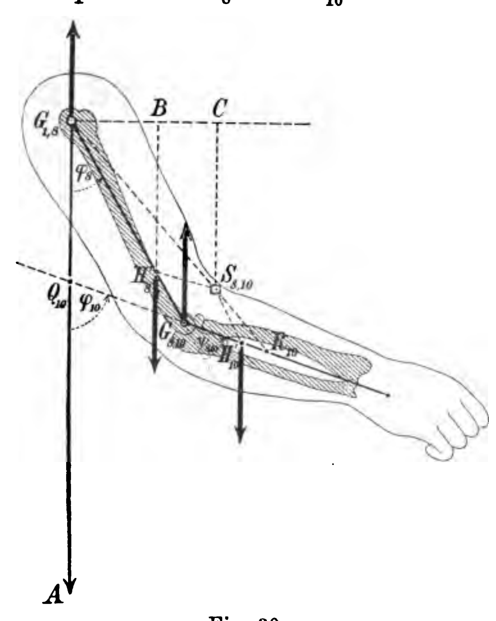


Fig. 30.

$$(229)\qquad \begin{aligned} D_{s_8} &= -(G_8 + G_{10})\, c_8' \sin\varphi_8 \\ D_{s_{10}} &= -(G_8 + G_{10})\, c_{10}' \sin\varphi_{10}. \end{aligned}$$

Für manche Fragen ist es von Interesse, zu wissen, mit welchem Drehungsmoment die Schwere unter den gemachten Voraussetzungen auf den ganzen Arm einwirkt. Um dies zu entscheiden, braucht man sich nur einen Moment die Beweglichkeit im Ellbogengelenk aufgehoben zu denken. Dann verhält sich der ganze Arm wie ein starrer Körper, und der Einfluß der Schwere kann durch eine Kraft dargestellt werden, welche im Gesamtschwerpunkte $S_{8,10}$ des Armes vertikal nach unten zieht und gleich dem Gewicht $(G_8 + G_{10})$ des Armes ist. In der festen Achse des Schultergelenks stellt sich dann eine entgegengesetzt gleiche Reaktionskomponente ein, welche mit ihr das wirksame Kräftepaar bildet. Das Drehungsmoment $D_{s_{8,10}}$ desselben ist nach Figur 30 infolge des Zusammenhanges der Hauptpunkte H_8' und H_{10}' mit dem Schwerpunkte $S_{8,10}$

(230) $$D_{s_{8,10}} = -(G_8 + G_{10})(c_8' \sin\varphi_8 + c_{10}' \sin\varphi_{10}).$$

Zu dem gleichen Resultat gelangt man auch, wenn man beachtet, daß nach den früheren Überlegungen das auf den ganzen Arm ausgeübte Drehungsmoment gleich der Summe der den beiden Abschnitten zukommenden Drehungsmomente sein muß.

An Stelle der Winkel φ_8 und φ_{10}, welche die Längsachsen des Oberarms und Unterarms mit der im Raume festen Vertikalen bilden, kann man in (229) auch die Gelenkwinkel einführen, welche wieder wie früher durch den Buchstaben ψ mit den beiden Indizes der durch das Gelenk verbundenen Körperteile bezeichnet werden sollen. Als Winkel $\psi_{1,8}$ ist dabei im vorliegenden Falle ohne weiteres der Winkel φ_8 zu verwenden; denn die Vertikale stellt bei Fixation des Rumpfes und Schultergürtels zugleich eine feste Gerade in diesen Körperteilen dar. Als Winkel $\psi_{8,10}$ des Ellbogengelenks wird man dagegen den Winkel zu nehmen haben, welchen die Längsachse des Unterarms mit der Verlängerung der Längsachse des Oberarms bildet. Wie man leicht aus Fig. 30 erkennt, steht derselbe mit den beiden Winkeln φ_8 und φ_{10} in enger Beziehung. Es ist nämlich

(231) $$\psi_{8,10} = \varphi_{10} - \varphi_8.$$

Demnach lassen sich die Drehungsmomente D_{s_8}, $D_{s_{10}}$ und $D_{s_{8,10}}$ auch in der Form schreiben:

(232) $$\begin{aligned} D_{s_8} &= -(G_8 + G_{10})\, c_8' \sin\psi_{1,8} \\ D_{s_{10}} &= -(G_8 + G_{10})\, c_{10}' \sin(\psi_{1,8} + \psi_{8,10}) \\ D_{s_{8,10}} &= -(G_8 + G_{10})\, [c_8' \sin\psi_{1,8} + c_{10}' \sin(\psi_{1,8} + \psi_{8,10})]. \end{aligned}$$

Bei einem der Untersuchung unterworfenen Arm hatte sich herausgestellt, daß der Oberarm 1,908 kg und der Unterarm zusammen mit der Hand 1,775 kg, der ganze Arm also 3,683 kg wog. Die Länge l_8 des Oberarms betrug 30,3 cm, die Entfernung r_8 des Ober-

armschwerpunktes vom Mittelpunkte des Schultergelenks 13,6 cm und die Entfernung r_{10} des Schwerpunktes des Systems Unterarm + Hand vom Mittelpunkte des Ellbogengelenks 19,0 cm. Nach (228) ergaben sich deshalb für die beiden Hauptstrecken die Werte

$$(233)\qquad \begin{aligned} c_8' &= 21{,}65 \text{ cm} \\ c_{10}' &= 9{,}16 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Man hat daher im vorliegenden Falle für die Drehungsmomente der Schwere nach (229) und (231) die Werte

$$(234)\qquad \begin{aligned} D_{s_8} &= -79{,}737 \sin \varphi_8 \text{ cmkg} = -79{,}737 \sin \psi_{1,8} \text{ cmkg} \\ D_{s_{10}} &= -33{,}736 \sin \varphi_{10} \text{ cmkg} = -33{,}736 \sin (\psi_{1,8} + \psi_{8,10}) \text{ cmkg} \\ D_{s_{8,10}} &= -\ 3{,}683\,[21{,}65 \sin \varphi_8 + 9{,}16 \sin \varphi_{10}] \text{ cmkg} \\ &= -\ 3{,}683\,[21{,}65 \sin \psi_{1,8} + 9{,}16 \sin (\psi_{1,8} + \psi_{8,10})] \text{ cmkg.} \end{aligned}$$

Es soll nun für verschiedene Arten von Muskeln des Armes untersucht werden, ob und in welchen Stellungen des Armes sie imstande sind, der Schwere das Gleichgewicht zu halten, und wie stark sie im gegebenen Falle zu diesem Zwecke gespannt sein müssen. Bezeichnet man allgemein mit D_{m_8} und $D_{m_{10}}$ die Drehungsmomente, mit welchen eine Muskel auf den Oberarm und das System Unterarm + Hand einwirkt, so lauten die Bedingungen des Gleichgewichts

$$(235)\qquad \begin{aligned} D_{m_8} + D_{s_8} &= 0 \\ D_{m_{10}} + D_{s_{10}} &= 0. \end{aligned}$$

Bezeichnet man weiterhin mit $D_{m_{8,10}}$ das Drehungsmoment, mit welchem der Muskel auf den ganzen Arm einwirken würde, falls das Ellbogengelenk festgestellt wäre, so kann man noch die Bedingungsgleichung anschreiben:

$$(236)\qquad D_{m_{8,10}} + D_{s_{8,10}} = 0.$$

Man erkennt jedoch leicht, daß dieselbe nur eine Folge von (235) ist, wenn man beachtet, daß sowohl $D_{s_{8,10}}$ gleich der Summe von D_{s_8} und $D_{s_{10}}$ als auch $D_{m_{8,10}}$ gleich der Summe von D_{m_8} und $D_{m_{10}}$ ist.

b) Gleichgewicht zwischen Schwere und Muskeln, welche nur das Zwischengelenk überspannen.

α) Gleichgewicht am Arm.

Ein nur zwischen Oberarm und Unterarm sich erstreckender eingelenkiger Muskel wirkt nach dem früheren auf die beiden Abschnitte des Armes mit entgegengesetzt gleichen Drehungsmomenten ein. Soll er der Schwere das Gleichgewicht halten, so kann das nach (235) nur in solchen Stellungen des Armes geschehen, in denen auch die beiden Drehungsmomente D_{s_8} und $D_{s_{10}}$ der Schwere einander entgegengesetzt gleich sind. Das letztere tritt aber nur dann ein (vgl. Fig. 30), wenn

der Schwerpunkt $S_{8,10}$ des Armes mit dem Mittelpunkte $G_{1,8}$ des Schultergelenks in einer Vertikalen liegt. Zu dem gleichen Resultat gelangt man auch, wenn man in Betracht zieht, daß ein nur über das Ellbogengelenk hinwegziehender Muskel kein Drehungsmoment auf den ganzen Arm auszuüben imstande ist, sobald das Ellbogengelenk festgestellt wird. Es muß daher $D_{m_{8,10}}$ und infolgedessen nach (236) auch $D_{s_{8,10}}$ den Wert Null besitzen. Das letztere kann aber nur stattfinden, wenn der Schwerpunkt des Armes mit dem Schultergelenkmittelpunkte in einer Vertikalen liegt. Die Bedingung hierfür lautet nach der letzten Gleichung von (232)

(237) $$c_8' \sin \psi_{1,8} + c_{10}' \sin(\psi_{1,8} + \psi_{8,10}) = 0.$$

Nach den Werten, welche in dem der Untersuchung zugrunde gelegten Beispiel die beiden Hauptstrecken c_8' und c_{10}' besitzen (vgl. (233)), muß daher zwischen den beiden Gelenkwinkeln im Schulter- und Ellbogengelenk die bestimmte Beziehung bestehen

(238) $$\sin(\psi_{1,8} + \psi_{8,10}) = -0{,}423 \sin \psi_{1,8}.$$

Die Rechnung ergibt zu jedem Werte des Ellbogenwinkels $\psi_{8,10}$, welcher nur positiv sein kann, stets zwei Werte des Schulterwinkels $\psi_{1,8}$, von denen der eine positiv, der andere dagegen negativ ist. Der erstere ist dabei immer größer als 90°, der letztere dagegen absolut genommen kleiner als 90°. Man erhält nämlich (bis auf ganze, bzw. halbe Grade abgerundet) als zusammengehörende Werte der beiden Winkel entweder:

$\psi_{8,10}$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°	130°
$\psi_{1,8}$	0°	−3°	−6°	−9°	−12°	−14½°	−17°	−19°	−21°	−23°	−24°	−25°	−25°	−24°

oder:

$\psi_{8,10}$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°
$\psi_{1,8}$	+180°	+177°	+174°	+171°	+168°	+165½°	+163°

$\psi_{8,10}$	70°	80°	90°	100°	110°	120°	130°
$\psi_{1,8}$	+161°	+159°	+157°	+156°	+155°	+155°	+156°

Alle Haltungen des Armes, welche diesen Wertepaaren entsprechen, genügen der Bedingung, daß der Gesamtschwerpunkt des Armes mit dem Schultergelenkmittelpunkte in einer Vertikalen liegt.

Aus den Werten der ersten Reihe ergibt sich nach (232) für das auf den Oberarm von seiten der Schwere ausgeübte Drehungsmoment D_{s_8} ein positiver Wert, aus den Werten der zweiten Reihe ein negativer Wert. Nach (235) muß daher der eingelenkige Muskel, welcher der Schwere das Gleichgewicht hält, im ersten Falle mit

negativem, dagegen im zweiten mit positivem Drehungsmoment D_{m_8} auf den Oberarm einwirken. Es kann sich daher im ersten Falle nur um einen **Beugemuskel**, dagegen im zweiten nur um einen **Streckmuskel** des Ellbogengelenks handeln.

In Figur 31 ist eine Reihe von Haltungen der ersten Art ineinander gezeichnet. Man erkennt ohne weiteres, daß bei diesen Haltungen der Schwerpunkt vertikal **unter** dem Schultergelenkmittelpunkte liegt. In diese Haltungen wird also der Arm unter dem gleichzeitigen Einfluß von Schwere und Muskeln sukzessive über-

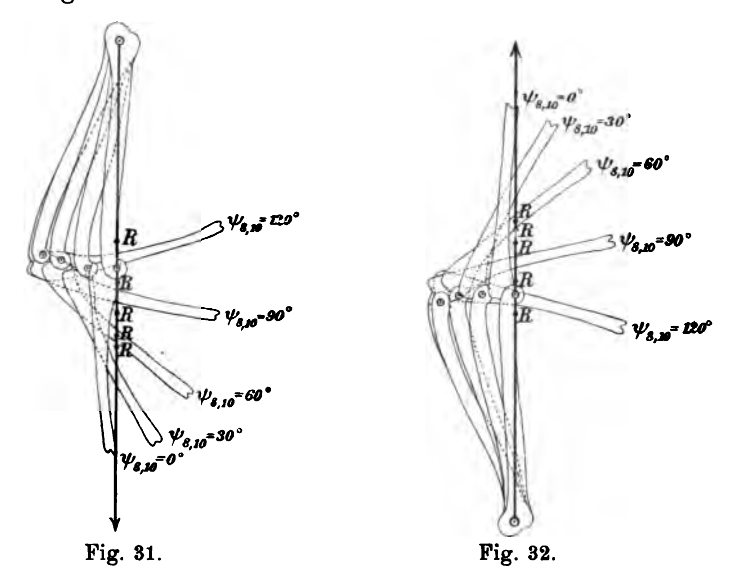


Fig. 31. Fig. 32.

geführt werden, wenn man von der äußersten Streckstellung aus irgend einen eingelenkigen Beugemuskel des Ellbogengelenks sich so langsam kontrahieren läßt, daß es zu keinen merklichen Winkelgeschwindigkeiten in den Gelenken kommt.

In Figur 32 findet sich weiterhin (von innen gesehen) eine Reihe von Haltungen der **zweiten** Art dargestellt; bei allen diesen liegt der Schwerpunkt vertikal **über** dem Mittelpunkte des Schultergelenks. Denkt man den Arm in die äußerste Beugestellung gebracht und so erhoben, daß dabei sein Schwerpunkt vertikal über dem Schultergelenkmittelpunkte liegt, dann kann man bei langsamer Kontraktion eines eingelenkigen Streckmuskels des Ellbogengelenks, also der eingelenkigen Köpfe des M. triceps brachii, den Arm sukzessive in die Haltungen von Fig. 32 überführen.

Es kommt also für das Gleichgewicht entweder ein eingelenkiger Beugemuskel oder ein eingelenkiger Streckmuskel in Frage, je nachdem der Schwerpunkt des Armes vertikal unter oder vertikal über

dem Schultergelenkmittelpunkte liegt. Vereinigen sich mehrere allein über das Ellbogengelenk hinwegziehenden Muskeln, um der Schwere am Arm das Gleichgewicht zu halten, so können zwar gleichzeitig Beuge- und Streckmuskel in Kontraktion sein. In dem ersten Falle muß aber dann das resultierende Drehungsmoment der Beuger das der Strecker überwiegen, und zwar gerade um den sich aus (235) und (232) ergebenden Wert von D_{m_8}. Im letzten Falle muß es umgekehrt sein.

Die Stellungen des Armes, in denen allein ein zwischen Oberarm und Unterarm ausgespannter Muskel der Schwere das Gleichgewicht zu halten vermag, lassen sich nun noch in einer sehr anschaulichen Weise definieren, wodurch man in den Stand gesetzt wird, bequemer und auch genauer, als es unter Zuhilfenahme des Gesamtschwerpunktes des Armes möglich ist, dieselben am lebenden Menschen zu ermitteln.

Denkt man nämlich den Schultergelenkmittelpunkt $G_{1,8}$ mit dem Schwerpunkte $S_{8,10}$ des Armes verbunden und diese Verbindungslinie bis zum Schnittpunkte R_{10} mit der Unterarmlängsachse verlängert (vgl. Fig. 33), so läßt sich nachweisen, daß man für jede beliebige Beugestellung des Ellbogengelenks auf diese Weise immer zu demselben Punkte R_{10} gelangt. Derselbe stellt einen im Unterarm festen Punkt dar, dessen Lage im engsten Zusammenhange zu der Lage der beiden Hauptpunkte H_8' und H_{10}' steht. Aus der Beziehung der letzteren zu dem Gesamtschwerpunkte geht nämlich hervor, daß in Fig. 33 das Dreieck $R_{10}\,G_{8,10}\,G_{1,8}$ für alle Beugestellungen des Ellbogengelenks dem Dreieck $S_{8,10}H_8'G_{1,8}$ ähnlich ist. Man hat daher für die Entfernung ϱ_{10} des Punktes R_{10} vom Mittelpunkte $G_{8,10}$ des Ellbogengelenks den konstanten Wert

$$(239) \qquad \varrho_{10} = \frac{c_{10}'}{c_8'}\,l_8\,.$$

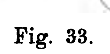


Fig. 33.

Bei den angegebenen Werten der beiden Hauptstrecken und der Länge des Oberarms besitzt diese Strecke die Länge von 12,82 cm (vgl. hierzu auch die späteren Formeln (272)).

Da der Punkt R_{10} stets mit $S_{8,10}$ und $G_{1,8}$ in gerader Linie liegt, so muß derselbe gleichzeitig mit dem Schwerpunkte des Armes vertikal unter oder vertikal über dem Mittelpunkte des Schultergelenks liegen. Derselbe kann daher an Stelle des Schwerpunktes verwendet werden, um die Haltungen des Armes zu charakterisieren, bei denen ein nur über das Ellbogengelenk hinwegziehender Muskel der

Schwere Gleichgewicht halten kann. Um den Arm in eine solche Stellung zu bringen, hat man diesen festen Punkt des Unterarmes nur mit dem Schultergelenkmittelpunkte in eine Vertikale einzurichten. Wegen dieser Eigenschaft bezeichne ich den Punkt R_{10} als den „Richtpunkt des Unterarms“. Es ist zu beachten, daß derselbe notwendigerweise zwischen dem Hauptpunkte H_{10}' und dem Schwerpunkte S_{10} des Systems Unterarm + Hand liegt.

Natürlich läßt sich der Richtpunkt des Unterarms auch dazu verwenden, in einfacher Weise am lebenden Menschen die Lage des Schwerpunktes des ganzen Armes zu bestimmen; denn der letztere teilt die Verbindungsstrecke zwischen dem Schultergelenkmittelpunkte und dem Richtpunkte in demselben Verhältnis wie der Hauptpunkt H_8' des Oberarms die Länge l_8 desselben. Dieses Verhältnis besitzt im vorliegenden Falle fast genau den Wert 5 : 2.

Es hat sich also herausgestellt, daß ein eingelenkiger Muskel des Ellbogengelenks durchaus nicht in jeder beliebigen Haltung des Armes der Schwere das Gleichgewicht halten kann. Hat man nun die verschiedenen Haltungen des Armes, welche für ihn überhaupt in Betracht kommen, in der angegebenen Weise aufgesucht, so kann man dann leicht auch die weitere Frage beantworten, wie groß im Falle des Gleichgewichts seine Spannung sein muß. Bezeichnet man die Gesamtspannung desselben mit K und den Abstand seiner resultierenden Zugrichtung von der Ellbogenachse mit k, so besitzt z. B. sein Drehungsmoment $D_{m_{10}}$ für den Unterarm den Wert

$$D_{m_{10}} = \pm Kk, \tag{240}$$

wobei das positive oder negative Zeichen in Frage kommt, je nachdem es sich um einen Beuger oder Strecker des Ellbogengelenks handelt. Setzt man einen Beuger voraus, etwa den M. brachialis, so erhält man demnach aus (240), (235) und (232) bzw. (234) zur Bestimmung der unbekannten Gesamtspannung des Muskels die Formel

$$K = \frac{(G_8 + G_{10})\, c_{10}' \sin(\psi_{1,8} + \psi_{8,10})}{k} = \frac{33{,}736 \sin(\psi_{1,8} + \psi_{8,10})}{k} \text{ kg.} \tag{241}$$

Hierbei sind für die beiden Gelenkwinkel die in der ersten Tabelle auf Seite 245 niedergelegten Werte nacheinander einzusetzen. Die direkte Messung des Armes k des Kräftepaares, mit welchem der M. brachialis auf den Unterarm einwirkt, hat nun weiterhin folgende Werte in Zentimeter ergeben:

$\psi_{8,10}$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°	130°
k in cm	1,10	1,25	1,38	1,53	1,70	1,96	2,30	2,66	3,00	3,35	3,65	3,59	3,34	3,14

Man erhält daher mit Hilfe der Formel (241) die folgenden Werte für die Gesamtspannung des M. brachialis in Kilogramm:

$\psi_{8,10}$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°	130°
K in kg	0	3,33	5,91	7,90	9,32	10,12	10,00	9,86	9,64	9,27	8,89	9,36	10,06	10,33

Man erkennt hieraus, daß der Muskel in der Nähe der Streckstellung des Armes verhältnismäßig wenig gespannt zu sein braucht, um der Schwere das Gleichgewicht zu halten. Die Spannung wächst aber sehr rasch mit der Beugung im Ellbogengelenk und erreicht schon bei etwas über 40° Beugungswinkel ihr Maximum von abgerundet 10 kg, auf dem sie bei der weiter gehenden Beugung des Armes, von kleinen Schwankungen abgesehen, stehen bleibt.

Will man die spezifische Spannung des Muskels, d. h. also die Spannung bestimmen, welche der Einheit des physiologischen Querschnittes zukommt, so braucht man nur die erhaltenen Werte von K durch die Anzahl der Quadratzentimeter des physiologischen Querschnittes zu dividieren. Der physiologische Querschnitt des M. brachialis beträgt abgerundet 12 qcm. Man erhält daher für die spezifische Spannung die Werte:

Beugungswinkel im Ellbogengelenk	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°	130°
Spezifische Spannung des M. brachialis (in kg pro qcm)	0	0,28	0,49	0,66	0,78	0,84	0,83	0,82	0,80	0,77	0,74	0,78	0,84	0,86

Die Maximalspannung des Muskels pro Quadratzentimeter des physiologischen Querschnittes, mit welcher er den unbelasteten Arm in seiner Lage erhalten kann, beträgt demnach rund 0,8 kg; nur bei Beugestellungen des Armes unter 40° Beugungswinkel ist dieselbe merklich geringer.

Da für einen eingelenkigen Muskel des Ellbogengelenks die Drehungsmomente D_{m_8} und $D_{m_{10}}$ entgegengesetzt gleich sind, so folgt aus (240) auch

$$D_{m_8} = \mp Kk, \tag{242}$$

wobei jetzt das negative Vorzeichen zu den Beugern und das positive zu den Strecken gehört. Hieraus ergibt sich in Rücksicht auf die erste Gleichung in (235) und (229) allgemein die Proportion

$$K : (G_8 + G_{10}) = \mp c_8' \sin \varphi_8 : k. \tag{243}$$

Beachtet man nun, daß $c_8' \sin \varphi_8$ den Abstand des Hauptpunktes H_8' des Oberarms von der durch den Mittelpunkt des Schultergelenks gehenden Vertikalen bedeutet (vgl. Fig. 30), und daß dieser für die zu einem Beugemuskel gehörenden Gleichgewichtsstellungen nega-

tiv, dagegen für die zu den Streckmuskeln gehörenden Stellungen positiv ausfällt, so hat man nach (243) den

Satz: Im Falle des Gleichgewichts zwischen einem eingelenkigen Muskel des Ellbogengelenks und der Schwere des Armes verhält sich die Gesamtspannung des Muskels zu dem Gesamtgewicht des Armes wie der Abstand der durch den Mittelpunkt des Schultergelenks gehenden Vertikalen vom Hauptpunkte des Oberarms zu dem Abstande der resultierenden Zugrichtung des Muskels vom Mittelpunkte des Ellbogengelenks.

Befinden sich gleichzeitig mehrere allein zwischen Oberarm und dem starren System Unterarm + Hand ausgespannte Muskeln in Kontraktion, so können dieselben, wie schon oben erwähnt worden ist, auch nur in den Stellungen der Schwere das Gleichgewicht halten, in denen der Schwerpunkt des Armes und damit der Richtpunkt des Unterarms mit dem Mittelpunkte des Schultergelenks in einer Vertikalen liegen. Numeriert man diese Muskeln in irgend einer Reihenfolge fortlaufend von 1 bis n und bezeichnet allgemein mit i_h, q_h, k_h die spezifische Spannung, den physiologischen Querschnitt und den Arm der Kräftepaare des $h$ten Muskels, so lautet die Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht nach (232)

$$(244)\quad \pm i_1 q_1 k_1 \pm i_2 q_2 k_2 \pm i_3 q_3 k_3 \pm \cdots \pm i_n q_n k_n = (G_8 + G_{10}) c_{10}' \sin(\psi_{1,8} + \psi_{8,10}).$$

Diese Gleichung gestattet schon bei zwei gleichzeitig in Kontraktion befindlichen Muskeln nicht mehr ohne weiteres in eindeutiger Weise die spezifischen Spannungen derselben zu berechnen, da sie eine Gleichung mit mehreren Unbekannten i_1, i_2 usw. darstellt. Eine derartige Aufgabe könnte jedoch dadurch zu einer bestimmten gemacht werden, daß man nach dem Vorgange von A. Fick[1]) ein bestimmtes Prinzip über die Verteilung der Muskelspannungen, wie etwa das Prinzip der kleinsten Anstrengung zu Hilfe nimmt.

Durch die eingehende Untersuchung des Gleichgewichtes zwischen Schwere und eingelenkigen Muskeln des Ellbogengelenks sind im Prinzip alle entsprechenden Fälle bei analog zusammengesetzten zweigliedrigen Systemen erledigt. Die aufgestellten Gleichgewichtsbedingungen haben ganz allgemeine Gültigkeit; die verschiedenen hierher gehörenden Beispiele werden sich nur durch die Werte der Gewichte und der Hauptstrecken voneinander unterscheiden. Die allgemeinen Resultate über die Lage des Gesamtschwerpunktes, bezüglich Richtpunktes, zu dem Mittelpunkte des feststehenden Gelenks, über den Unterschied zwischen der Wirkungsweise von Beugemuskeln und Streckmuskeln, über die Bestimmung der Muskelspannung bei

1) Vgl. A. Fick, Die medizinische Physik 3. Auflage, Braunschweig 1885, Seite 89 und 90.

gegebener Stellung des Gliedersystems, über die gleichzeitige Tätigkeit mehrerer eingelenkiger Muskeln, werden sich ohne weiteres auf jedes andere System von der vorausgesetzten Art übertragen lassen. Natürlich haben andere Werte der beiden Hauptstrecken auch andere Gliederstellungen zur Folge, bei denen allein eingelenkige Muskeln der Schwere Gleichgewicht halten können; die Berechnung der diese Stellungen bestimmenden Werte der beiden Gelenkwinkel hat aber genau mit denselben Formeln zu geschehen wie beim System des allein im Ellbogengelenk gegliederten Armes. Dies soll noch an einigen Beispielen gezeigt werden.

β) Gleichgewicht am Bein.

Als weiteres Beispiel soll das im Kniegelenk gegliederte Bein bei fixiertem Becken betrachtet werden. Entsprechend den für den Arm gemachten Voraussetzungen muß dabei angenommen werden, daß der Unterschenkel zusammen mit dem Fuß durch innere Kräfte zu einer einzigen starren Masse vereinigt ist, daß das Kniegelenk eine feste Achse besitzt, und daß im Hüftgelenk nur Drehungen ausgeführt werden um eine der Knieachse parallele Achse. Als Längsachse des Oberschenkels ist dabei die Verbindungslinie des Hüftgelenkmittelpunktes $G_{1,2}$ (Fig. 34) mit dem Kniegelenkmittelpunkte $G_{2,4}$,

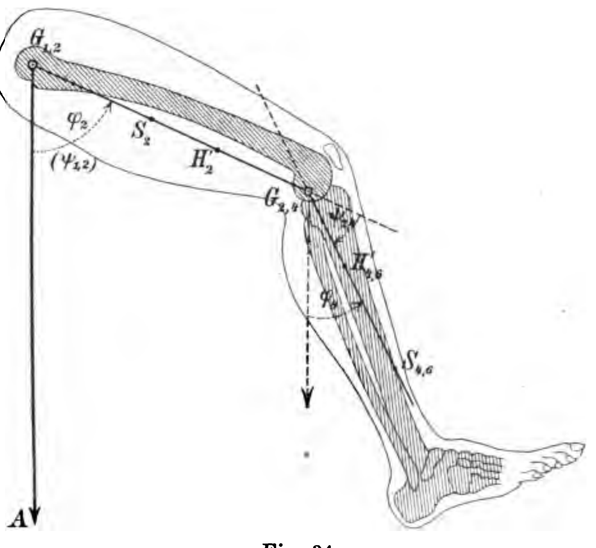


Fig. 34.

und als Längsachse des starren Systems Unterschenkel + Fuß die Verbindungslinie dieses letzteren Punktes mit dem gemeinsamen Schwerpunkte $S_{4,6}$ von Unterschenkel und Fuß aufzufassen. Die Längsachse des Oberschenkels enthält den Schwerpunkt des Oberschenkels S_2 und infolge der Bedeutung des Hauptpunktes vom Oberschenkel für den Fall, daß das Bein vom Rumpf abgelöst gedacht ist, auch diesen Punkt H_2'; auf der Längsachse vom System Unterschenkel + Fuß befindet sich dagegen der entsprechende Hauptpunkt $H_{4,6}'$ dieses Systems. Um eine vollständige Übereinstimmung mit den für den Arm eingeführten Bezeichnungen herbeizuführen, muß man zunächst mit

φ_2 den Winkel bezeichnen, welchen die Oberschenkellängsachse mit der Vertikalen durch den Hüftgelenkmittelpunkt $G_{1,2}$ bildet und muß diesem Winkel das positive Vorzeichen beilegen, wenn der Oberschenkel gegen diese Vertikale nach vorwärts, und das negative, wenn er nach rückwärts gedreht erscheint. Da das Becken festgestellt sein soll, so kann man diesen Winkel auch als den Gelenkwinkel $\psi_{1,2}$ des Hüftgelenks auffassen. Unter dem Beugungswinkel des Kniegelenks hat man weiterhin den Winkel $\psi_{2,4}$ zu verstehen, welchen die Längsachse des starren Systems Unterschenkel + Fuß mit der Verlängerung der Oberschenkellängsachse bildet. Die erstere Längsachse fällt genau genommen nicht mit der Längsachse des Unterschenkels zusammen, da man sie vom Mittelpunkte des Kniegelenks nach dem Schwerpunkte des Systems Unterschenkel + Fuß zu ziehen hat; sie weicht aber nur wenig davon ab. Während beim rechten Arm der Beugungswinkel $\psi_{8,10}$ des Ellbogengelenks nur positive Werte besaß, ist leicht zu erkennen, daß der Beugungswinkel $\psi_{2,4}$ des Kniegelenks bei der Ansicht des Beins von der rechten Seite aus (vgl. Fig. 34) nur negative Werte annehmen kann.

Das Gewicht des Oberschenkels sei wieder mit G_2, das des Unterschenkels mit G_4 und das des Fußes mit G_6 bezeichnet, die entsprechenden Massen mit m_2, m_4 und m_6, die Länge des Oberschenkels mit l_2, der Abstand des Schwerpunktes S_2 des Oberschenkels vom Hüftgelenkmittelpunkte mit r_2 und der Abstand des Schwerpunktes des Systems Unterschenkel + Fuß vom Kniegelenkmittelpunkte mit $r_{4,6}$. Die Messung an einem jugendlichen Individuum hatte für diese Größen, soweit sie im vorliegenden Falle in Frage kommen, die folgenden Werte ergeben

$$\begin{aligned} G_2 &= 4{,}86 \text{ kg} & l_2 &= 35{,}9 \text{ cm} \\ G_4 + G_6 &= 2{,}98 \text{ kg} & r_2 &= 15{,}7 \text{ cm} \\ G_2 + G_4 + G_6 &= 7{,}84 \text{ kg} & r_{2,4} &= 24{,}8 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Für die Berechnung der beiden Hauptstrecken c_2' und $c_{4,6}'$, welche dem vom Rumpf losgelösten Beine entsprechen würden, hat man jetzt die Formeln (vgl. hierzu (228))

$$(245) \qquad \begin{aligned} (m_2 + m_4 + m_6)\, c_2' &= m_2 r_2 + (m_4 + m_6)\, l_2 \\ (m_2 + m_4 + m_6)\, c_{4,6}' &= (m_4 + m_6)\, r_{4,6}. \end{aligned}$$

Hierzu müßte man nun eigentlich wieder aus den Gewichten G durch Division mit 981,11 die Massenzahlen m ableiten. Man erkennt aber leicht, daß die Werte der beiden Hauptstrecken nur von den Verhältnissen der Massen abhängen, so daß man also zur Berechnung derselben in (245) auch die Gewichte selbst einsetzen kann. Die Rechnung ergibt die Werte

$$(246) \qquad \begin{aligned} c_2' &= 23{,}4 \text{ cm} \\ c_{4,6}' &= 9{,}4 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Damit hat man nun alle Unterlagen gewonnen, um die Untersuchung über das Gleichgewicht zwischen Schwere und eingelenkigen Muskeln des Kniegelenks in derselben Weise wie beim Arm durchführen zu können. Es ergibt sich dabei insbesondere für die Entfernung $\varrho_{4,6}$ des Richtpunktes $R_{4,6}$ des Systems Unterschenkel + Fuß vom Kniegelenkmittelpunkte $G_{2,4}$

$$\varrho_{4,6} = \frac{c'_{4,6}}{c'_2} l_2 = 14{,}4 \text{ cm.} \tag{247}$$

Trotzdem die Massenverhältnisse und die Lagen der Schwerpunkte für die beiden Abschnitte des Beins ganz andere sind wie für die Armabschnitte, so zeigt sich doch kein wesentlicher Unterschied in der Entfernung des Richtpunktes vom Mittelpunkte des beide Abschnitte verbindenden Gelenks; denn diese Entfernung ist hier nur ca. $1^1/_2$ cm größer wie beim Arm. Berücksichtigt man, daß die Länge des Oberschenkels annähernd in demselben Verhältnis größer erscheint als die Länge des Oberarms, so erkennt man schon ohne alle Rechnung, daß die Stellungen des Beins, bei denen die nur zwischen dem Oberschenkel und dem starren System Unterschenkel + Fuß ausgespannten Muskeln der Schwere Gleichgewicht halten können, sich nur wenig von den entsprechenden Stellungen des Armes unterscheiden werden. Will man diese Stellungen genau bestimmen, so hat man nur aus der sich jetzt ergebenden Formel

$$\sin(\psi_{1,2} + \psi_{2,4}) = -\frac{c'_{4,6}}{c'_2} \sin \psi_{1,2} = -0{,}402 \sin \psi_{1,2} \tag{248}$$

die zusammengehörenden Werte von $\psi_{1,2}$ und $\psi_{2,4}$ zu berechnen. Da diese Formel beinahe mit (238) identisch ist, so könnte man in erster Annäherung direkt die in den beiden Tabellen auf Seite 245 angegebenen Werte der beiden Gelenkwinkel auch für das Bein als gültig betrachten; nur hätte man infolge des Umstandes, daß $\psi_{2,4}$ ausschließlich negative Werte annehmen kann, für beide Winkel die sämtlichen Vorzeichen umzukehren.

Bei aufrechter Stellung des ganzen Körpers und fixiertem Becken kann das Bein von den hier in Betracht kommenden Haltungen nur solche annehmen, in denen der Schwerpunkt vertikal unter dem Hüftgelenkmittelpunkte liegt. Es kann sich dann nur entweder um den M. gastrocnemius, den kurzen Kopf des M. biceps femoris oder den M. popliteus bei der Sicherung des Gleichgewichts durch einen eingelenkigen Kniegelenkmuskel handeln. Wenn dagegen der Mensch auf dem Rücken fest liegt, so kann er den Schwerpunkt seines Beins auch vertikal über den Hüftgelenkmittelpunkt bringen. Für das Gleichgewicht kämen dann die Mm. vastus lateralis, vastus intermedius und vastus medialis in Frage. Die Bestimmung der Spannung ist in

beiden Fällen auf genau die gleiche Weise vorzunehmen, wie es oben für den Arm auseinander gesetzt worden ist.

γ) Gleichgewicht bei verschwindender Masse des ersten Gliedes. Der Zehenstand.

Als weiteres Beispiel soll der Fall eines zweigliedrigen Systems behandelt werden, welches in mehrfacher Hinsicht besonders einfach ist und daher auch eine Vereinfachung der Untersuchung gestattet. Es kann nämlich vorkommen, daß daß Gewicht des einen der beiden Abschnitte so klein im Vergleich zu dem Gewicht des anderen ist, daß es in Anbetracht der bei derartigen Untersuchungen zu erreichenden Genauigkeit ganz vernachlässigt werden kann. Ein derartiger Fall ist also beispielsweise dadurch charakterisiert, daß die Masse des Gliedes, welches sich nur um die im Raume feste Achse drehen kann, gleich Null ist, und daher die Masse des anderen Gliedes zugleich die Masse des ganzen zweigliedrigen Gelenksystems darstellt. Infolgedessen fällt der Hauptpunkt des ersten Gliedes mit dem Mittelpunkte des beide Abschnitte verbindenden Gelenks, und der Hauptpunkt des zweiten Gliedes mit dem Schwerpunkte desselben und zugleich mit dem Schwerpunkte des ganzen Systems zusammen. In diesen letzteren Punkt fällt schließlich auch der Richtpunkt des zweiten Gliedes hinein. Man kann sich daher in diesem speziellen Falle die Rechnungen zur Bestimmung der beiden Hauptstrecken ersparen und braucht außer dem Gewicht G des ganzen Systems nur noch den Abstand l_1 der beiden Gelenkmittelpunkte voneinander und den Abstand r_2 des Schwerpunktes des zweiten Gliedes vom Mittelpunkte des Zwischengelenks direkt zu messen. Mit jenem ist dann die Hauptstrecke c_1 des ersten Gliedes, und mit diesem die Hauptstrecke c_2 des zweiten Gliedes identisch. Bezeichnet man die beiden Gelenkwinkel jetzt kurz mit ψ_1 und ψ_2, so besteht im Falle des Gleichgewichts zwischen Schwere und einem allein das Zwischengelenk überspannenden Muskel dann die Relation

$$(249) \qquad \sin(\psi_1 + \psi_2) = -\frac{r_2}{l_1} \sin \psi_1 ,$$

während die Spannung K des Muskels sich nach der Formel

$$(250) \qquad K = \pm \frac{G r_2 \sin(\psi_1 + \psi_2)}{k}$$

berechnet, unter k wiederum den Arm der beiden Kräftepaare verstanden.

Einen solchen Fall hätte man beispielsweise vor sich, wenn man in der Hand ein so schweres Gewicht halten würde, daß das Gewicht des Oberarms dagegen vernachlässigt werden könnte. Man müßte dabei nur dieses in der Hand gehaltene Gewicht mit dem Unterarm und der Hand zusammen als eine einzige starre Masse auffassen.

Einen solchen Fall hat man z. B. auch annähernd, wenn man die Bedingungen untersucht, unter denen die Wadenmuskulatur eines Beines oder beider Beine dem Gewicht des ganzen Körpers das Gleichgewicht hält, sobald man sich entweder auf einem Bein oder auch mit beiden Beinen auf die Zehen erhoben hat. Es möge der letztere Fall angenommen werden. Die beiden Füße sollen dabei parallel stehen und sich beim Ablösen der Fersen gemeinsam um eine feste durch das Köpfchen des I. Metatarsus jeder Seite hindurchgehende Achse drehen. Da die beiden Füße beim Erheben auf die Zehen identische Bewegungen ausführen, so können sie zusammen als ein einziger starrer Körper betrachtet werden; sie bilden das erste Glied des Gelenksystems. Es soll nun auch der ganze übrige Abschnitt des menschlichen Körpers als starrer Körper aufgefaßt werden, der sich nur um die gemeinsame Achse der oberen Sprunggelenke beider Seiten gegen das erste Glied drehen kann; er bildet das zweite Glied des zweigliedrigen Gelenksystems, das sich als ein ebenes System darstellt, weil die gemeinsame Achse der oberen Sprunggelenke der Achse durch die Metatarsusköpfchen parallel läuft. Beide Achsen stehen auf der Medianebene des Körpers senkrecht; ihre Schnittpunkte mit derselben seien F und M (vgl. Fig. 35).

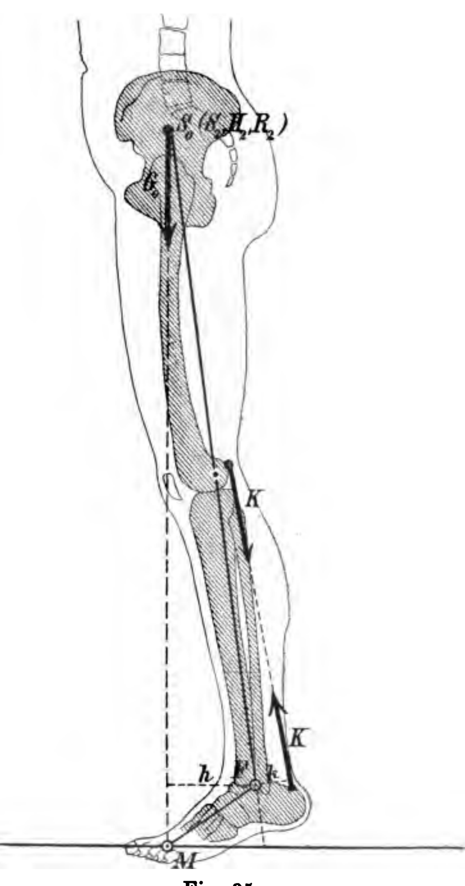


Fig. 35.

Da die Masse des ersten Gliedes als verschwindend klein gegenüber der Masse des zweiten Gliedes aufgefaßt werden soll, was der Wirklichkeit zwar nicht genau, aber doch wenigstens in erster Annäherung entspricht, so fällt der Hauptpunkt H_1 des ersten Gliedes mit dem Mittelpunkte F der gemeinsamen Achse des oberen Sprunggelenks zusammen. Der Hauptpunkt H_2, der Richtpunkt R_2 und der Schwerpunkt S_2 des zweiten Gliedes fallen dagegen unter dieser Vor-

aussetzung alle mit dem Gesamtschwerpunkte S_0 des ganzen Körpers zusammen, der natürlich hier in der Medianebene, d. h. also in der Bewegungsebene liegt.

Es kann nun nach dem früheren nur dann Gleichgewicht stattfinden, wenn der Gesamtschwerpunkt S_0 des Körpers mit dem Mittelpunkte M der festen Drehungsachse beider Füße in einer Vertikalen liegt, wobei es sich natürlich nur um den Fall handeln kann, daß S_0 sich vertikal über M befindet. Daraus geht aber wiederum hervor, daß für das Gleichgewicht hier überhaupt nur eingelenkige Muskeln in Frage kommen können, welche hinter der Achse der Fußgelenke vorüberziehen, wie es bei der Wadenmuskulatur der Fall ist. Der Zusatz „eingelenkig" wäre hier eigentlich gar nicht nötig, da es unter der gemachten Voraussetzung, daß der ganze Körper mit Ausnahme der beiden Füße eine starre Masse bildet, überhaupt nur „eingelenkige" Muskeln gibt, sofern man von den kleinen über die Metatarsophalangealgelenke hinwegziehenden Muskeln absieht. Denn für mehrgelenkige Muskeln würde ja hierbei der eine Insertionspunkt außerhalb des Körpers zu suchen sein.

Was nun die Berechnung der Muskelspannung anlangt, so verwendet man in dem vorliegenden Falle am besten den auf Seite 250 angeführten Satz. Da der Hauptpunkt H_1 mit dem Punkte F zusammenfällt, so nimmt dieser Satz die Form an:

Satz: Die Gesamtspannung der Wadenmuskulatur beider Beine verhält sich zu dem Gesamtgewicht des menschlichen Körpers im Falle des Gleichgewichts beim Erheben auf die Zehen wie der Abstand h des Fußgelenkmittelpunktes von der durch das Köpfchen des I. Metatarsusknochens hindurchgehenden Vertikalen zu der Entfernung k desselben Punktes von der Richtung des resultierenden Muskelzuges.

Da die beiden in Frage kommenden Abstände h und k sich mit großer Annäherung wie 3:1 verhalten, so hat man ohne alle Rechnung das Resultat, das die Gesammtspannung der Wadenmuskulatur beider Beine gleich dem dreifachen des Körpergewichts sein muß. Rechnet man das Körpergewicht zu 60 kg, so ergibt sich für die Gesamtspannung der Wadenmuskulatur beider Beine 180 kg, also für die Spannung der Wadenmuskulatur eines Beines 90 kg. Rechnet man weiterhin als durchschnittlichen Wert des Querschnitts der Wadenmuskulatur eines Beines 40 qcm, so ergibt sich für die Spannung eines Bündels Muskelfasern von der Querschnittseinheit, d. h. also für die spezifische Spannung rund $2\frac{1}{4}$ kg. Würde man nur auf einem Beine mit erhobener Ferse stehen bleiben wollen, so wäre dazu natürlich eine spezifische Spannung der Wadenmuskulatur von $4\frac{1}{2}$ kg ererforderlich.

δ) Gleichgewicht am belasteten Arm.

Als letztes Beispiel soll endlich der Fall in Betracht gezogen werden, daß ein eingelenkiger Muskel der Schwere das Gleichgewicht halten soll, wenn unter den für den Arm getroffenen Voraussetzungen in der Hand ein Gewicht G' gehalten wird, gegen welches das Gewicht des Oberarms nicht vernachlässigt werden kann (vgl. Fig. 36). Ein in der Hand gehaltenes Gewicht, welches natürlich dem starren System: Unterarm + Hand hinzugefügt werden muß, ändert in erster Linie die Lage des Hauptpunktes H_{10}'. Fällt der Schwerpunkt S' des Gewichtes G', wie der Einfachheit halber angenommen werden soll, in die Verlängerung der Längsachse des Unterarms hinein und besitzt dabei vom Ellbogengelenkmittelpunkte den Abstand a, so wird der neue Hauptpunkt $[H_{10}']$ den Schwerpunkt eines Systems von zwei Massen darstellen, von denen die eine die Größe $(m_8 + m_{10})$ besitzt und in H_{10}' konzentriert ist, während die andere die im Punkte S' vereinigte Masse m' des neuen Gewichts darstellt. Man hat infolgedessen für die neue Hauptstrecke $[c_{10}']$, d. h. für die Entfernung des neuen Hauptpunktes $[H_{10}']$ vom Ellbogengelenkmittelpunkte die Beziehung

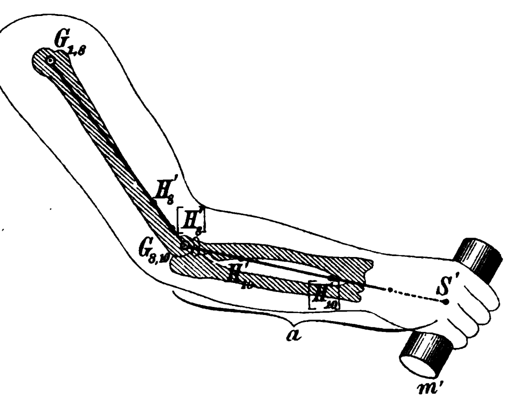


Fig. 36.

(251) $$(m_8 + m_{10} + m') \cdot [c_{10}'] = (m_8 + m_{10})\, c_{10}' + m'a.$$

Außerdem verändert sich infolge der neuen Masse m' auch der Hauptpunkt H_8' des Oberarms, da ja im Ellbogengelenkmittelpunkte für das reduzierte Oberarmsystem noch die Masse m' hinzutritt. Der Hauptpunkt rückt daher in einen Punkt $[H_8']$, welcher näher am Ellbogengelenk liegt; die Entfernung $[c_8']$ desselben vom Schultergelenkmittelpunkte berechnet sich nach der Formel

(252) $$(m_8 + m_{10} + m')[c_8'] = (m_8 + m_{10})c_8' + m'l_8.$$

Endlich wird die Verschiebung der Hauptpunkte auch eine Verlegung des Richtpunktes R_{10} des Unterarms zur Folge haben; derselbe wird in einen Punkt $[R_{10}]$ rücken, für dessen Abstand $[\varrho_{10}]$ von $G_{8,10}$ gilt

(253) $$[\varrho_{10}] = \frac{[c_{10}']}{[c_8']}\, l_8.$$

Bezeichnet man das Verhältnis der in der Hand gehaltenen Masse m'

zu der des ganzen unbelasteten Armes $(m_8 + m_{10})$ kurz durch μ' so kann man für den Abstand des neuen Richtpunktes vom Mittelpunkte des Ellbogengelenkes nach (253), (251) und (252) auch schreiben

$$(254) \qquad [\varrho_{10}] = \frac{c'_{10} + \mu' a}{c'_8 + \mu' l_8} l_8 .$$

Bei den Dimensionen des in Betracht gezogenen Präparates hatte sich für a die Länge von 34,6 cm herausgestellt. Demnach nimmt die Formel (254) in diesem Falle die bestimmte Form an

$$(255) \qquad [\varrho_{10}] = \frac{9{,}16 + \mu' \cdot 34{,}6}{21{,}65 + \mu' \cdot 30{,}3}\, 30{,}3 \text{ cm}.$$

Hat man beispielsweise ein Gewicht in der Hand, welches gleich dem Gewicht des ganzen Armes ist, so nimmt μ' den Wert 1 an, und es ergibt sich für den Richtpunktabstand die Größe 25,5 cm. Da beim unbelasteten Arm die Entfernung des Richtpunktes von der Ellbogenachse nur 12,8 cm betrug, so ist der Richtpunkt durch Hinzufügen eines Gewichtes von der Größe des Armgewichts fast genau in die doppelte Entfernung gerückt. Hierdurch werden nun vor allen Dingen die Haltungen des Arms vollständig anders ausfallen, bei denen allein ein eingelenkiger Muskel der Schwere das Gleichgewicht halten kann.

Es ist leicht einzusehen, daß bei stetiger Vergrößerung des in der Hand gehaltenen Gewichts der Richtpunkt sich immer mehr vom Ellbogengelenk entfernen wird, bis er schließlich bei einem Gewicht, gegen welches das Gewicht des Arms vernachlässigt werden kann, mit dem Schwerpunkte S' des neuen Gewichts zusammenfällt. Dann hat man aber den schon unter γ) erwähnten speziellen Fall vor sich.

Nachdem die neue Lage des Richtpunktes und die neuen Größen der beiden Hauptstrecken festgestellt sind, erledigen sich die übrigen Fragen: über die für die eingelenkigen Muskeln charakteristischen Armhaltungen, über die Bestimmung der Muskelspannung usw. in derselben Weise wie beim unbelasteten Arm. Man hat nur in Rücksicht zu ziehen, daß an Stelle des Gesamtgewichts $(G_8 + G_{10})$ des Arms in den Formeln das Gewicht $(G_8 + G_{10} + G')$ zu treten hat.

c) *Gleichgewicht zwischen Schwere und zweigelenkigen Muskeln.*

α) Allgemeine Methoden der Untersuchung.

Die für den unbelasteten Arm abgeleiteten Gleichgewichtsbedingungen (235) und (236) gelten ganz allgemein für jeden beliebigen Muskel, welcher mit Drehungsmomenten auf die beiden Abschnitte des Arms einwirkt. Handelt es sich um einen sowohl über das Schultergelenk als auch über das Ellbogengelenk hinwegziehenden Muskel, so sind dann aber die beiden Drehungsmomente D_{m_8} und $D_{m_{10}}$ nicht mehr entgegengesetzt gleich; dagegen gilt auch jetzt noch

die Beziehung

(256) $$D_{m_{8,10}} = D_{m_8} + D_{m_{10}}.$$

Berücksichtigt man die Werte der von der Schwere ausgeübten Drehungsmomente in der Form (229) und (230), so folgt aus (235) und (236) die ganz allgemein gültige Beziehung

(257) $$D_{m_8} : D_{m_{10}} : D_{m_{8,10}} = c_8' \sin \varphi_8 : c_{10}' \sin \varphi_{10} : (c_8' \sin \varphi_8 + c_{10}' \sin \varphi_{10})$$

Denkt man durch den Mittelpunkt $G_{1,8}$ des Schultergelenks, durch den Hauptpunkt H_8' des Oberarms und den Gesamtschwerpunkt $S_{8,10}$ je eine Vertikale gelegt, wie es in Figur 37 angedeutet ist, so erkennt man leicht, daß $c_8' \sin \varphi_8$ den Abstand zwischen der ersten und zweiten, $c_{10}' \sin \varphi_{10}$ den Abstand zwischen der zweiten und dritten und $(c_8' \sin \varphi_8 + c_{10}' \sin \varphi_{10})$ den Abstand zwischen der ersten und dritten dieser drei Vertikalen darstellt. Verlängert man weiterhin die zwischen $S_{8,10}$ und H_8' liegende Hauptstrecke c_{10}' bis zum Schnittpunkte P mit der Vertikalen des Schultergelenkmittelpunktes, so erhält man drei Strecken $\overline{H_8' P}$, $\overline{S_{8,10} H_8'}$ und $\overline{S_{8,10} P}$, welche in demselben Verhältnis zueinander stehen wie diese drei Abstände zwischen den Vertikalen. Verlängert man endlich auch die Längsachse des Unterarms, welche $\overline{S_{8,10} P}$ parallel läuft, bis zum Schnittpunkte Q_{10} mit der Vertikalen durch den Schultergelenkmittelpunkt und berücksichtigt, daß $S_{8,10}$ mit R_{10}, H_8' mit $G_{8,10}$ und P mit Q_{10} auf je einem Strahl durch den Schultergelenkmittelpunkt $G_{1,8}$ liegen (vgl. Fig. 37), so erhält man auf der Längsachse des Unterarms drei Strecken $\overline{G_{8,10} Q_{10}}$, $\overline{R_{10} G_{8,10}}$ und $\overline{R_{10} Q_{10}}$, welche ebenfalls in dem Verhältnis der Abstände zwischen den drei Vertikalen stehen. Es gilt daher auch

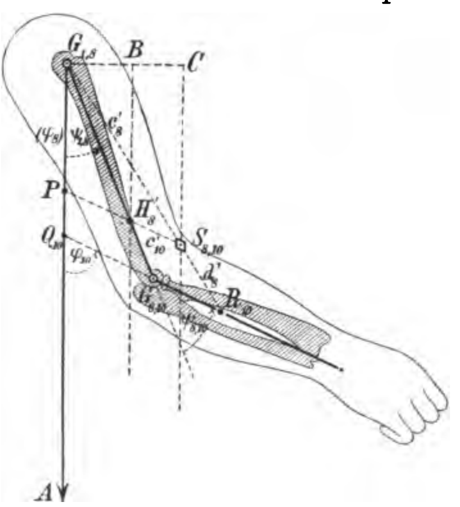


Fig. 37.

(258) $$D_{m_8} : D_{m_{10}} : D_{m_{8,10}} = \overline{G_{8,10} Q_{10}} : \overline{R_{10} G_{8,10}} : \overline{R_{10} Q_{10}}.$$

Bezeichnet man den Punkt Q_{10} auf der Unterarmlängsachse bzw. deren Verlängerung, welcher in irgendeiner Stellung des Arms jeweils vertikal unter oder auch vertikal über dem Mittelpunkt des Schultergelenks liegt, als den „Gleichgewichtspunkt des Unterarms", so hat man demnach folgenden unter den gemachten Voraussetzungen über die Beweglichkeit in den beiden Gelenken ganz allgemein gültigen

Satz: **Ein jeder Muskel kann nur in denjenigen Stellungen des Arms der Schwere Gleichgewicht halten, bei denen auf der Längsachse des Unterarms der Abstand des Gleichgewichtspunktes vom Mittelpunkte des Ellbogengelenks, der Abstand des Ellbogengelenkmittelpunktes vom Richtpunkte und der Abstand des Gleichgewichtpunktes vom Richtpunkte im Verhältnis der drei Drehungsmomente D_{m_8}, $D_{m_{10}}$ und $D_{m_{8,10}}$ stehen, mit denen er auf den Oberarm, den Unterarm und den ganzen Arm einwirkt.**

Das früher aufgestellte Kriterium für die zu einem eingelenkigen Muskel des Ellbogengelenks gehörenden Gleichgewichtsstellungen des Armes ist nur ein spezieller Fall dieses Satzes. Denn bei einem derartigen Muskel sind die beiden Drehungsmomente D_{m_8} und $D_{m_{10}}$ entgegengesetzt gleich, und das Drehungsmoment $D_{m_{8,10}}$ besitzt den Wert Null. Infolgedessen muß in diesem speziellen Falle der Gleichgewichtspunkt mit dem Richtpunkte des Unterarms zusammenfallen.

Einen andern speziellen Fall würde ein Muskel darstellen, welcher nur über das Schultergelenk hinwegzieht. Für einen solchen Muskel ist das Drehungsmoment $D_{m_{10}}$ gleich Null. Man kann dann auch sagen, die Drehungsmomente D_{m_8} und $D_{m_{8,10}}$ sind im Vergleich zu $D_{m_{10}}$ unendlich groß. Es müssen daher in den zugehörigen Gleichgewichtsstellungen auch die Abstände des Gleichgewichtspunktes von dem Ellbogengelenkmittelpunkte und dem Richtpunkte unendlich groß gegenüber dem Abstande des Ellbogengelenkmittelpunktes vom Richtpunkte sein. Diese Bedingung ist nur erfüllt, wenn der Gleichgewichtspunkt mit dem unendlich fernen Punkte auf der Unterarmlängsachse zusammenfällt, oder mit anderen Worten, wenn die Längsachse des Unterarms vertikal steht. Ein eingelenkiger Muskel des Schultergelenks kann daher nur in solchen Stellungen des Armes der Schwere das Gleichgewicht halten, bei denen die Längsachse des Unterarms entweder vertikal nach oben oder vertikal nach unten gerichtet ist. Das erstere ist erforderlich für einen auf der Vorderseite (Beugeseite), das letztere für einen auf der Hinterseite (Streckseite) über das Schultergelenk hinwegziehenden Muskel. Natürlich hat diese Bedingung nur so lange Geltung, als nicht das Ellbogengelenk in der äußersten Streckstellung oder in der extremen Beugestellung festgestellt ist. Wäre das eine oder andere der Fall, so würde man es überhaupt nicht mehr mit einem zweigliedrigen Gelenksystem, sondern nur noch mit einem einzigen um die feste Schulterachse drehbaren Körperteil zu tun haben, und der Muskel würde sich daher ganz anderen mechanischen Verhältnissen gegenübergestellt finden.

Während für einen eingelenkigen Muskel des Ellbogengelenks die Gleichgewichtshaltungen des Armes durch eine feste Lage des

Gleichgewichtspunktes auf der Unterarmlängsachse charakterisiert sind, wechselt für einen mehrgelenkigen Muskel bei den verschiedenen Gleichgewichtshaltungen im allgemeinen der Ort des Gleichgewichtspunktes anf der Unterarmlängsachse. Es läßt sich daher in dem letzteren Falle nicht mehr ein so einfaches Kriterium angeben, nach welchem man die Haltungen des Arms bestimmen kann, in denen der mehrgelenkige Muskel allein der Schwere Gleichgewicht zu halten imstande ist. Es gehört überhaupt diese Aufgabe dann mit zu den verwickelsten Problemen der Muskelstatik. Andererseits stellt sie aber auch eins der wichtigsten Probleme derselben dar, denn es hätte natürlich gar keinen Sinn die Spannung zu bestimmen, mit der ein solcher Muskel bei einer bestimmten Haltung des Arms sich kontrahieren muß, um allein der Schwere das Gleichgewicht zu halten, wenn man noch nicht einmal weiß, ob der Muskel auch wirklich imstande ist, bei dieser Haltung das Gleichgewicht herzustellen.

Man kann nun zur Bestimmung der Gleichgewichtshaltungen im allgemeinen Falle auf folgende Weise gelangen.

Der Ort des Gleichgewichtspunktes Q_{10} auf der Unterarmlängsachse hängt von den Werten der beiden Winkel φ_8 und φ_{10} ab. An Stelle dieser Winkel kann man nach (231) auch die beiden Gelenkwinkel $\psi_{1,8}$ und $\psi_{8,10}$ des Schulter- und Ellbogengelenkes einführen, indem man beachtet, daß $\psi_{1,8}$ mit φ_8 identisch ist. Es ist daher auch der Wert eines jeden aus zwei der drei Strecken $\overline{G_{8,10}Q_{10}}$, $\overline{R_{10}G_{8,10}}$ und $\overline{R_{10}Q_{10}}$ gebildeten Verhältnisses eine Funktion der beiden Gelenkwinkel $\psi_{1,8}$ und $\psi_{8,10}$. Diese Funktion läßt sich aber nach den obigen Auseinandersetzungen an der Hand von Figur 37 leicht angeben. Nimmt man z. B. das Verhältnis der Abstände des Gleichgewichtspunktes und des Ellbogengelenkmittelpunktes vom Richtpunkte, so hat man

$$(259) \qquad \frac{\overline{R_{10}\,Q_{10}}}{\overline{R_{10}\,G_{8,10}}} = \frac{c_8' \sin \psi_{1,8} + c_{10}' \sin(\psi_{1,8} + \psi_{8,10})}{c_{10}' \sin(\psi_{1,8} + \psi_{8,10})}.$$

Es empfiehlt sich für die weitere Untersuchung, eine Tabelle aufzustellen, in der die Werte dieses Verhältnisses für alle um je 5^0 voneinander verschiedenen Werte der Winkel $\psi_{1,8}$ und $\psi_{8,10}$ eingetragen sind.[1])

Jedes Verhältnis von zwei der drei Drehungsmomente D_{m_8}, $D_{m_{10}}$ und $D_{m_{8,10}}$ ist nach dem früheren ebenfalls eine Funktion der beiden Gelenkwinkel $\psi_{1,8}$ und $\psi_{8,10}$. Diese Abhängigkeit läßt sich aber im allgemeinen nicht durch eine Formel darstellen, sondern muß durch

1) Eine solche Tabelle findet sich für den nur im Ellbogengelenk gegliederten Arm auf den Seiten 350 und 351 meiner Arbeit über „Beiträge zur Muskelstatik I" mitgeteilt.

direkte Messungen der Drehungsmomente an geeigneten Präparaten in der unter 16 b) beschriebenen Weise festgestellt werden. Würde es sich z. B. um das im Kniegelenk gegliederte Bein handeln, so könnte man für den früher eingehender untersuchten M. semimembranosus die Tabellen auf Seite 236 zur Bestimmung der Abhängigkeit der Verhältnisse der Drehungsmomente von den Gelenkwinkeln des Hüftgelenks und Kniegelenks verwenden. Man hätte zu diesem Zwecke nur zu beachten, daß das Drehungsmoment $D_{m_{2,4}}$, mit welchem dieser Muskel in irgendeiner Stellung auf das ganze Bein einwirkt, nach (226) dem auf das Becken ausgeübten Drehungsmoment D_{m_1} entgegengesetzt gleich ist.

Man denke sich nun für den zu untersuchenden zweigelenkigen Muskel des Armes insbesondere die Werte des Verhältnisses der beiden Drehungsmomente $D_{m_{8,10}}$ und $D_{m_{10}}$ für alle Stellungen des Armes abgeleitet, welche um je 5^0 voneinander verschiedenen Werten der Winkel $\psi_{1,8}$ und $\psi_{8,10}$ entsprechen, und dieselben in einer Tabelle angeordnet.

Durch Vergleich dieser Tabelle mit der im Anschluß an (259) hergestellten Tabelle kann man dann zu denjenigen Stellungen des Armes gelangen, in denen der betreffende Muskel allein imstande ist, der Schwere das Gleichgewicht zu halten. Vorausgesetzt, daß beide Tabellen in gleicher Weise angeordnet sind, hat man zu diesem Zwecke nur diejenigen einander entsprechenden Stellen der beiden Tabellen aufzusuchen, an denen sich entweder genau gleiche oder doch wenigstens mit genügender Annäherung übereinstimmende Werte der beiden Verhältnisse $\overline{R_{10}Q_{10}} : \overline{R_{10}G_{1,8}}$ und $D_{m_{8,10}} : D_{m_{10}}$ verzeichnet finden. Zu jeder derartigen Stelle in beiden Tabellen gehört je ein bestimmter Wert der beiden Gelenkwinkel, welche zusammen eine Gleichgewichtshaltung des Armes angeben.

Ganz abgesehen davon, daß die Herstellung der beiden Tabellen einen großen Aufwand von Arbeit und Zeit erfordert, ist das Aufsuchen der entsprechenden Stellen mit gleichem Zahlenwert im allgemeinen Falle eines zweigelenkigen Muskels sehr mühsam. Für einen eingelenkigen Muskel kommt man auf diesem Wege verhältnismäßig schneller zum Ziele, weil das Verhältnis der beiden Drehungsmomente $D_{m_{8,10}} : D_{m_{10}}$ einen konstanten Wert besitzt. Dieser Wert ist für einen nur über das Ellbogengelenk hinwegziehenden Muskel, wie man leicht bestätigt, gleich Null, für einen nur über das Schultergelenk hinwegziehenden Muskel dagegen unendlich groß. Man hat daher in der ersten der beiden Tabellen in dem einen Falle nur alle die Stellen aufzusuchen, in welchen die Zahl Null oder eine ihr sehr nahe kommende Zahl steht, im anderen Falle dagegen die Stellen mit unendlich großem Zahlenwert. Man gelangt auf diesem Wege für die eingelenkigen Beuger oder Strecker des Ellbogengelenks in der

Tat zu den schon früher in den Tabellen auf Seite 245 angegebenen zusammengehörenden Werten der beiden Gelenkwinkel $\psi_{1,8}$ und $\psi_{8,10}$. Allerdings ist die Genauigkeit dieser Bestimmung nur dann einigermaßen ausreichend und der früher erzielten Genauigkeit entsprechend, wenn in der Tabelle die Werte eines jeden der beiden Gelenkmuskel höchstens um je 5^0 voneinander abweichen, so wie es in der Tabelle auf den Seiten 350 und 351 der erwähnten Arbeit der Fall ist. Es lassen sich dann durch Interpolation die Gelenkwinkel bis auf etwa $\frac{1}{2}^0$ genau aus der Tabelle ableiten. Die gleiche Genauigkeit erreicht man im allgemeinen auch, wenn man auf dem oben angegebenen Wege des Vergleichens der beiden Tabellen die Gleichgewichtshaltungen für einen mehrgelenkigen Muskel bestimmt.

Die Untersuchung läßt sich auch auf rein konstruktivem Wege durchführen und gewinnt dadurch viel an Anschaulichkeit. Man braucht sich nämlich nur in ähnlicher Weise, wie das früher zur Darstellung der Drehungsmomente geschehen ist [vgl. 16 b α und β)], zwei Flächen zu konstruieren, von denen die eine die Abhängigkeit des Verhältnisses $\overline{R_{10}Q_{10}} : \overline{R_{10}G_{8,10}}$ von den Gelenkwinkeln $\psi_{1,8}$ und $\psi_{8,10}$, und die andern die Abhängigkeit des Verhältnisses $D_{m_{8,10}} : D_{m_{10}}$ von denselben beiden Winkeln darstellt. Eine jede der beiden Flächen würde in derselben Weise zu konstruieren sein, wie die früher eingeführten Momentflächen (vgl. Seite 223, sowie auch die Seiten 237 bis 239), von denen Tafel IV ein Beispiel liefert.

In einer horizontalen Ebene denke man ein rechtwinkliges Koordinatensystem festgelegt, dessen Abszissen den Werten des Schultergelenkwinkels $\psi_{1,8}$ und dessen Ordinaten den Werten des Ellbogengelenkwinkels $\psi_{8,10}$ zugeordnet sind. Auf diese Weise entspricht jeder Haltung des Armes ein ganz bestimmter Punkt in diesem Koordinatensystem. Nun denke man sich weiter in jedem Punkte, welcher zu einer bestimmten Stellung des Armes gehört, je nach dem Vorzeichen des Verhältnisses vertikal nach oben oder unten eine Strecke abgetragen, welche durch ihre Länge den dieser Armhaltung entsprechenden Wert des Verhältnisses $\overline{R_{10}Q_{10}} : \overline{R_{10}G_{8,10}}$ angibt. Dann liegen die Endpunkte aller dieser Strecken auf einer Fläche, die durch ihre Gestalt und ihre Lage zum horizontalen Koordinatensystem in anschaulicher Weise die Abhängigkeit dieses Verhältnisses von der Haltung des Armes erkennen läßt.

Von demselben horizontalen Koordinatensystem aus denke man weiterhin in jedem einer Armhaltung entsprechenden Punkte eine zweite Strecke vertikal nach oben oder unten abgetragen, welche durch ihre Länge den entsprechenden Wert des Verhältnisses $D_{m_{8,10}} : D_{m_{10}}$ veranschaulicht. Auf diese Weise erhält man durch die Endpunkte aller dieser Strecken eine zweite Fläche, welche die Abhängigkeit

des Verhältnisses dieser beiden Drehungsmomente von der Haltung des Armes erkennen läßt.

Die beiden Flächen werden sich nun im allgemeinen in einer Kurve durchdringen. Alle Punkte dieser Kurve gehören zu Armhaltungen, für welche die beiden durch die Flächen dargestellten Verhältnisse denselben Wert besitzen; sie geben also die Haltungen des Armes an, in denen der betreffende Muskel allein der Schwere das Gleichgewicht halten kann. Man bekommt die diesen Haltungen entsprechenden Werte der beiden Gelenkwinkel am einfachsten dadurch, daß man die Durchdringungskurve auf das horizontale ebene Koordinatensystem projiziert denkt, und die Koordinaten aller Punkte dieser Projektion bestimmt.

An Stelle des Verhältnisses der Abstände des Gleichgewichtspunktes und Ellbogengelenkmittelpunktes vom Richtpunkte könnte man zur Ableitung der Gleichgewichtshaltungen des Armes auch ein anderes der zwischen den drei Strecken auf der Unterarmlängsachse (vgl. Fig. 37) möglichen Verhältnisse verwenden; natürlich käme dann nach (258) auch ein anderes Verhältnis zweier Drehungsmomente des Muskels in Frage. Die oben herausgegriffenen Verhältnisse verdienen aber deshalb den Vorzug, weil man nach den früheren Ausführungen die beiden Drehungsmomente $D_{m_{8,10}}$ und $D_{m_{10}}$ leichter direkt an einem Präparat messen kann, während das Drehungsmoment D_{m_8} besser sich auf dem Wege der Rechnung aus den beiden anderen ableiten läßt.

Behält man die beiden bevorzugten Strecken bzw. Drehungsmomente für die Bestimmung der Gleichgewichtshaltungen bei, so ist man nun nicht gerade an die Verhältnisse $\overline{R_{10}Q_{10}} : \overline{R_{10}G_{8,10}}$ und $D_{m_{8,10}} : D_{m_{10}}$ gebunden. Man könnte ebensogut auch die reziproken Verhältnisse $\overline{R_{10}G_{8,10}} : \overline{R_{10}G_{10}}$ und $D_{m_{10}} : D_{m_{8,10}}$ der Untersuchung zugrunde legen. Die Anwendung der letzteren empfiehlt sich sogar in allen den Fällen, in welchen die ersteren Verhältnisse Werte besitzen, die größer als 1 sind. Man erreicht hierdurch, daß die Flächen, deren Durchdringungskurve die Gleichgewichtshaltungen des Armes liefert, nicht ins Unbegrenzte wachsen, sondern in einem Raume verlaufen, welcher durch zwei oberhalb und unterhalb der horizontalen Koordinatenebene im Abstande 1 verlaufenden Ebenen begrenzt wird.

Wenn die Gleichgewichtsstellungen für einen Muskel abgeleitet sind, so läßt sich dann für jede dieser durch bestimmte Werte von $\psi_{1,8}$ und $\psi_{8,10}$ charakterisierten Stellungen des Armes mit Hilfe der allgemein gültigen Formeln (235), (236) und (232) bzw. (234) die Gesamtspannung des Muskels im Falle des Gleichgewichts berechnen; denn die hierzu nötigen Arme k der Kräftepaare mußten ja schon für die Feststellung der Gleichgewichtsstellungen gemessen werden, so daß sie nunmehr als gegeben betrachtet werden können.

β) Spezielles Beispiel.

Die unter α) ausführlich auseinandergesetzte Methode der Bestimmung der Gleichgewichtsstellungen des Armes und der zum Gleichgewicht in einer solchen Stellung erforderlichen Muskelspannung soll schließlich noch auf einen bestimmten zweigelenkigen Muskel des Armes angewendet werden, nämlich auf den langen Kopf des M. biceps brachii. Es wird gerade dieses Beispiel gewählt, weil an demselben zu erkennen ist, daß unter bestimmten Verhältnissen sich unter Umständen die Durchführung der Untersuchung etwas vereinfachen läßt.

Bei dem langen Kopf des M. biceps brachii legt sich bekanntlich die lange Ursprungssehne zunächst über den Kopf des Humerus hinweg, und dann spannt sich der Muskel zwischen dem sulcus intertubercularis des Humerus und seinem Ansatz an der tuberositas radii wie ein eingelenkiger Muskel aus (wobei entsprechend der Voraussetzung über die Beweglichkeit des Armes das Radioulnargelenk als festgestellt zu betrachten ist). Der Muskel wird hierdurch gewissermaßen in zwei eingelenkige Teile zerlegt, von denen der erste nur über das Schultergelenk und der zweite nur über das Ellbogengelenk hinwegzieht. Beide Teile besitzen dabei stets die gleiche Spannung, trotzdem der erste Teil überhaupt keine Muskelfasern enthält. Man bestätigt nun nach den früheren Auseinandersetzungen über die Bestimmung der Drehungsmomente leicht, daß für das Drehungsmoment $D_{m_{8,10}}$ nur der erste Teil, für das Drehungsmoment $D_{m_{10}}$ dagegen nur der zweite Teil des Muskels in Frage kommt.

Der Arm des auf die ganze obere Extremität ausgeübten Kräftepaares, dessen Moment durch $D_{m_{8,10}}$ angegeben wird, ist infolge des eigentümlichen Verlaufes des Muskels konstant, und zwar gleich dem Radius ϱ des Humeruskopfes.

Der Arm k des auf den Unterarm ausgeübten Kräftepaares, dessen Moment $D_{m_{10}}$ ist, ändert dagegen im allgemeinen seine Größe mit der Haltung des ganzen Armes. Er hängt dabei aber nicht von beiden Gelenkwinkeln, sondern nur von dem Winkel $\psi_{8,10}$ des Ellbogengelenks ab, da er mit dem Abstande des resultierenden Muskelzugs des zweiten Teils des Muskels von der Achse des Ellbogengelenks übereinstimmt.

Bezeichnet man die Gesamtspannung des Muskels wieder mit K, so ist also in diesem speziellen Falle

(260)
$$\begin{aligned} D_{m_{8,10}} &= K\varrho \\ D_{m_{10}} &= Kk \end{aligned}$$

und infolgedessen

(261)
$$\frac{D_{m_{8,10}}}{D_{m_{10}}} = \frac{\varrho}{k} \quad \text{bzw.} \quad \frac{D_{m_{10}}}{D_{m_{8,10}}} = \frac{k}{\varrho}\,.$$

Für den Arm k hat nun die Messung folgende Werte ergeben:

$\psi_{8,10}$	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°
k in cm	1,15	1,24	1,37	1,52	1,68	1,90	2,14	2,40	2,69	2,97	3,24	3,54	3,74	3,93

$\psi_{8,10}$	70°	75°	80°	85°	90°	95°	100°	105°	110°	115°	120°	125°	130°
k in cm	4,08	4,23	4,35	4,44	4,54	4,58	4,55	4,45	4,27	4,08	3,92	3,75	3,58

Für den langen Kopf des M. biceps brachii hat sich weiterhin durch Messung an verschiedenen Präparaten das bemerkenswerte Resultat ergeben, daß die Entfernung seines Ansatzes am Radius von der Ellbogenachse mit großer Annäherung gleich dem Durchmesser des Humeruskopfes ist. Diese Entfernung ist zugleich der Maximalwert, den k überhaupt annehmen kann, sie betrug daher für das der Messung zugrunde gelegten Präparat nach der obigen Tabelle 4,58 cm. Folglich ist für dasselbe Präparat der Radius ϱ des Humeruskopfes gleich 2,29 cm anzunehmen, wobei natürlich diese Angabe nicht bis auf zwei Dezimalstellen genau sein kann, sondern nur bis auf zwei Dezimalstellen gemacht ist, um die gefundene Gleichheit von Ansatzstrecke des Muskels und Durchmesser des Humeruskopfes zu wahren.

Berechnet man auf Grund dieser Werte von k und ϱ nach (261) die Verhältnisse $\frac{D_{m_{8,10}}}{D_{m_{10}}}$ oder $\frac{D_{m_{10}}}{D_{m_{8,10}}}$, je nachdem $D_{m_{8,10}} < D_{m_{10}}$ oder $D_{m_{8,10}} > D_{m_{10}}$ ist, so erhält man für den langen Kopf des M. biceps brachii folgende Tabelle, in welcher die Verhältniszahlen eingeklammert sind, wenn es sich um das Verhältnis $\frac{D_{m_{10}}}{D_{m_{8,10}}}$ handelt:

Ellbogengelenkwinkel $\psi_{8,10}$	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°
Verhältnis $\frac{D_{m_{8,10}}}{D_{m_{10}}}$ bzw. $\left[\frac{D_{m_{10}}}{D_{m_{8,10}}}\right]$	[+ 0,50]	[+ 0,54]	[+ 0,60]	[+ 0,66]	[+ 0,74]	[+ 0,83]	[+ 0,93]

Ellbogengelenkwinkel $\psi_{8,10}$	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°
Verhältnis $\frac{D_{m_{8,10}}}{D_{m_{10}}}$ bzw. $\left[\frac{D_{m_{10}}}{D_{m_{8,10}}}\right]$	+ 0,95	+ 0,85	+ 0,77	+ 0,71	+ 0,65	+ 0,61	+ 0,58	+ 0,56	+ 0,54	+ 0,53

Ellbogengelenkwinkel $\psi_{8,10}$	85°	90°	95°	100°	105°	110°	115°	120°	125°	130°
Verhältnis $\frac{D_{m_{8,10}}}{D_{m_{10}}}$ bzw. $\left[\frac{D_{m_{10}}}{D_{m_{8,10}}}\right]$	+ 0,52	+ 0,50	+ 0,50	+ 0,50	+ 0,51	+ 0,54	+ 0,56	+ 0,58	+ 0,61	+ 0,64

Im Falle des Gleichgewichts gelten nun nach (258) und (259) zwischen den Gelenkwinkeln $\psi_{1,8}$, $\psi_{8,10}$ und den Verhältnissen der beiden Drehungsmomente $D_{m_{8,10}}$, $D_{m_{10}}$ die Beziehungen

$$(262)\quad \begin{aligned} \frac{D_{m_{8,10}}}{D_{m_{10}}} &= \frac{c_8' \sin \psi_{1,8} + c_{10}' \sin(\psi_{1,8} + \psi_{8,10})}{c_{10}' \sin(\psi_{1,8} + \psi_{8,10})} \\ \frac{D_{m_{10}}}{D_{m_{8,10}}} &= \frac{c_{10}' \sin(\psi_{1,8} + \psi_{8,10})}{c_8' \sin \psi_{1,8} + c_{10}' \sin(\psi_{1,8} + \psi_{8,10})}. \end{aligned}$$

Da für den langen Kopf des M. biceps brachii die Verhältnisse der beiden Drehungsmomente $D_{m_{8,10}}$ und $D_{m_{10}}$, wie die letzte Tabelle zeigt, schon gegeben sind, sobald man nur dem Winkel $\psi_{8,10}$ einen bestimmten Wert beilegt, so vereinfacht sich für diesen Muskel die Ableitung der Gleichgewichtshaltungen ganz wesentlich. Man braucht nur, je nachdem das erste oder zweite Verhältnis der beiden Drehungsmomente in Frage kommt, in die erste oder zweite der Formeln (262) die aus der obigen Tabelle sich ergebenden zusammengehörenden Werte dieses Verhältnisses und des Gelenkwinkels $\psi_{8,10}$ einzusetzen. Da auch die Werte der beiden Hauptstrecken c_8' und c_{10}' nach (233) bekannt sind, so bleibt dann als einzige Unbekannte in der Gleichung der Gelenkwinkel $\psi_{1,8}$ des Schultergelenks übrig, so daß man denselben berechnen kann.

Führt man die Rechnung für alle in der obigen Tabelle niedergelegten Wertepaare durch, so erhält man folgende zusammengehörende Werte der beiden Gelenkwinkel, welche bis auf halbe Grade abgerundet sind:

Beugungswinkel des Ellbogengelenks $\psi_{8,10}$	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
Schultergelenkwinkel $\psi_{1,8}$	0°	+ 2°	+ 4°	+ 4½°	+ 3½°	+ 2½°	+ 1°	− ½°	− 2°	− 3½°

Beugungswinkel des Ellbogengelenks $\psi_{8,10}$	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°
Schultergelenkwinkel $\psi_{1,8}$	− 5°	− 6°	− 7½°	− 8½°	− 9½°	− 10°	− 11°	− 11½°	− 12°

Beugungswinkel des Ellbogengelenks $\psi_{8,10}$	95°	100°	105°	110°	115°	120°	125°	130°
Schultergelenkwinkel $\psi_{1,8}$	− 12°	− 12°	− 11½°	− 11°	− 10½°	− 9½°	− 7½°	− 5°

In Figur 38 findet sich die gegenseitige Abhängigkeit der beiden Gelenkwinkel durch eine Kurve veranschaulicht, bei welcher die Abszisse und Ordinate eines jeden Kurvenpunktes zwei zusammengehörenden Werten des Ellbogengelenk- und Schultergelenkwinkels

proportional sind. Hätte man in der unter α) ausführlich auseinandergesetzten Weise sich die beiden Flächen verschafft, deren Durchdringungskurve zu den Gleichgewichtshaltungen des Armes führt, so

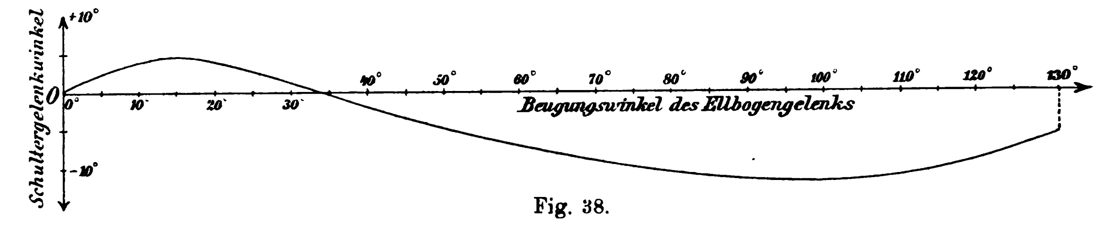


Fig. 38.

würde sich die Kurve in Figur 38 als die Projektion dieser Durchdringungskurve auf das ebene horizontale Koordinatensystem ergeben haben.

Die Winkelwerte in der letzten Tabelle bzw. die Koordinaten der Kurvenpunkte in Figur 38 geben nun Stellungen des Armes an, in denen es dem langen Kopf des M. biceps brachii bei fixiertem Radioulnargelenk überhaupt nur möglich ist, der Schwere das Gleichgewicht zu halten. Man erkennt aus denselben, daß bei geringer Beugung im Ellbogengelenk der Oberarm im Schultergelenk etwas nach vorn erhoben sein muß. Bei etwa 33° Beugungswinkel des Ellbogengelenks hängt dagegen der Oberarm vertikal nach unten, und bei darüber hinausgehender Beugung des Ellbogengelenks muß dann der Oberarm durchweg nach hinten im Schultergelenk gedreht sein, und zwar am meisten in der Nähe der rechtwinkligen Beugestellung des Unterarms, etwa $\psi_{8,10} = 95^0$ entsprechend. In Figur 39 finden sich einige der für den langen Kopf des M. biceps brachii charakteristischen Gleichgewichtshaltungen des Armes in derselben Weise aufgezeichnet, wie es in den Figuren 31 und 32 für die eingelenkigen Beuger und Strecker des Ellbogengelenks geschehen ist. Bei genügend langsamer Änderung der Spannung würde der Muskel bei seiner Kontraktion den Arm aus der äußersten Streckstellung nacheinander in diese Stellungen überführen.

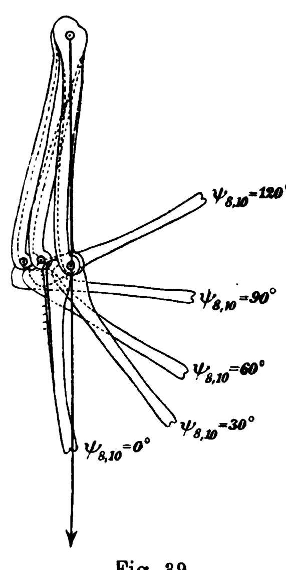


Fig. 39.

Nachdem die Gleichgewichtshaltungen für den langen Kopf des M. biceps brachii abgeleitet worden sind, erledigt sich die Bestimmung seiner Spannung für die verschiedenen Stellungen in der früheren Weise mit Hilfe der Formeln (235), (236), (232) und (234).

18. Die zu Beginn der Kontraktion eines Muskels eintretenden Gelenkbewegungen.

Wenn man sich bei der Untersuchung der Wirkung von Muskeln nicht mehr auf Gleichgewichtsprobleme beschränkt, sondern nach den Bewegungen fragt, welche infolge der Kontraktion eines oder mehrerer Muskeln eintreten, so hat man stets die Bewegungsgleichungen zu Rate zu ziehen. Denn die letzteren sind ja der exakte Ausdruck für die Beziehungen, welche zwischen den auf ein Gelenksystem einwirkenden Kräften einerseits und den an demselben hervorgebrachten Geschwindigkeiten und Beschleunigungen andererseits infolge der mechanischen Beschaffenheit der einzelnen Glieder und des Gelenkzusammenhanges unter den Gliedern bestehen müssen. Handelt es sich um ein n-gliedriges ebenes Gelenksystem, das vollkommen freie Beweglichkeit besitzt, so hat man die $n+2$ Gleichungen (163) auf Seite 128 des allgemeinen Teils der Untersuchung zugrunde zu legen. Bleibt dagegen während der Bewegung ein Punkt auf der Längsachse eines Gliedes fest, so daß sich dieses Glied nur um eine in diesem Punkte auf der Bewegungsebene senkrecht stehende Achse drehen kann, so hat man bei der Untersuchung der Muskelwirkung von den n Gleichungen (170) auf Seite 132 auszugehen. In dem besonderen, z. B. bei der Bewegung der Extremitäten gegen den feststehenden Rumpf eintretenden Falle, daß der feste Punkt auf der Längsachse des ersten (d. h. hier dem Rumpfe am nächsten liegenden) Gliedes liegt, nehmen diese Bewegungsgleichungen die bestimmte Form (171) auf Seite 133 an.

Setzt man nun zunächst voraus, daß das Gelenksystem sich in Ruhe befindet, und fragt nach der Anfangsbewegung, welche ein an demselben befindlicher Muskel infolge seiner Kontraktion aus der Ruhe bei Ausschluß aller übrigen Kräfte hervorbringen würde, so erfahren die Bewegungsgleichungen noch eine wesentliche Vereinfachung. Zunächst erkennt man, daß in den beiden ersten Gleichungen von (163) die Größen Q_{x_0} und Q_{y_0} den Wert Null annehmen, da ein sich kontrahierender Muskel nur mit inneren Kräften auf das Gelenksystem einwirkt. Es bleiben also auch im Falle freier Beweglichkeit des Systems nur noch n Bewegungsgleichungen übrig. Unter der Anfangsbewegung eines ruhenden Gelenksystems versteht man die Bewegung, welche in einer so kleinen Zeit stattfindet, daß es dabei zu keinen merklichen Geschwindigkeiten kommt. Die in den Bewegungsgleichungen vorkommenden Winkelgeschwindigkeiten φ_i' behalten daher ihren Anfangswert Null bei, und die von einzelnen Gliedern in dieser kleinen Zeit ausgeführten Drehungen sind den Winkelbeschleunigungen φ_i'' proportional. Wäre die Anfangsspannung des allein sich kontrahierenden Muskels bekannt, so wären damit auch die n Größen Q_{φ_n} in den Bewegungsgleichungen gegeben oder

ließen sich doch wenigstens durch direkte Messung an geeigneten Präparaten bestimmen; denn dieselben bedeuten ja nach den früheren Auseinandersetzungen nichts anderes als die Drehungsmomente, mit welchen der Muskel auf die n Glieder des Systems einwirkt. Es blieben daher in den Bewegungsgleichungen nur die n Winkelbeschleununigen φ_j'' als Unbekannte übrig. Die letzteren ließen sich also aus den Gleichungen berechnen.

Nun sind aber in der Regel die Spannungen der Muskeln von vornherein nicht bekannt. Wenn man die bewegende Wirkung ableiten will, welche ein allein sich kontrahierender Muskel aus der Ruhe hervorbringt, so ist es daher auch von untergeordnetem Interesse, das Ausmaß der Bewegung in jedem einzelnen Gelenk festzustellen, da dasselbe sich doch mit der Spannung des Muskels ändert. Man will vielmehr einen genauen Einblick in die Art der gleichzeitigen Bewegung der einzelnen Glieder gewinnen. Man will z. B. wissen, ob der Muskel in dem einen Gelenk eine Beugung und gleichzeitig in einem andern Gelenk eine Streckung hervorbringt, wie viel mal so groß die erstere Beugung als die letztere Streckung ist, usw. Derartige Fragen beziehen sich nur auf das Verhältnis der Anfangsdrehungen der einzelnen Glieder. Da die Anfangsdrehungen alle den Winkelbeschleunigungen φ_j'' in gleicher Weise proportional, d. h. mit dem gleichen Proportionalitätsfaktor behaftet sind, so wird das Verhältnis der Anfangsdrehungen zweier Glieder direkt gleich dem Verhältnis der diesen Gliedern zukommenden Winkelbeschleunigungen sein. Das Verhältnis zweier Winkelbeschleunigungen hängt aber nicht mehr von dem Werte der Anfangsspannung des Muskels ab. Wie man aus den Bewegungsgleichungen leicht erkennt, läßt sich dasselbe bestimmen, sobald man nur die Verhältnisse der n Drehungsmomente Q_{φ_n} des Muskels kennt. Da aber in jedem dieser Drehungsmomente die Spannung des Muskels als Faktor auftritt, so hebt sich dieselbe bei den Verhältnissen fort, und es bleibt in jedem Falle nur noch das Verhältnis der Arme der beiden entsprechenden Kräftepaare übrig.

Um die Bestimmung der Verhältnisse der Winkelbeschleunigungen auszuführen, verfährt man am besten so, daß man nach dem Nullsetzen der sämtlichen Winkelgeschwindigkeiten φ_j' zunächst die n Bewegungsgleichungen nach den Winkelbeschleunigungen φ_j'' als Unbekannte auflöst. Dann erhält man alle diese Unbekannten durch Quotienten dargestellt, welche in den Nennern übereinstimmen, während in jedem Gliede des Zählers eins der Drehungsmomente Q_{φ_n} als Faktor auftritt. Verschafft man sich nun durch Division zweier solcher Quotienten den Wert des Verhältnisses zweier Winkelbeschleunigungen, so fallen die gleichen Nenner der ursprünglichen Quotienten fort, und man hat jetzt im Zähler und im Nenner nur noch Glieder,

welche als Faktor je ein Drehungsmoment Q_{φ_n} besitzen. Dadurch, daß man Zähler und Nenner in diesem Ausdruck mit einem bestimmten dieser Drehungsmomente dividiert, erhält man schließlich das Verhältnis der beiden Winkelbeschleunigungen nur noch durch Verhältnisse von je zwei Drehungsmomenten dargestellt.

So kompliziert diese hiermit in groben Zügen geschilderte Methode der Ableitung der Verhältnisse der Anfangsdrehungen auch erscheinen mag, so einfach gestaltet sich dieselbe im speziellen Falle. Es soll daher im folgenden die Untersuchung am zweigliedrigen ebenen Gelenksystem fortgeführt werden. Die dabei erhaltenen Resultate lassen sich dann ohne weiteres auf die speziellen Verhältnisse des nur im Ellbogengelenk gegliederten Armes, des nur im Kniegelenk gegliederten Beins oder anderer am menschlichen Körper vorkommender zweigliedriger ebener Systeme übertragen.

α) Allgemeine Untersuchung der Anfangsbewegungen am zweigliedrigen ebenen Gelenksystem. Kinetisches Maß eines Muskels.

Unter der Voraussetzung, daß das erste der beiden zunächst wieder mit 1 und 2 numerierten Glieder sich nur um eine durch einen festen Punkt O_1 der Längsachse des ersten Gliedes gehende Achse drehen kann, die der Achse des Zwischengelenks parallel läuft (vgl. Fig. 40), erhält man die beiden Bewegungsgleichungen (72) auf Seite 55. Setzt man in denselben die Winkelgeschwindigkeiten φ_1' und φ_2' gleich Null und für die Größen Q_{φ_1} und Q_{φ_2} die Buchstaben D_1 und D_2, um damit anzudeuten, daß dieselben die auf die beiden Glieder ausgeübten Drehungsmomente darstellen, und ersetzt in der ersten Gleichung $\cos(\varphi_1-\varphi_2)$ durch $\cos(\varphi_2-\varphi_1)$, so nehmen sie die spezielle Form an

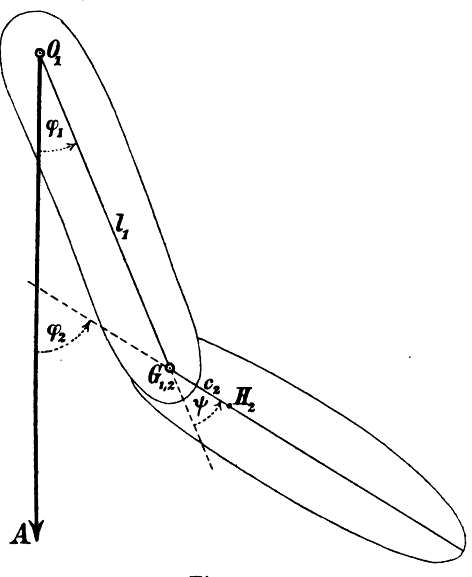


Fig. 40.

$$(263)\quad \begin{aligned} m_0\lambda_1^2\cdot\varphi_1''+m_0l_1c_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)\cdot\varphi_2''&=D_1\\ m_0\lambda_2^2\cdot\varphi_2''+m_0l_1c_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)\cdot\varphi_1''&=D_2.\end{aligned}$$

Dabei bedeuten nach dem früheren l_1 den Abstand des Mittelpunktes $G_{1,2}$ des Zwischengelenks vom festen Punkte O_1, c_2 die Ent-

fernung des Hauptpunktes H_2 des zweiten Gliedes von $G_{1,2}$, λ_1 den Trägheitsradius des ersten reduzierten Systems in bezug auf die Achse durch O_1, λ_2 den Trägheitsradius des zweiten reduzierten Systems in bezug auf die Gelenkachse $G_{1,2}$, D_1 das von sämtlichen Kräften auf das erste Glied, und D_2 das von demselben auf das zweite Glied ausgeübte resultierende Drehungsmoment, und m_0 die Gesamtmasse des Systems.

In der Form (263) der Gleichungen sind zunächst die Winkel φ_1 und φ_2 verwendet, welche die Längsachsen der beiden Glieder mit einer Geraden $O_1 A$ in der Bewegungsebene bilden (vgl. Fig. 40), und dementsprechend bedeuten φ_1'' und φ_2'' die Winkelbeschleunigungen, mit welchen die Längsachsen der beiden Glieder ihre Richtung innerhalb der Bewegungsebene ändern. Der Winkel φ_1 kann nun direkt auch als Gelenkwinkel in dem Gelenk O_1 aufgefaßt werden, wenn man annimmt, daß das erste Glied mit einem im Raume festgestellten Körperteil durch das Gelenk O_1 verbunden ist, und die Gerade $O_1 A$ diesem Körperteil angehört. Der Winkel ψ des Zwischengelenks, welchen die Längsachse des zweiten Gliedes mit der Verlängerung der Längsachse des ersten Gliedes bildet, ist zwar nicht mit φ_2 identisch; er hängt aber in sehr einfacher Weise mit den beiden Winkeln φ_2 und φ_1 zusammen, indem er gleich der Differenz beider ist. Desgleichen stellt sich auch die Winkelbeschleunigung ψ'' im Zwischengelenk als Differenz der beiden Winkelbeschleunigungen φ_2'' und φ_1'' dar.

Man kann daher in die Gleichungen (263) auch den Gelenkwinkel ψ an Stelle von φ_2, und die Winkelbeschleunigung ψ'' der Drehung im Zwischengelenk an Stelle von φ_2'' einführen und erhält dann

$$(264)\qquad \begin{aligned} m_0(\lambda_1^2 + l_1 c_2 \cos\psi)\cdot\varphi_1'' + m_0 l_1 c_2 \cos\psi\cdot\psi'' &= D_1 \\ m_0(\lambda_2^2 + l_1 c_2 \cos\psi)\cdot\varphi_1'' + m_0\lambda_2^2\cdot\psi'' &= D_2. \end{aligned}$$

Betrachtet man diese beiden Relationen als Gleichungen für die Unbekannten φ_1'' und ψ'', so kann man durch Auflösen derselben zunächst beide durch die übrigen Größen ausdrücken. Man erhält dann

$$(265)\qquad \begin{aligned} \varphi_1'' &= \frac{\lambda_2^2\cdot D_1 - l_1 c_2 \cos\psi\cdot D_2}{m_0[(\lambda_1\lambda_2)^2 - (l_1 c_2 \cos\psi)^2]} \\ \psi'' &= \frac{(\lambda_1^2 + l_1 c_2\,\psi)\cdot D_2 - (\lambda_2^2 + l_1 c_2 \cos\psi)\cdot D_1}{m_0[(\lambda_1\lambda_2)^2 - (l_1 c_2 \cos\psi)^2]}. \end{aligned}$$

Dividiert man beide Werte durcheinander und kürzt den erhaltenen Quotienten mit D_2, so erhält man schließlich für das Verhältnis der beiden Winkelbeschleunigungen den Wert

$$(266)\qquad \frac{\varphi_1''}{\psi''} = \frac{\lambda_2^2\dfrac{D_1}{D_2} - l_1 c_2 \cos\psi}{(\lambda_1^2 + l_1 c_2 \cos\psi) - (\lambda_2^2 + l_1 c_2 \cos\psi)\dfrac{D_1}{D_2}}.$$

Man sieht also, daß auch das Verhältnis der Winkelbeschleunigungen in den beiden Gelenken O_1 und $G_{1,2}$, und infolgedessen das Verhältnis der Anfangsdrehungen in diesen Gelenken nur von dem Verhältnis der Drehungsmomente abhängt.

Werden die beiden Drehungsmomente D_1 und D_2 von einem einzigen Muskel hervorgebracht, so ist ihr Verhältnis von der Spannung desselben unabhängig und gleich dem Verhältnis der Arme der beiden Kräftepaare, mit welchen der Muskel auf die beiden Glieder einwirkt.

Während die Drehungsmomente eines Muskels als ein statisches Maß desselben aufgefaßt werden konnten (vgl. hierzu 16a)), stellt der Ausdruck auf der rechten Seite von (266) ein Maß für das Verhältnis der Anfangsdrehungen dar, welche der Muskel bei seiner Kontraktion aus der Ruhe in den beiden Gelenken hervorbringt. Dieses Verhältnis ist ganz unabhängig von der Spannung des Muskels und hängt außer von dem Gelenkwinkel des Zwischengelenks nur noch von dem Verhältnis der Arme seiner Kräftepaare ab. Man kann dasselbe als ein **kinetisches Maß** für die Wirkungsweise des Muskels auffassen.

Das kinetische Maß eines Muskels hängt in dem angenommenen Falle einer festen Drehungsachse nur insofern von dem Winkel φ_1 des Gelenks O_1 ab, als der letztere das Verhältnis seiner Drehungsmomente, d. h. also sein statisches Maß beeinflußt. Da die Strecken l_1 und c_2 nur in der Verbindung $l_1 c_2$ auftreten, so wird weiterhin der Einfluß der Dimensionen und Massen der beiden Glieder, sowie der Massenverteilung innerhalb eines jeden scheinbar durch drei Größen dargestellt, nämlich durch die Quadrate λ_1^2 und λ_2^2 der zu den beiden reduzierten Systemen gehörenden Trägheitsmomente und das Produkt $l_1 c_2$. Es läßt sich aber leicht zeigen, daß diese drei Größen schon durch zwei andere Konstanten vollständig ersetzt werden können, welche im vorliegenden Falle ausreichen, um die Abhängigkeit der Wirkung eines Muskels von den rein mechanischen Eigenschaften der beiden Glieder zu charakterisieren. Dividiert man nämlich den Zähler und Nenner des Ausdrucks auf der rechten Seite von (266) durch $l_1 c_2$, so nimmt das kinetische Maß die Form an

$$(267)\qquad \frac{\varphi_1''}{\psi''} = \frac{\frac{\lambda_2^2}{l_1 c_2} \cdot \frac{D_1}{D_2} - \cos\psi}{\left(\frac{\lambda_1^2}{l_1 c_2} + \cos\psi\right) - \left(\frac{\lambda_2^2}{l_1 c_2} + \cos\psi\right) \cdot \frac{D_1}{D_2}}.$$

Die beiden Konstanten $\frac{\lambda_1^2}{l_1 c_2}$ und $\frac{\lambda_2^2}{l_1 c_2}$, die jetzt allein noch in der Formel vorhanden sind, besitzen nun eine verhältnismäßig einfache Bedeutung, welche es ermöglicht, dieselben in jedem speziellen Falle leicht zu bestimmen.

Da λ_2 der Trägheitsradius des zweiten reduzierten Systems inbezug auf die Achse des Zwischengelenks, und c_2 der Abstand des Schwerpunktes dieses Systems (Hauptpunkt des zweiten Gliedes) von derselben Achse ist, so bedeutet $\frac{\lambda_2^2}{c_2}$ die Länge σ_2 des mathematischen Pendels, welches die gleiche Schwingungsdauer besitzt wie dieses System um die Achse des Zwischengelenks. Das zweite reduzierte System unterscheidet sich von dem zweiten Gliede nur dadurch, daß in einem Punkte der Achse des Zwischengelenks die Masse des ersten Gliedes konzentriert gedacht ist. Durch diese an der Achse selbst konzentrierte Masse kann aber die Schwingungsdauer nicht geändert werden; daher bedeutet σ_2 auch zugleich die Länge des mathematischen Pendels, welches die gleiche Schwingungsdauer aufweist, als das zweite Glied selbst bei seinen Schwingungen um die Zwischengelenksachse, nachdem man die letztere horizontal gestellt hat. Führt man die Größe σ_2 ein, so nimmt die zweite Konstante $\frac{\lambda_2^2}{l_1 c_2}$ die einfachere Form $\frac{\sigma_2}{l_1}$ an.

Ferner wird die Länge σ_1 des mathematischen Pendels, welches die gleiche Schwingungsdauer besitzt als das erste reduzierte System um die horizontal gestellte feste Achse, durch $\frac{\lambda_1^2}{c_1}$ gemessen, wenn man unter c_1 den Abstand des Schwerpunktes des ersten reduzierten Systems (Hauptpunkt des ersten Gliedes) von dieser festen Achse versteht. Man kann daher zunächst die erste Konstante $\frac{\lambda_1^2}{l_1 c_2}$ in der Form $\frac{\sigma_1}{l_1 \frac{c_2}{c_1}}$ schreiben. Nun bedeutet nach dem früheren (vgl. S. 247) der Nenner $l_1 \frac{c_2}{c_1}$ dieses Quotienten den Abstand eines festen Punktes der Unterarmlängsachse vom Mittelpunkte des Zwischengelenks, welcher mit dem festen Mittelpunkte des ersten Gelenks und dem Gesamtschwerpunkte S_0 des ganzen zweigliedrigen Systems bei allen Gelenkstellungen in einer geraden Linie liegt. Für diesen Punkt auf der Längsachse des zweiten Gliedes ist der Name „Richtpunkt" desselben eingeführt worden. Bezeichnet man seine Entfernung vom Mittelpunkte des Zwischengelenks mit ϱ_2, so geht die erste Konstante über in $\frac{\sigma_1}{\varrho_2}$.

Ersetzt man also in der angedeuteten Weise die beiden Konstanten durch die beiden Quotienten je zweier Strecken von anschaulicher Bedeutung, so nimmt das kinetische Maß für die Wirkung aller am zweigliedrigen System angreifenden Muskeln endlich die Form an

$$(268)\qquad \frac{\varphi_1''}{\psi''} = \frac{\frac{\sigma_2}{l_1} \cdot \frac{D_1}{D_2} - \cos\psi}{\left(\frac{\sigma_1}{\varrho_2} + \cos\psi\right) - \left(\frac{\sigma_2}{l_1} + \cos\psi\right) \cdot \frac{D_1}{D_2}}.$$

Damit ist das kinetische Maß für die Wirkung der Muskeln im vorliegenden Falle auf den einfachsten Ausdruck gebracht. Es ist aber wohl zu beachten, daß dies nur für diejenigen Muskeln gilt, welche den oben gemachten Voraussetzungen entsprechen, und daß für die Wirkung der Muskeln unter anderen Verhältnissen auch der Ausdruck für das kinetische Maß sich ändert.

Die obigen Formeln lassen deutlich die schon früher angeführte Tatsache erkennen, daß die Drehungsmomente, mit welchen ein Muskel auf die beiden Körperteile einwirkt, oder gar nur ihr Verhältnis kein ausreichendes Maß für die bewegende Wirkung des Muskels abgeben können; denn sonst müßte das Verhältnis der Winkelbeschleunigungen, d. h. also das Verhältnis der Anfangsdrehungen in den Gelenken, dem Verhältnis der Drehungsmomente proportional sein. Man findet nun in den Formeln deutlich zum Ausdruck gebracht, in welcher Weise die bei der Kontraktion eines Muskels eintretende Bewegung des zweigliedrigen Systems von den verschiedenen Faktoren beeinflußt wird. Während das Verhältnis der beiden Drehungsmomente D_1 und D_2 von der Insertionsweise und dem Verlauf der resultierenden Zugrichtung des Muskels, sowie von der Ausgangsstellung in den Gelenken abhängt, wird der Einfluß der Dimensionen und Massen der beiden Körperteile, sowie der Massenverteilung innerhalb eines jeden allein durch die beiden Längenverhältnisse $\frac{\sigma_1}{\varrho_2}$ und $\frac{\sigma_2}{l_1}$ dargestellt; endlich gibt der Winkel ψ des Zwischengelenks die Stellung der beiden Körperteile zueinander an.

Sind die Bedingungen, unter denen ein Muskel am zweigliedrigen Gelenksystem zur Wirkung gelangt, komplizierter, als sie für das spezielle zweigliedrige System vorausgesetzt wurden, so reicht ein einziges Verhältnis zweier Winkelbeschleunigungen von verschiedenen Gelenken im allgemeinen noch nicht aus, um die kinetische Wirkungsweise des Muskels in erschöpfender Weise darzustellen und zu messen. Wenn z. B. das Gelenk, in welchem das ganze System sich gegen einen feststehenden Körperteil drehen kann, nicht mehr wie bei einem Scharniergelenk zwangläufig ist, sondern wie bei einem Kugelgelenk drei Grade von Bewegungsfreiheit besitzt, so wird die Anfangsbewegung in demselben nicht durch eine Winkelbeschleunigung charakterisiert. Es gehören hierzu drei Winkelbeschleunigungen, etwa die im allgemeinen Teil unter 11) eingeführten Winkelbeschleunigungen φ_1'', ϑ_1'' und ϱ_1''. Ist dabei das Zwischengelenk aber immer noch ein Scharniergelenk, dessen Winkelbeschleunigung die Größe ψ'' besitzt, so stellen dann die Werte der drei Verhältnisse $\frac{\varphi_1''}{\psi''}$, $\frac{\vartheta_1''}{\psi''}$ und $\frac{\varrho_1''}{\psi''}$ zusammen das vollständige kinetische Maß für die Wirkung eines am zweigliedrigen System angreifenden Muskels dar.

Ist ferner die Voraussetzung, daß der Körperteil, an welchem das System eingelenkt ist, fest bleibt, nicht mehr mit genügender Annäherung erfüllt, sondern führt dieser wiederum Drehungen um eine feste Achse gegen einen anderen bei der Kontraktion nahezu festbleibenden Körperabschnitt aus, wobei χ'' die Winkelbeschleunigung dieser Gelenkbewegung ist, so wird das kinetische Maß für die Muskelwirkung durch die Verhältnisse $\frac{\chi''}{\varphi_1''}$ und $\frac{\varphi_1''}{\psi''}$ dargestellt, falls alle Gelenke zwangläufig sind. Im Grunde hat man es aber im letzten Falle nicht mehr mit einem zweigliedrigen, sondern mit einem dreigliedrigen Gelenksystem zu tun.

Im allgemeinen kann man sagen, daß sowohl jede Vergrößerung der Bewegungsfreiheit in einem oder mehreren der Gelenke, als auch jede Vermehrung der Glieder des Systems auch eine Vergrößerung der Anzahl der Verhältnisse je zweier Winkelbeschleunigungen nach sich zieht, welche zur vollständigen Charakterisierung der Wirkungsweise eines Muskels notwendig sind.

b) Kinetisches Maß für die Muskeln des Armes.

α) Allgemeiner Ausdruck für das kinetische Maß der Armmuskeln.

Zur Ableitung des kinetischen Maßes einiger Armmuskeln sollen wieder die am Ende von 17a) angegebenen Maße für einen bestimmten Arm verwendet werden. Dabei mögen wie früher alle Größen entweder den Index 8 oder 10 oder beide Indizes tragen, je nachdem sie sich auf den Oberarm, das System Unterarm + Hand oder den ganzen Arm beziehen; ferner sollen zwar wieder die Hauptstrecken durch c_8' und c_{10}' bezeichnet werden, um damit anzudeuten, daß sie zu den Hauptpunkten H_8' und H_{10}' des vom übrigen Körper losgelöst gedachten Armes gehören. Im übrigen soll aber bei den ebenfalls auf den isolierten Arm bezüglichen Trägheitsradien λ_8, λ_{10} und den Größen σ_8, σ_{10} und ϱ_{10} der Strich fortgelassen werden, da ja ein Irrtum über die Bedeutung derselben wohl ausgeschlossen ist.

Aus den auf Seite 243 angegebenen Gewichten des Oberarms und des Systems Unterarm + Hand von 1,908 kg und 1,775 kg folgen zunächst durch Division mit 981,11 für die Massenzahlen m_8, m_{10} und $m_{8,10}$ die Werte

$$(269) \qquad \begin{aligned} m_8 &= 0{,}001\,945 \\ m_{10} &= 0{,}001\,809 \\ m_{8,10} &= 0{,}003\,754\,. \end{aligned}$$

Ferner hatte sich an dem betreffenden Präparat für den Trägheitsradius $\varkappa_8$ des Oberarms in bezug auf die zu den Gelenkachsen parallele Achse durch seinen Schwerpunkt S_8 die Länge von 9,1 cm

und für den Trägheitsradius $\varkappa_{10}$ des Systems Unterarm + Hand in bezug auf die zu den Gelenksachsen parallele Achse seines Schwerpunktes S_{10} die Länge von 12,4 cm herausgestellt. Berücksichtigt man noch, daß nach den früheren Angaben auf Seite 243 und 244 die Länge l_8 des Oberarms 30,3 cm beträgt und den Entfernungen r_8 und r_{10} der beiden Schwerpunkte von den proximalen Gelenken die Werte 13,6 cm und 19,0 cm zukommen, so hat man alle Mittel, um die Trägheitsradien λ_8 und λ_{10} der beiden reduzierten Systeme zu berechnen. Denn nach der Bedeutung und Zusammensetzung der reduzierten Systeme ergeben sich dieselben aus den Formeln (vgl. hierzu auch Seite 41)

$$(270)\qquad \begin{aligned} m_0\lambda_8^2 &= m_8(\varkappa_8^2 + r_8^2) + m_{10}l_8^2 \\ m_0\lambda_{10}^2 &= m_{10}(\varkappa_{10}^2 + r_{10}^2). \end{aligned}$$

Setzt man in diesen Formeln die angeführten Werte ein, so erhält man

$$(271)\qquad \begin{aligned} \lambda_8 &= 24{,}11 \text{ cm} \\ \lambda_{10} &= 15{,}75 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich weiterhin unter Berücksichtigung von (233) und (239)

$$(272)\qquad \begin{aligned} \sigma_8 &= \frac{\lambda_8^2}{c_8'} = 26{,}85 \text{ cm} \\ \sigma_{10} &= \frac{\lambda_{10}^2}{c_{10}'} = 27{,}08 \text{ cm} \\ \varrho_{10} &= \frac{c_{10}'}{c_8'}\, l_8 = 12{,}82 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Man erhält daher zur Berechnung des kinetischen Maßes der Armmuskeln nach (268) die bestimmte Formel

$$(273)\qquad \frac{\psi_{1,8}''}{\psi_{8,10}''} = \frac{0{,}894\,\frac{D_{m_8}}{D_{m_{10}}} - \cos\psi_{8,10}}{(2{,}095 + \cos\psi_{8,10}) - (0{,}894 + \cos\psi_{8,10})\,\frac{D_{m_8}}{D_{m_{10}}}}.$$

Hierbei wird das Verhältnis der auf Oberarm und Unterarm ausgeübten Drehungsmomente D_{m_8} und $D_{m_{10}}$ zur Berechnung verwendet. Man kann aber auch nach (256) an Stelle des ersteren Drehungsmomentes das leichter direkt zu bestimmende Drehungsmoment $D_{m_{8,10}}$ einführen, mit welchem der Muskel auf den ganzen Arm einwirken würde, sobald das Ellbogengelenk festgestellt wäre. Dann erhält man aus (273) die folgende Formel zur Berechnung des kinetischen Maßes der Armmuskeln

$$(274)\qquad \frac{\psi_{1,8}''}{\psi_{8,10}} = \frac{0{,}894\,\frac{D_{m_{8,10}}}{D_{m_{10}}} - (0{,}894 + \cos\psi_{8,10})}{(2{,}989 + 2\cos\psi_{8,10}) - (0{,}894 + \cos\psi_{8,10})\,\frac{D_{m_{8,10}}}{D_{m_{10}}}}.$$

β. Eingelenkige Muskeln des Ellbogengelenks.

Die eingelenkigen Muskeln des Ellbogengelenks sind nach dem früheren dadurch vor den übrigen Muskeln ausgezeichnet, daß das Verhältnis der beiden Drehungsmomente D_{m_8} und $D_{m_{10}}$ den Wert -1 besitzt oder, was sich damit in Übereinstimmung befindet, daß das Verhältnis der Drehungsmomente $D_{m_{8,10}}$ und $D_{m_{10}}$ konstant gleich Null ist. Verwendet man das eine oder andere Verhältnis und setzt den entsprechenden konstanten Wert in (273) oder (274) ein, so erhält man für das kinetische Maß der eingelenkigen Ellbogenmuskeln den speziellen Ausdruck

$$(275) \qquad \frac{\psi''_{1,8}}{\psi''_{8,10}} = - \frac{0{,}894 + \cos\psi_{8,10}}{2{,}989 + 2\cos\psi_{8,10}}.$$

Diese Formel gilt für alle Muskeln, welche allein über das Ellbogengelenk hinwegziehen, gleichgültig ob sie Beuger oder Strecker desselben sind. Wie man sieht, treten die besonderen Werte der Drehungsmomente in der Formel gar nicht mehr auf, trotzdem sie natürlich für verschiedene eingelenkige Muskeln im allgemeinen verschieden sind. Die einzige veränderliche Größe, von welcher das Verhältnis der Winkelbeschleunigungen abhängt, ist der Ellbogengelenkwinkel $\psi_{8,10}$. Man hat daher das Resultat, daß alle eingelenkigen Muskeln des Ellbogengelenks, ganz unabhängig von ihrer Ansatzweise und der Lage ihrer Insertionsstellen, bei alleiniger Kontraktion aus der Ruhe Anfangsdrehungen im Schulter- und Ellbogengelenk hervorbringen, welche bei gleicher Beugestellung des Ellbogengelenks stets das gleiche Verhältnis besitzen. Da der Wert dieses Verhältnisses im allgemeinen von Null verschieden ist, so erkennt man hieraus gleichzeitig, daß ein eingelenkiger Muskel des Ellbogengelenks bei alleiniger Kontraktion nicht nur Bewegung im Ellbogengelenk, sondern auch Bewegung im Schultergelenk hervorruft, über das er gar nicht hinwegzieht. Diese Tatsache, daß ein Muskel auch auf ein Gelenk einwirken kann, welches scheinbar gar nicht in seinem Wirkungsbereich liegt, ist von fundamentaler Bedeutung für die Beurteilung der Wirkungsweise eines Muskels; sie ist eine ganz allgemeine Erscheinung, wie sich bei der Behandlung anderer Muskeln herausstellen wird.

Durch den Wert des Verhältnisses der Anfangsdrehungen in den beiden Gelenken ist nun noch nicht der Sinn dieser Drehungen selbst gegeben. Nach den früheren Festsetzungen ist die Beugung im Ellbogengelenk als positive, die Streckung als negative Gelenkdrehung aufzufassen. Beim Schultergelenk bedeutet das positive Vorzeichen, daß die Drehung nach vorn, d. h. im Sinne einer Erhebung (Beugung) des Oberarms stattfindet; die Rückwärtsdrehung (Streckung) des Oberarms ist daher mit dem negativen Vorzeichen in Rechnung zu ziehen. Stellt sich nun heraus, daß bei einer bestimmten Ausgangsstellung

des Armes das Drehungsverhältnis einen positiven Wert besitzt, so kann es sich dabei entweder um Beugung oder um Streckung in beiden Gelenken handeln. Ist dagegen das Drehungsverhältnis negativ, so ist entweder die Beugung im Ellbogengelenk von einer Streckung im Schultergelenk begleitet, oder es findet Streckung im Ellbogengelenk und gleichzeitig Beugung im Schultergelenk statt. Demnach scheint es beinahe, als ob man durch den Wert des Verhältnisses der beiden Anfangsdrehungen noch nicht in eindeutiger Weise auf den Sinn dieser Drehungen schließen könnte. Eine solche Zweideutigkeit in der Bestimmung der Anfangsbewegungen in den Gelenken besteht aber durchaus nicht; denn aus der Lage des Muskels zum Ellbogengelenk kann man stets die im Ellbogengelenk hervorgebrachte Drehung erkennen. Ein auf der Beugeseite der Ellbogenachse vorüberziehender Muskel, der nicht auch gleichzeitig noch über das Schultergelenk hinwegzieht, kann das Ellbogengelenk nur beugen, und ein auf der Streckseite das Gelenk überspannender eingelenkiger Muskel kann es nur strecken. Nicht ganz so einfach ist die Entscheidung bei mehrgelenkigen Muskeln zu treffen. Es wird sich jedoch zeigen, daß auch bei diesen immer in eindeutiger Weise über den Drehungssinn in den beiden Gelenken entschieden werden kann.

Um einen Überblick über die mit dem Beugungswinkel $\psi_{8,10}$ wechselnde Größe des Drehungsverhältnisses zu geben, ist der Wert dieses Verhältnisses, wie er sich aus (275) berechnet, für alle Beugungswinkel von 10° zu 10° in der folgenden Tabelle eingetragen worden:

Beugungswinkel $\psi_{8,10}$ des Ellbogengelenks	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°
Verhältnis $\frac{\psi''_{1,8}}{\psi''_{8,10}}$ der Anfangsdrehungen	— 0,38	— 0,38	— 0,38	— 0,37	— 0,37	— 0,36	— 0,35

Beugungswinkel $\psi_{8,10}$ des Ellbogengelenks	70°	80°	90°	100°	110°	120°	130°
Verhältnis $\frac{\psi''_{1,8}}{\psi''_{8,10}}$ der Anfangsdrehungen	— 0,34	— 0,32	— 0,30	— 0,27	— 0,24	— 0,20	— 0,15

Aus dieser Tabelle erkennt man zunächst, daß die beiden Drehungen stets in entgegengesetztem Sinne vor sich gehen. Bewirkt der Muskel oder eine ganze Gruppe eingelenkiger Ellbogenmuskeln Beugung des Ellbogengelenks, so stellt sich gleichzeitig Drehung nach hinten, d. h. Streckung, im Schultergelenk ein. Dreht dagegen die Muskelgruppe den Unterarm gegen den Oberarm im Sinne einer Streckung im Ellbogengelenk, so wird gleichzeitig der Oberarm im Schulter-

gelenk nach vorn gedreht, d. h. gebeugt. Ein eingelenkiger Beuger des Ellbogengelenks ist also gleichzeitig Strecker des Schultergelenks, und ein eingelenkiger Strecker des Ellbogengelenks ist gleichzeitig Beuger des Schultergelenks.

Man erkennt weiterhin aus der Tabelle, daß der absolute Wert des Drehungsverhältnisses mit zunehmendem Beugungswinkel $\psi_{8,10}$ abnimmt, und umgekehrt, daß derselbe bei abnehmender Beugung, d. h. bei zunehmender Streckung des Ellbogengelenks, wächst. In der äußersten im Leben etwa noch vorkommenden Beugestellung, welche ungefähr dem Werte 130^0 für den Winkel $\psi_{8,10}$ entspricht, ist der absolute Wert des Drehungsverhältnisses schon beträchtlich unter den Anfangswert herabgesunken. Aus der Formel (275) kann man den Winkel berechnen, für welchen es schließlich den Wert Null annehmen würde. Wie man sieht, muß der Kosinus desselben den Wert $-0{,}894$ haben; dann wird der Zähler in dem Ausdruck für das kinetische Maß gleich Null. Hieraus ergibt sich ein Beugungswinkel von $153^0\,20'$, d. h. also ein Winkel, der zu einer im Ellbogengelenk nicht mehr erreichbaren Stellung gehört. Es kann also theoretisch genommen der Fall gar nicht eintreten, daß ein eingelenkiger Muskel des Ellbogengelenks bei alleiniger Kontraktion aus der Ruhe nicht auch gleichzeitig das Schultergelenk etwas in Drehung versetzte.

Da der absolute Wert des Drehungsverhältnisses für alle Ausgangsstellungen des Armes kleiner als 1 ist, so findet im Schulter-

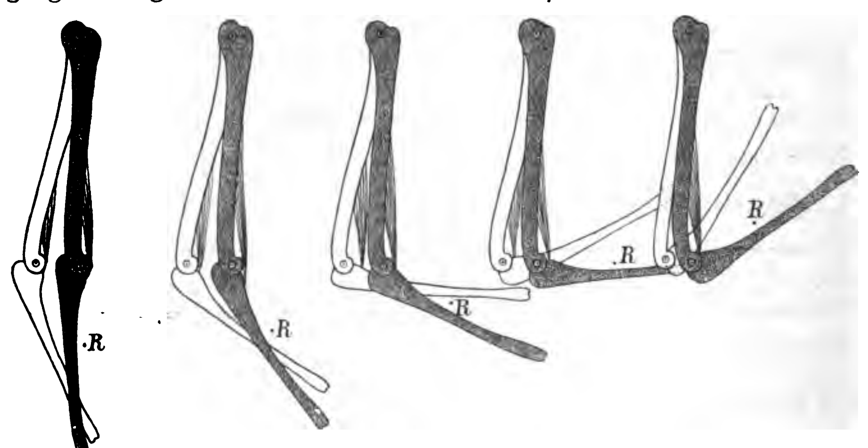


Fig. 41.

gelenk immer eine geringere Drehung als im Ellbogengelenk statt. Die erstere ist aber keineswegs so gering, daß sie gegenüber der Beugung oder Streckung des Ellbogengelenks zu vernachlässigen wäre; denn sie beträgt in der Nähe der äußersten Streckstellung beinahe $^4/_{10}$ der letzteren.

Um sich eine klare Anschauung von der hieraus sich ergebenden Anfangsbewegung verschaffen zu können, ist in Figur 41 in leicht verständlicher Weise die Anfangsbewegung des Armes bei alleiniger Kontraktion eines eingelenkigen Beugers des Ellbogengelenks, etwa des M. brachialis, für verschiedene Ausgangsstellungen dargestellt worden. Die dunkler gezeichnete Stellung bedeutet immer die Anfangsstellung und die hellere die Endstellung, und zwar unter der Voraussetzung, daß im Ellbogengelenk eine Beugung von 30° infolge der Kontraktion des Muskels stattgefunden hat, und dabei das Drehungsverhältnis ungeändert geblieben ist. Trotzdem diese Annahme nicht genau zutrifft, kann man sich doch mit ihrer Hilfe eine genaue Vorstellung von der Änderung des Drehungsverhältnisses mit der Ausgangsstellung verschaffen.

In Figur 42 finden sich in ganz entsprechender Weise für eine Reihe von Ausgangsstellungen die Anfangsbewegungen des Armes

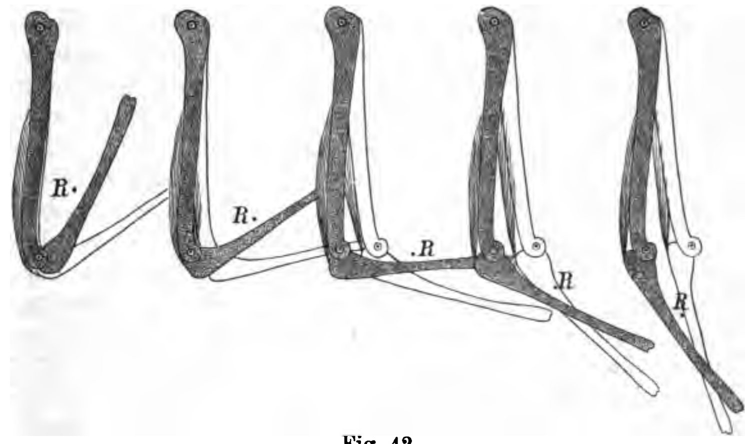


Fig. 42.

veranschaulicht, welche durch einen eingelenkigen Strecker des Ellbogengelenks, d. h. also einen der beiden eingelenkigen Köpfe des M. triceps brachii oder auch durch beide zusammen bei isolierter Kontraktion aus der Ruhe hervorgebracht werden.

γ) Eingelenkige Muskeln des Schultergelenks.

Da die eingelenkigen Muskeln des Schultergelenks kein Drehungsmoment auf den Unterarm ausüben, so ist $D_{m_{10}}$ gleich Null und infolgedessen der Wert des Verhältnisses der beiden Drehungsmomente sowohl in dem Ausdruck auf der rechten Seite von (273) als in dem auf der rechten Seite von (274) unendlich groß. Die reziproken Werte dieser Verhältnisse zweier Drehungsmomente haben dagegen den Wert Null. Es empfiehlt sich daher, vorher Zähler und Nenner in (273) oder (274) mit dem entsprechenden reziproken Verhältnis

der beiden Drehungsmomente zu multiplizieren und dann für dasselbe seinen Wert einzusetzen. Man erhält auf diese Weise für das kinetische Maß der nur über das Schultergelenk hinwegziehenden Muskeln den speziellen Ausdruck

$$\frac{\psi''_{1,8}}{\psi''_{8,10}} = -\frac{0{,}894}{0{,}894 + \cos\psi_{8,10}}. \tag{276}$$

Aus dieser Formel erkennt man zunächst, daß jeder eingelenkige Schultergelenkmuskel auch auf das Ellbogengelenk drehend einwirkt, über welches er gar nicht hinwegzieht. Beachtet man, daß im Nenner der Kosinus des Ellbogenwinkels nach dem früheren (vgl. S. 280) nicht bis zu dem negativen Wert — 0,894 heruntersinken kann, so sieht man weiter, daß das Drehungsverhältnis für alle Stellungen des Armes einen negativen Wert besitzt. Es werden also auch bei der Kontraktion eines derartigen Muskels die Anfangsdrehungen in den beiden Gelenken verschiedenen Drehungssinn besitzen. Zieht ein Muskel auf der Vorderseite (Beugeseite) über das Schultergelenk hinweg, wie etwa die vorderen Fasern des M. deltoideus, so wird er das Schultergelenk beugen und gleichzeitig das Ellbogengelenk strecken. Überspannt ein Muskel dagegen das Schultergelenk hinten, wie z. B. der M. coracobrachialis, so wird er das Schultergelenk strecken und gleichzeitig das Ellbogengelenk beugen. Bemerkenswert ist, daß, wie man aus Formel (276) erkennt, das Verhältnis der Anfangsdrehungen auch bei einem eingelenkigen Muskel des Schultergelenks nur von dem Winkel $\psi_{8,10}$ des Ellbogengelenks abhängig ist, trotzdem der Muskel gar nicht über dasselbe hinwegzieht. Die genauen Werte des Verhältnisses dieser Gelenkbewegungen sind für alle um je 10° Beugungswinkel im Ellbogengelenk voneinander verschiedene Haltungen des Armes in der folgenden Tabelle niedergelegt. Dabei finden sich nur die Werte des Verhältnisses $\frac{\psi''_{1,8}}{\psi_{8,10}}$ angegeben, welche kleiner als 1 sind. In den Fällen, wo dieses Verhältnis größer als 1 ausfällt, sind die Werte des reziproken Verhältnisses $\frac{\psi''_{8,10}}{\psi''_{1,8}}$ in die Tabelle eingetragen und zum Unterschied von den anderen mit einer eckigen Klammer umgeben worden:

Beugungswinkel $\psi_{8,10}$ des Ellbogengelenks	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°
Verhältnis $\frac{\psi''_{1,8}}{\psi''_{8,10}}$ oder $\left[\frac{\psi''_{8,10}}{\psi''_{1,8}}\right]$ der Anfangsdrehungen	— 0,47	— 0,48	— 0,49	— 0,51	— 0,54	— 0,58	— 0,64

Beugungswinkel $\psi_{8,10}$ des Ellbogengelenks	70°	80°	90°	100°	110°	120°	130°
Verhältnis $\frac{\psi''_{1,8}}{\psi''_{8,10}}$ oder $\left[\frac{\psi''_{8,10}}{\psi''_{1,8}}\right]$ der Anfangsdrehungen	— 0,72	— 0,84	— 1	[—0,80]	[—0,62]	[—0,44]	[—0,28]

Wie schon oben vorausgesagt wurde, besitzen auch alle diese Verhältniszahlen das negative Vorzeichen. Die absoluten Werte derselben nehmen aber hier nicht ab, sondern vergrößern sich mit wachsendem Beugungswinkel. Von der rechtwinkligen Beugestellung des Ellbogengelenks an nehmen zwar die absoluten Werte wieder ab; da es sich aber hier um das reziproke Drehungsverhältnis handelt, wie man aus der Klammer erkennt, so nimmt auch über die rechtwinklige Stellung hinaus bis zur äußersten Beugestellung des Ellbogengelenks das Verhältnis der Anfangsdrehungen im Schulter- und Ellbogengelenk zu. Besonders bemerkenswert ist, daß die Drehung im Schultergelenk bis zur rechtwinkligen Beugestellung des Armes kleiner ausfällt als die gleichzeitige Drehung im Ellbogengelenk, so daß also der Muskel eine stärkere Wirkung an dem Gelenk hervorbringt, über welches er nicht hinwegzieht. Ist der Arm bei der Kontraktion des Muskels im Ellbogengelenk rechtwinklig gebeugt, so sind die Drehungen in beiden Gelenken, abgesehen von dem verschiedenen Drehungssinn, gleich groß. Erst bei noch größeren Beugestellungen des Armes überwiegt die Drehung im Schultergelenk, und zwar mit wachsender Beugung immer mehr, so daß zuletzt in der extremen Beugestellung die Drehung im Ellbogengelenk verhältnismäßig klein geworden ist. Man kann sich auch hier leicht davon überzeugen, daß der Fall, in welchem das Ellbogengelenk überhaupt nicht mit in Drehung versetzt wird, bei den im Leben erreichbaren Stellungen des Ellbogengelenks nicht vorkommen kann. Denn wie man aus Formel (276) ableitet, nimmt das Verhältnis der Drehungen im Ellbogengelenk und Schultergelenk erst wieder für $\psi_{8,10} = 153^0 20'$ den Wert Null an.

In Figur 43 finden sich die Anfangsbewegungen des Armes infolge der Kontraktion eines eingelenkigen Beugers des Schultergelenks, z. B. des vorderen Teils des M. deltoideus, in derselben Weise wie in den Figuren 41 und 42 für die eingelenkigen Ellbogenmuskeln für eine Reihe verschiedener Ausgangsstellungen dargestellt. Auch hier ist angenommen worden, daß von jeder Ausgangsstellung aus das Drehungsverhältnis während einer ausgedehnten Bewegung des Armes konstant bleibt. Um den Vergleich mit der Wirkung der eingelenkigen Ellbogenmuskeln zu erleichtern, ist auch hier die Anfangsbewegung

so weit fortgesetzt gedacht, bis eine Streckung von 30° im Ellbogengelenk eingetreten ist.

In ganz entsprechender Weise ist in Figur 44 eine Reihe von Anfangsbewegungen zur Darstellung gebracht, welche ein eingelenkiger

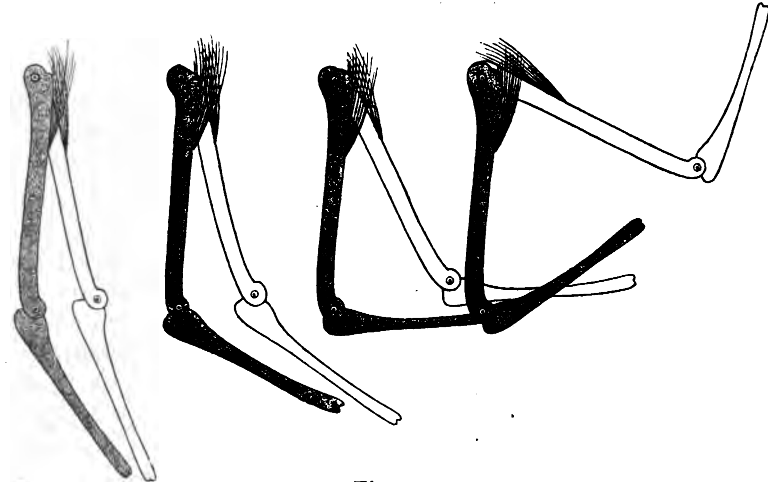


Fig. 43.

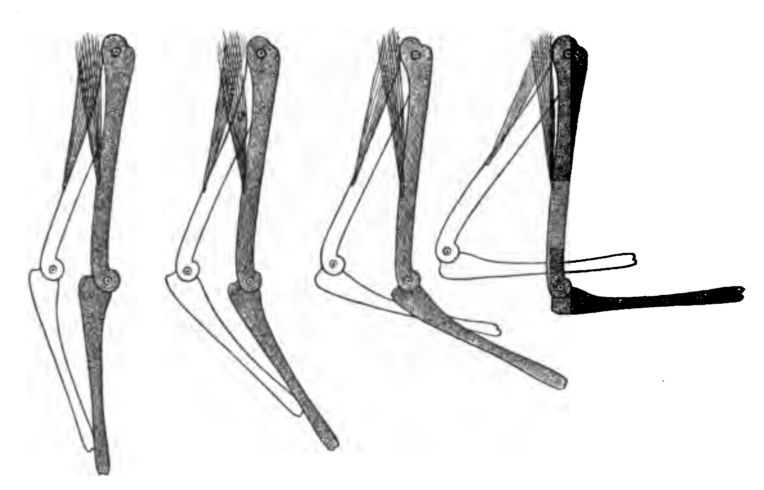


Fig. 44.

Strecker des Schultergelenks, z. B. der M. coracobrachialis, bei isolierter Kontraktion aus der Ruhe hervorrufen würde.

δ) Zweigelenkige Muskeln des Armes.

Bei den zweigelenkigen Muskeln ist das Verhältnis von zweien der Drehungsmomente nicht konstant, sondern im allgemeinen von den

beiden Gelenkwinkeln abhängig. Es muß daher zunächst in der früher beschriebenen Weise die Bestimmung des Verhältnisses der Drehungsmomente für eine genügend große Anzahl von Stellungen des Armes ausgeführt worden sein, bevor man an die Berechnung des kinetischen Maßes herangehen kann. Diese Berechnung ist dann mit Hilfe der allgemeinen Formeln (273) oder (274) auszuführen.

Als Beispiel für die Ableitung des kinetischen Maßes eines zweigelenkigen Armmuskels soll wieder der lange Kopf des M. biceps brachii verwendet werden, da für denselben schon die Verhältnisse der beiden Drehungsmomente $D_{m_{8,10}}$ und $D_{m_{10}}$ früher bestimmt worden sind (vgl. die Tabelle auf Seite 266). Man hat daher die zu den angegebenen Größen des Winkels $\psi_{8,10}$ gehörenden Werte des Verhältnisses $\frac{D_{m_{8,10}}}{D_{m_{10}}}$ nur in (274) einzusetzen. Soweit in der Tabelle auf Seite 266 die Werte des Verhältnisses $\frac{D_{m_{10}}}{D_{m_{8,10}}}$ angegeben sind (die in Klammer eingeschlossenen Zahlen), hat man natürlich den reziproken Wert dieser Zahlen zu berücksichtigen. Die Rechnung ergibt folgende Werte für das Verhältnis der Anfangsdrehungen, welche der lange Kopf des M. biceps brachii bei isolierter Kontraktion von der Ruhe aus im Schulter- und Ellbogengelenk hervorbringt:

Beugungswinkel $\psi_{8,10}$ des Ellbogengelenks	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°
Verhältnis $\frac{\psi''_{1,8}}{\psi''_{8,10}}$ der Anfangsdrehungen	— 0,09	— 0,21	— 0,26	— 0,28	— 0,29	— 0,28	— 0,27

Beugungswinkel $\psi_{8,10}$ des Ellbogengelenks	70°	80°	90°	100°	110°	120°	130°
Verhältnis $\frac{\psi''_{1,8}}{\psi''_{8,10}}$ der Anfangsdrehungen	— 0,25	— 0,21	— 0,18	— 0,12	— 0,04	+ 0,07	+ 0,21

Diese Drehungsverhältnisse gelten für jeden beliebigen Wert des Schultergelenkwinkels $\psi_{1,8}$, da das Verhältnis der Drehungsmomente des langen Bicepskopfes von der Stellung im Schultergelenk unabhängig ist. Man hat es also hier mit einem besonders einfachen Falle eines zweigelenkigen Muskels zu tun. Im allgemeinen sind aber, wie sich früher herausgestellt hat, die Drehungsmomente eines zweigelenkigen Muskels, und infolgedessen auch die Verhältnisse derselben, Funktionen beider Gelenkwinkel. Es wird daher bei denselben auch das Verhältnis der Anfangsdrehungen nicht mehr allein von der

Stellung im Ellbogengelenk, sondern auch gleichzeitig von der Stellung im Schultergelenk abhängig sein. Dies tritt ganz besonders bei den zweigelenkigen Muskeln des Beins zutage. Daher soll erst im nächsten Abschnitt an dem Beispiel eines zweigelenkigen Muskels des Beins gezeigt werden, wie sich in diesem allgemeinen Falle die Verhältnisse gestalten.

Für den langen Kopf des M. biceps brachii ergibt sich aus der obigen Tabelle, daß das Drehungsverhältnis bis weit über die rechtwinklige Beugestellung hinaus einen negativen Wert besitzt. Erst ganz zuletzt, in der Nähe der äußersten Beugestellung, wird dasselbe positiv. Es zeigt sich also, daß der Muskel in den meisten Ausgangsstellungen bei isolierter Kontraktion von der Ruhe aus in den beiden Gelenken entgegengesetzte Drehungen hervorbringt. Erst in der Nähe der extremen Beugestellung des Ellbogengelenks finden die Gelenkdrehungen in gleichem Sinne statt. Ob nun in geringeren Beugegraden das Ellbogengelenk gebeugt und gleichzeitig das Schultergelenk gestreckt wird, oder ob das Umgekehrte der Fall ist, läßt sich leicht auf folgende Weise entscheiden. Solange in der extremen Beugestellung das Drehungsverhältnis positiv ist, kann es sich bei der Lage des langen Kopfes des M. biceps zu den beiden Gelenken nur um gleichzeitige Beugungen im Ellbogen- und Schultergelenk handeln. Geht man nun von der äußersten Beugestellung des Ellbogengelenks aus sukzessive zu geringeren Beugegraden über, so deutet die zunächst erfolgende Abnahme des Wertes des Drehungsverhältnisses (vgl. die Tabelle) darauf hin, daß die Beugung im Schultergelenk allmählich gegen die gleichzeitige Beugung im Ellbogengelenk zurücktritt. In einer Beugestellung von etwa nur noch 114° Ellbogenwinkel hat das Drehungsverhältnis den Wert Null angenommen, d. h. es findet jetzt allein Beugung im Ellbogengelenk statt. Bei weiterer Verminderung des Beugungswinkels wird das Drehungsverhältnis negativ. Das kann nur so gedeutet werden, daß von nun an im Schultergelenk Streckung, d. h. Rückwärtsdrehung, eintritt, während nach wie vor das Ellbogengelenk gebeugt wird. Denn wollte man annehmen, daß das Schultergelenk gebeugt, dagegen das Ellbogengelenk gestreckt wird, so müßte in der Übergangsstellung von 114° Beugungswinkel gleichzeitig mit dem Verschwinden der Drehung im Schultergelenk die Drehung im Ellbogengelenk zu Null geworden sein. Der Muskel würde also in dieser Übergangsstellung bei seiner Kontraktion überhaupt keine Bewegung des Armes hervorbringen. Dies widerspricht aber der Tatsache, daß in dieser Stellung die Drehungsmomente nicht auch selbst verschwinden oder das Verhältnis Null besitzen.

Es geht also aus dieser Überlegung die Tatsache hervor, daß der lange Kopf des M. biceps brachii unter der Voraussetzung, daß das Radioulnargelenk festgestellt ist, von der äußersten Streckstellung

des Ellbogengelenkes an bis über die rechtwinklige Beugestellung desselben hinaus bei seiner Kontraktion aus der Ruhe Beugung im Ellbogengelenk und gleichzeitig Streckung, d. h. Rückwärtsdrehung, im Schultergelenk hervorbringt. Erst in der Nähe der extremen Beugehaltung des Armes wirkt er auch auf das Schultergelenk beugend ein. Der lange Kopf des M. biceps brachii ist also Beuger des Ellbogengelenks und vorwiegend Strecker des Schultergelenks. Diese letztere Tatsache ist um so bemerkenswerter, als der Muskel vorn, d. h. auf der Beugeseite, über das Schultergelenk hinwegzieht; sie zeigt recht deutlich, daß man aus der Lage eines Muskels zu den Gelenken, welche er überspannt, noch gar keinen Schluß auf die bewegende Wirkung desselben ziehen kann. Dieselbe zeigt aber auch, daß der Drehungssinn des Drehungsmomentes, mit welchem der Muskel auf den Oberarm drehend einwirkt, nicht maßgebend für die tatsächlich im Schultergelenk eintretende Bewegung ist. Faßt man z. B. die Stellung des Armes ins Auge, in welcher das Ellbogengelenk um 20° aus der Streckstellung gebeugt ist, so besitzen die beiden Drehungsmomente $D_{m_{8,10}}$ und $D_{m_{10}}$ nach der oberen Tabelle auf Seite 266 die Werte $+ 2{,}29 K$ und $+ 1{,}68 K$, unter K die Gesamtspannung des Muskels verstanden. Nach der allgemein gültigen Beziehung (256) ist daher das Drehungsmoment D_{m_8}, mit welchem der Muskel auf den Oberarm einwirkt, gleich $+ 0{,}61 K$, also positiv, während die Anfangsdrehung im Schultergelenk Streckung ist, also das negative Vorzeichen besitzt.

Um eine deutliche Vorstellung von der Wirkungsweise des langen Kopfes des M. biceps brachii zu vermitteln, sind in Figur 45 in

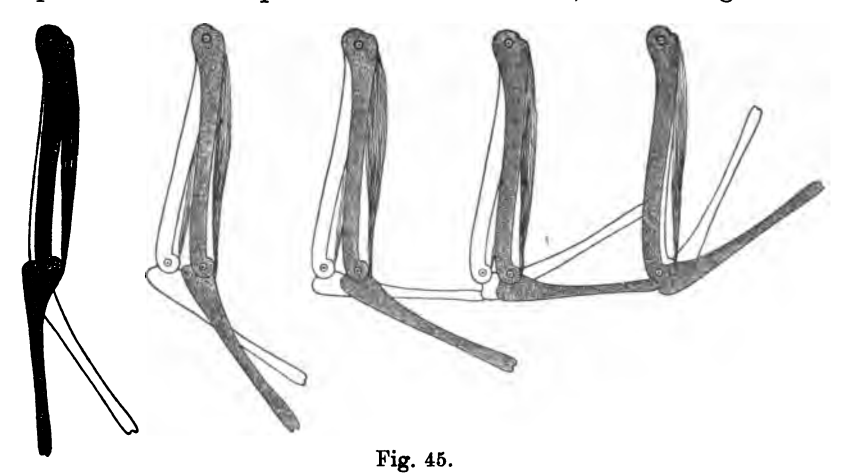


Fig. 45.

entsprechender Weise wie in den letzten vier Figuren für die eingelenkigen Muskeln die Anfangsbewegungen des Armes dargestellt worden, welche

der Muskel bei alleiniger Bewegung aus der Ruhe hervorbringt. Dabei ist wiederum angenommen worden, daß das Drehungsverhältnis von einer bestimmten Ausgangsstellung an konstant bleibt, während im Ellbogengelenk eine Beugung von 30° ausgeführt wird.

c) *Kinetisches Maß für die Muskeln des Beins.*

α) Vergleichung der Verhältnisse am Bein mit denen des Arms.

Unter der schon früher gemachten Voraussetzung, daß der Fuß zum Unterschenkel festgestellt ist, und der Oberschenkel sich gegen das fixiert gedachte Becken nur um eine zu der Knieachse parallele Achse im Hüftgelenk drehen kann, wird das kinetische Maß für die Muskeln des Beins ebenfalls durch die Formel (268) dargestellt. In der speziellen Form des auf der rechten Seite von (268) stehenden Ausdrucks kann nur insofern eine Änderung gegenüber der für den Arm geltenden Form eintreten, als für das Bein die Konstanten $\frac{\sigma_1}{\varrho_2}$ und $\frac{\sigma_2}{l_1}$ andere Werte besitzen. Zur Berechnung derselben können unmittelbar die bei der Untersuchung der Armmuskeln angegebenen Formeln (270) und (272) Verwendung finden; man hat in denselben nur überall den Index 8 durch den für den rechten Oberschenkel eingeführten Index 2, und ferner den Index 10 durch den für das System Unterschenkel + Fuß schon früher verwendeten Doppelindex 4,6 zu ersetzen, und insbesondere unter $m_{4,6}$ die Masse dieses Systems zu verstehen.

Die direkte Messung an den unteren Extremitäten zweier verschiedener Individuen und die auf die Resultate derselben gegründete Rechnung hatte die in folgender Tabelle niedergelegten Werte für die einzelnen in betracht kommenden Größen ergeben:

	Körperteile	G in kg	m	l in cm	r in cm	$\varkappa$ in cm	c in cm	λ in cm	σ in cm	ϱ in cm	$\frac{\sigma_2}{\varrho_{4,6}}$	$\frac{\sigma_{4,6}}{l_2}$
rechter	Oberschenkel	6,45	0,006574	40,0	17,7	10,3	25,79	29,12	32,88	—	2,335	0,853
	Unterschenkel + Fuß	3,68	0,003751	—	25,0	15,1	9,08	17,60	34,10	14,08		
linker	Oberschenkel	6,99	0,007125	40,0	16,7	10,8	24,72	28,46	32,76	—	2,353	0,847
	Unterschenkel + Fuß	3,67	0,003741	—	25,0	14,9	8,60	17,07	33,88	13,92		
rechter	Oberschenkel	4,86	0,004954	35,9	15,72	11,01	23,39	26,80	30,70	—	2,126	0,924
	Unterschenkel + Fuß	2,98	0,003037	—	24,77	14,41	9,41	17,67	33,16	14,44		
…er	Oberschenkel	4,81	0,004903	36,65	15,90	11,43	23,54	27,14	31,29	—	2,491	0,883
	…nterschenkel + Fuß	2,80	0,002854	—	21,94	15,10	8,07	16,16	32,35	12,56		

Aus dieser Tabelle ist zunächst ersichtlich, daß trotz großer Verschiedenheiten in den Gewichten und den Dimensionen sowohl die Konstante $\frac{\sigma_2}{\varrho_{4,6}}$ als auch die Konstante $\frac{\sigma_{4,6}}{l_2}$ nahezu in allen Fällen denselben Wert besitzt. Es zeigen sich sogar größere Unterschiede bei den beiden unteren Extremitäten ein und desselben Individuums als zwischen den zu verschiedenen Individuen gehörenden Werten. Der Grund hierfür ist hauptsächlich darin zu suchen, daß die beiden für die Muskelwirkung in Frage kommenden Verhältniszahlen nur von dem Verhältnis der Gewichte beider Abschnitte des Beins abhängen; das letztere ist aber, wie schon früher angegeben wurde, bei allen normal gebauten Individuen annähernd das gleiche, mögen die Gewichte selbst noch so große Unterschiede aufweisen.

Vergleicht man nun die für das Bein geltenden Werte der beiden Konstanten mit den früher für den Arm gefundenen Werten 2,095 und 0,894 (vgl. S. 277), so erkennt man eine Übereinstimmung zwischen denselben, welche zum Teil noch größer ist als die Übereinstimmung der in der obigen Tabelle angeführten Werte untereinander. Hieraus ergibt sich die wichtige Tatsache, daß die allein im Kniegelenk gegliederte untere Extremität und die allein im Ellbogengelenk gegliederte obere Extremität sich unter den getroffenen Voraussetzungen nahezu ganz gleich gegenüber den angreifenden Muskelkräften verhalten. Zwei Muskeln, von denen der eine auf die beiden Abschnitte des Beins mit Drehungsmomenten von dem gleichen Verhältnis einwirkt als der andere auf die beiden Abschnitte des Armes, rufen daher die gleichen Bewegungen an den beiden Extremitäten hervor. Würde man also einen Muskel des Beins nach dem Arm in der Weise verlegen können, daß das statische Maß seiner Wirkung für die obere Extremität das gleiche ist wie für die untere, so würde auch die kinetische Wirkung die gleiche geblieben sein.

Daß dies nicht etwa von vornherein selbstverständlich ist, geht deutlich aus einem Vergleich mit den Verhältnissen bei anderen am menschlichen Körper vorkommenden zweigliedrigen Systemen hervor. Nimmt man beispielsweise den Oberschenkel als fixiert an, läßt aber dafür das obere Sprunggelenk beweglich und betrachtet nun die Wirkung der über das Kniegelenk oder das Fußgelenk, oder über beide hinwegziehenden Muskeln auf das allein im oberen Sprunggelenk gegliederte, aus Unterschenkel und Fuß bestehende zweigliedrige System, so stellen sich ganz andere Verhältnisse heraus. An den vier unteren Extremitäten, welche den Zahlen der letzten Tabelle (auf Seite 288) zugrunde liegen, hatten sich z. B. die in der folgenden Tabelle angegebenen Werte für die Gewichte, die verschiedenen Längen und die Verhältnisse $\frac{\sigma_4}{\varrho_6}$ und $\frac{\sigma_6}{l_4}$ herausgestellt,

wobei wie früher der Index 4 dem Unterschenkel allein und der Index 6 dem Fuß zugeschrieben ist:

Körperteile		G in kg	m	l in cm	r in cm	$\varkappa$ in cm	c in cm	λ in cm	σ in cm	ϱ in cm	$\frac{\sigma_4}{\varrho_6}$	$\frac{\sigma_6}{l_4}$
rechter	Unterschenkel	2,69	0,002742	39,0	16,5	9,8	22,58	26,07	30,09	—	10,746	0,308
	Fuß	0,99	0,001009	—	6,0	6,0	1,62	4,41	12,00	2,80		
linker	Unterschenkel	2,67	0,002721	39,0	16,0	10,1	22,28	25,99	30,32	—	10,564	0,318
	Fuß	1,00	0,001011	—	6,0	6,2	1,64	4,51	12,39	2,87		
rechter	Unterschenkel	2,07	0,002110	37,9	16,13	9,16	22,77	26,02	29,74	—	9,182	0,312
	Fuß	0,91	0,000928	—	6,38	5,91	1,95	4,80	11,83	3,25		
linker	Unterschenkel	1,89	0,001927	37,1	16,30	9,66	23,06	26,26	29,91	—	8,217	0,325
	Fuß	0,91	0,000928	—	6,95	5,97	2,26	5,22	12,07	3,64		

Vergleicht man die hier gefundenen Zahlen in den letzten beiden Spalten mit den entsprechenden Zahlen, welche sich für das ganze nur im Kniegelenk gegliederte Bein oder den ganzen nur im Ellbogengelenk gegliederten Arm ergeben haben, so erkennt man, daß von einer auch nur annähernd stattfindenden Übereinstimmung keine Rede mehr sein kann. Ein Muskel, welcher auf den Unterschenkel und den Fuß Drehungsmomente ausüben würde von dem gleichen Verhältnis wie ein anderer Muskel an einer der ganzen Extremitäten, müßte daher bei seiner Kontraktion trotz der Gleichheit des statischen Maßes doch eine ganz andere Anfangsbewegung hervorbringen wie der letztere. Somit ist die Gleichheit des mechanischen Verhaltens der ganzen oberen und unteren Extremitäten gegenüber den einwirkenden Muskelkräften eine sehr bemerkenswerte Eigenschaft des menschlichen Körpers. Ob sich bei anderen Säugetieren ähnliche Verhältnisse für die Extremitäten herausstellen, ist von vornherein nicht zu sagen und bedarf noch der eingehenden Untersuchung.

Infolge der Übereinstimmung zwischen dem mechanischen Verhalten der unteren und oberen Extremitäten kann man nun mit genügender Genauigkeit die Formeln (273) und (274) auch direkt dazu verwenden, das kinetische Maß der nur über das Kniegelenk oder nur über das Hüftgelenk oder über beide Gelenke hinwegziehenden Muskeln zu berechnen. Bezeichnet man wie früher mit D_{m_2} das Drehungsmoment, mit welchem ein solcher Muskel auf den Oberschenkel einwirkt, und mit D_{m_4} das Drehungsmoment, mit welchem er gleichzeitig auf den Unterschenkel, oder hier richtiger gesagt auf das System Unterschenkel + Fuß einwirkt, ferner mit $\psi_{1,2}$ den Hüftgelenkwinkel

und mit $\psi_{2,4}$ den Kniegelenkwinkel, so erhält man demnach z. B. aus (273) für das Verhältnis der Winkelbeschleunigungen $\psi''_{1,2}$ und $\psi''_{2,4}$ im Hüft- und Kniegelenk die Formel

$$(277) \qquad \frac{\psi''_{1,2}}{\psi''_{2,4}} = \frac{0{,}894 \frac{D_{m_2}}{D_{m_4}} - \cos\psi_{2,4}}{(2{,}095 + \cos\psi_{2,4}) - (0{,}894 + \cos\psi_{2,4}) \frac{D_{m_2}}{D_{m_4}}}.$$

β) Spezielle Beispiele für die Bestimmung des kinetischen Maßes von Beinmuskeln.

Das kinetische Maß der nur über das Kniegelenk hinwegziehenden Muskeln, wie der Mm. vastus lateralis, vastus intermedius, vastus medialis und biceps femoris caput breve, ist genau das gleiche wie für die eingelenkigen Ellbogenmuskeln. Denn da für dieselben das Verhältnis der Drehungsmomente D_{m_2} und D_{m_4} übereinstimmend den konstanten Wert -1 besitzt, so wird das kinetische Maß auch für diese Muskeln durch die rechte Seite der Formel (275) bestimmt. Es gelten daher für das Verhältnis der Anfangsdrehungen wieder die in der Tabelle auf Seite 279 angegebenen Zahlen, welche hier in etwas erweiterter Form noch einmal mitgeteilt werden sollen, weil die Beugung im Kniegelenk am lebenden Menschen den Umfang von 150° erreichen kann:

Beugungswinkel $\psi_{2,4}$ des Kniegelenks	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°
Verhältnis $\frac{\psi''_{1,2}}{\psi''_{2,4}}$ der Anfangsdrehungen	− 0,38	− 0,38	− 0,38	− 0,37	− 0,37	− 0,36	− 0,35	− 0,34

Beugungswinkel $\psi_{2,4}$ des Kniegelenks	80°	90°	100°	110°	120°	130°	140°	150°
Verhältnis $\frac{\psi''_{1,2}}{\psi''_{2,4}}$ der Anfangsdrehungen	− 0,32	− 0,30	− 0,27	− 0,24	− 0,20	− 0,15	− 0,09	− 0,02

Es wirken also die eingelenkigen Muskeln des Kniegelenks auch auf das Hüftgelenk, über das sie gar nicht hinwegziehen, und zwar findet die Drehung in diesem immer in entgegengesetztem Drehungssinn statt wie in jenem. Bezeichnet man bei aufrechter Stellung des Körpers die Vorwärtsbewegung des Oberschenkels gegen das Becken als Beugung und die Rückwärtsbewegung als Streckung des Hüftgelenks und beachtet, daß bei der Beugung des Kniegelenks der Unterschenkel gegen den Oberschenkel nach rückwärts, also gerade im entgegengesetzten Sinne bewegt wird wie der Unterarm gegen

den Oberarm bei der Beugung des Ellbogengelenks, so hat man folgendes Resultat:

Die Mm. vastus lateralis, vastus intermedius und vastus medialis sind sowohl Strecker des Kniegelenks als auch Strecker des Hüftgelenks. Der M. biceps femoris caput breve ist dagegen Beuger des Kniegelenks und gleichzeitig Beuger des Hüftgelenks.

Da bei den nur über das Hüftgelenk hinwegziehenden Muskeln das Drehungsmoment D_{m_4} den Wert Null besitzt, so wird das kinetische Maß derselben durch die rechte Seite der Formel (276) dargestellt. Insbesondere erhält man hieraus für verschiedene Ausgangsstellungen im Kniegelenk als Wert des Verhältnisses der Anfangsdrehungen (vgl. hiermit die Tabelle auf den Seiten 282 und 283):

Beugungswinkel $\psi''_{1,2}$ des Kniegelenks	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°
Verhältnis $\frac{\psi''_{1,2}}{\psi''_{2,4}}$ oder $\left[\frac{\psi''_{2,4}}{\psi''_{1,2}}\right]$ der Anfangsdrehungen	— 0,47	— 0,48	— 0,49	— 0,51	— 0,54	— 0,58	— 0,64	— 0,72

Beugungswinkel $\psi''_{1,2}$ des Kniegelenks	80°	90°	100°	110°	120°	130°	140°	150°
Verhältnis $\frac{\psi''_{1,2}}{\psi''_{2,4}}$ oder $\left[\frac{\psi''_{2,4}}{\psi''_{1,2}}\right]$ der Anfangsdrehungen	— 0,84	— 1	[—0,80]	[—0,62]	[—0,44]	[—0,28]	[—0,15]	[—0,03]

In dieser Tabelle sind wiederum die Zahlen in Klammern eingeschlossen, welche dem Verhältnis der Anfangsdrehung im Kniegelenk zu der Anfangsdrehung im Hüftgelenk angehören. Diese Werte gelten beispielsweise für den M. iliacus. Da auch hier wieder alle Werte negativ sind, so kann man sagen, daß der M. iliacus sowohl Beuger des Hüftgelenks als auch Beuger des Kniegelenks ist.

Während der Ausdruck zur Bestimmung des kinetischen Maßes eingelenkiger Muskeln eine einfachere Form annahm, ist der Berechnung bei mehrgelenkigen Muskeln die allgemeine Form (277) zugrunde zu legen. Wie schon bei der Untersuchung der Armmuskeln hervorgehoben wurde, ist das kinetische Maß eines mehrgelenkigen Muskels im allgemeinen von beiden Gelenkwinkeln abhängig, trotzdem in (277) nur der Winkel des Kniegelenks in expliziter Form auftritt. Der Grund hierfür liegt darin, daß das Verhältnis der beiden Drehungsmomente eine Funktion beider Gelenkwinkel ist.

Unter den hier in Betracht kommenden mehrgelenkigen Muskeln des Beins soll wieder der M. semimembranosus zur Berechnung des kinetischen Maßes herausgegriffen werden, da für denselben die Werte der

beiden Drehungsmomente D_{m_2} und D_{m_4} schon früher abgeleitet worden sind. Dieselben finden sich in den Tabellen auf Seite 236 niedergelegt. Durch Division aller aufgezeichneten Werte dieser Drehungsmomente, welche zu gleichen Werten der beiden Gelenkwinkel $\psi_{1,2}$ und $\psi_{2,4}$ gehören, erhält man die folgende Tabelle für das

Verhältnis $\frac{D_{m_2}}{D_{m_4}}$ für den M. semimembranosus:

Kniegelenkwinkel $\psi_{2,4}$	Hüftgelenkwinkel $\psi_{1,2}$										
	− 10°	0°	+ 10°	+ 20°	+ 30°	+ 40°	+ 50°	+ 60°	+ 70°	+ 80°	+ 90°	+ 100°
0°	+ 0,24	+ 0,56	+ 0,84	+ 1,04	+ 1,20	+ 1,24	+ 1,20	+ 1,12	+ 1,00	+ 0,84	+ 0,64	+ 0,36
10°	+ 0,24	+ 0,56	+ 0,84	+ 1,04	+ 1,20	+ 1,24	+ 1,20	+ 1,12	+ 1,00	+ 0,84	+ 0,64	+ 0,36
20°	+ 0,03	+ 0,30	+ 0,53	+ 0,70	+ 0,83	+ 0,87	+ 0,83	+ 0,77	+ 0,67	+ 0,53	+ 0,37	+ 0,13
30°	− 0,06	+ 0,18	+ 0,39	+ 0,55	+ 0,67	+ 0,70	+ 0,67	+ 0,61	+ 0,52	+ 0,39	+ 0,24	+ 0,03
40°	− 0,14	+ 0,08	+ 0,28	+ 0,42	+ 0,53	+ 0,56	+ 0,53	+ 0,47	+ 0,39	+ 0,28	+ 0,14	− 0,06
50°	− 0,21	0	+ 0,18	+ 0,31	+ 0,41	+ 0,44	+ 0,41	+ 0,36	+ 0,28	+ 0,18	+ 0,05	− 0,13
60°	− 0,24	− 0,05	+ 0,12	+ 0,24	+ 0,34	+ 0,37	+ 0,34	+ 0,29	+ 0,22	+ 0,12	0	− 0,17
70°	− 0,24	− 0,05	+ 0,12	+ 0,24	+ 0,34	+ 0,37	+ 0,34	+ 0,29	+ 0,22	+ 0,12	0	− 0,17
80°	− 0,23	− 0,03	+ 0,15	+ 0,28	+ 0,38	+ 0,40	+ 0,38	+ 0,33	+ 0,25	+ 0,15	+ 0,03	− 0,15
90°	− 0,18	+ 0,03	+ 0,21	+ 0,34	+ 0,45	+ 0,47	+ 0,45	+ 0,39	+ 0,32	+ 0,21	+ 0,08	− 0,11
100°	− 0,14	+ 0,08	+ 0,28	+ 0,42	+ 0,53	+ 0,56	+ 0,53	+ 0,47	+ 0,39	+ 0,28	+ 0,14	− 0,06
110°	− 0,06	+ 0,18	+ 0,39	+ 0,55	+ 0,67	+ 0,70	+ 0,67	+ 0,61	+ 0,52	+ 0,39	+ 0,24	+ 0,03
120°	+ 0,07	+ 0,34	+ 0,59	+ 0,76	+ 0,90	+ 0,93	+ 0,90	+ 0,83	+ 0,72	+ 0,59	+ 0,41	+ 0,17
130°	+ 0,24	+ 0,56	+ 0,84	+ 1,04	+ 1,20	+ 1,24	+ 1,20	+ 1,12	+ 1,00	+ 0,84	+ 0,64	+ 0,36
140°	+ 0,55	+ 0,95	+ 1,30	+ 1,55	+ 1,75	+ 1,80	+ 1,75	+ 1,65	+ 1,50	+ 1,30	+ 1,05	+ 0,70
150°	+ 0,94	+ 1,44	+ 1,88	+ 2,19	+ 2,44	+ 2,50	+ 2,44	+ 2,31	+ 2,13	+ 1,88	+ 1,5[illegible]	+ 1,13

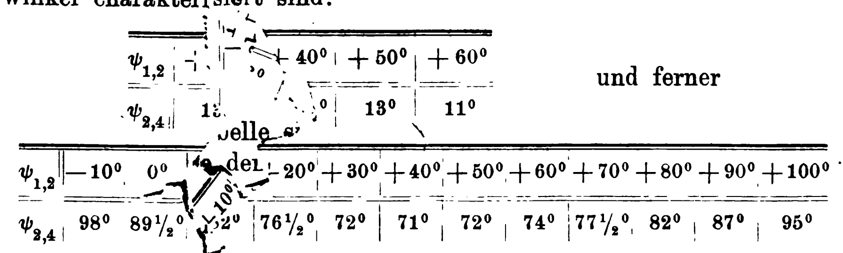
Setzt man diese Werte in die Formel (277) ein und berücksichtigt dabei den zu jeder dieser Verhältniszahlen gehörenden Wert des Kniegelenkwinkels $\psi_{2,4}$, so erhält man schließli[illegible] die in der folgenden Tabelle niedergelegten Werte für das

Verhältnis $\frac{\psi''_{1,2}}{\psi''_{2,4}}$ bzw. $\left[\frac{\psi''_{2,4}}{\psi''_{1,2}}\right]$ der du[illegible]n M. semimembranosus hervorgebrachten Anfangsdreh[illegible]

Kniegelenkwinkel $\psi_{2,4}$	Hüftgelenkwinkel $\psi_{1,2}$										
	−10°	0°	+10°	+20°	+30°	+40°	+50°	+60°	+70°	+80°	+90°	+100°
0°	−0,30	−0,25	−0,16	−0,07	+0,09	+0,14	+0,09	+0,01	−0,09	−0,16	−0,23	−0,28
10°	−0,29	−0,24	−0,15	−0,05	+0,11	+0,17	+0,11	+0,02	−0,06	−0,15	−0,22	−0,28
20°	−0,31	−0,27	−0,21	−0,18	−0,13	−0,11	−0,13	−0,16	−0,19	−0,21	−0,26	−0,29
30°	−0,30	−0,27	−0,23	−0,19	−0,15	−0,14	−0,15	−0,17	−0,20	−0,23	−0,26	−0,29
40°	−0,29	−0,25	−0,22	−0,18	−0,15	−0,13	−0,15	−0,17	−0,19	−0,22	−0,24	−0,28
50°	−0,27	−0,23	−0,20	−0,16	−0,13	−0,12	−0,13	−0,15	−0,17	−0,20	−0,23	−0,26
60°	−0,25	−0,20	−0,16	−0,12	−0,09	−0,08	−0,09	−0,11	−0,13	−0,16	−0,19	−0,23
70°	−0,21	−0,16	−0,10	−0,06	−0,02	−0,01	−0,02	−0,04	−0,07	−0,10	−0,14	−0,19
80°	−0,15	−0,09	−0,02	+0,04	+0,09	+0,10	+0,09	+0,06	+0,03	−0,02	−0,07	−0,13
90°	−0,07	+0,01	+0,10	+0,17	+0,24	+0,25	+0,24	+0,20	+0,16	+0,10	+0,04	−0,05
100°	+0,02	+0,13	+0,25	+0,34	+0,42	+0,44	+0,42	+0,37	+0,32	+0,25	+0,16	+0,06
110°	+0,16	+0,30	+0,45	+0,57	+0,68	+0,71	+0,68	+0,63	+0,55	+0,45	+0,34	+0,21
120°	+0,36	+0,55	+0,75	+0,91	[+0,95]	[+0,93]	[+0,95]	+0,98	+0,87	+0,75	+0,61	+0,43
130°	+0,62	+0,87	[+0,89]	[+0,76	[+0,67]	[+0,66]	[+0,67]	[+0,71]	[+0,79]	[+0,89]	+0,94	−0,71
140°	+1,00	[+0,75]	[+0,60]	[+0,53]	[+0,47]	[+0,46]	[+0,47]	[+0,50]	[+0,54]	[+0,60]	[+0,70]	[+0,89
150°	[+0,71]	[+0,55]	[+0,46]	[+0,41]	[+0,38]	[+0,36]	[+0,38]	[+0,39]	[+0,42]	[+0.46]	[+0,52]	[+0,64

In dieser Tabelle beziehen sich die in Klammern gesetzten Zahlen wieder auf das Verhältnis der Anfangsdrehung im Kniegelenk zu der Anfangsdrehung im Hüftgelenk. Da diese eingeklammerten Zahlen erst in der Nähe der extremen Beugestellung des Kniegelenks auftreten, so erkennt man daraus, daß die Wirkung des M. semimembranosus auf das Kniegelenk in den meisten Stellungen des Beins größer ist als die Wirkung auf das Hüftgelenk. Ein Vergleich der letzten Tabelle mit der vorhergehenden zeigt wieder deutlich, daß das Vorzeichen des Verhältnisses der Drehungsmomente nicht bestimmend ist für das Vorzeichen des Verhältnisses der Anfangsdrehungen.

Da, wie man aus der letzten Tabelle sieht, der Fall nicht vorkommt, daß das Verhältnis $\left[\frac{\psi_{2,4}}{\psi_{1,2}}\right]$ den Wert Null annimmt, so setzt der Muskel das Kniegelenk stets in Bewegung. Dagegen gibt es eine Reihe von Ausgangsstellungen, in denen er auf das Hüftgelenk im ersten Moment gar nicht einwirkt, so daß also das Verhältnis der Anfangsdrehungen den Wert Null besitzt. In der Tabelle tritt zwar die Zahl Null nicht auf. Man kann aber leicht erkennen, zwischen welchen in der Tabelle verzeichneten Stellungen des Beins das Drehungsverhältnis direkt zu Null wird. Die genauere Untersuchung zeigt, daß dies unter anderem in Haltungen des Beins stattfindet, welche durch folgende zusammengehörende Werte der beiden Gelenkwinkel charakterisiert sind:



$\psi_{1,2}$	[illegible]	[illegible]	$+40^0$	$+50^0$	$+60^0$
$\psi_{2,4}$	1[illegible]	[illegible]	[illegible]	13^0	11^0

und ferner

$\psi_{1,2}$	-10^0	0^0	[illegible]	$+20^0$	$+30^0$	$+40^0$	$+50^0$	$+60^0$	$+70^0$	$+80^0$	$+90^0$	$+100^0$
$\psi_{2,4}$	98^0	$89\frac{1}{2}^0$	[illegible]	$76\frac{1}{2}^0$	72^0	71^0	72^0	74^0	$77\frac{1}{2}^0$	82^0	87^0	95^0

Da in diesen Stellungen der M. semimembranosus infolge seiner Lage zum Kniegelenk dasselbe nur beugen kann und es keine Stellung des Beins gibt, in welcher er überhaupt nicht auf das Kniegelenk einwirkte, so wird der Muskel überhaupt Beugung im Kniegelenk hervorbringen. Nachdem dies klargestellt ist, kann man aus dem Vorzeichen der Verhältniswerte stets in eindeutiger Weise erkennen, in welchem Sinne die gleichzeitige Drehung im Hüftgelenk stattfindet. Abgesehen von einigen Stellungen in der Nähe der extremen Streckstellung des Kniegelenks ruft der Muskel bis in die Nähe der rechtwinkligen Beugestellung durchweg Beugung im Hüftgelenk hervor. Von größeren Beugestellungen des Kniegelenks aus wirkt er dagegen streckend auf das Hüftgelenk ein. In der Nähe der rechtwinkligen Beugestellung tritt jedoch die Streckung des Hüftgelenks noch sehr

gegen die Beugung des Kniegelenks zurück. Dagegen überwiegt die erstere gegen die letztere in der Nähe der extremen Beugestellung des Kniegelenks. Dazwischen liegen Stellungen, in denen die Anfangsdrehungen in beiden Gelenken gleich groß ausfallen. Dieselben sind durch folgende Werte der beiden Gelenkwinkel charakterisert:

$\psi_{1,2}$	-10^0	0^0	$+10^0$	$+20^0$	$+30^0$	$+40^0$	$+50^0$	$+60^0$	$+70^0$	$+80^0$	$+90^0$	$+100^0$
$\psi_{2,4}$	140^0	133^0	127^0	$122\frac{1}{2}^0$	119^0	118^0	119^0	121^0	$123\frac{1}{2}^0$	127^0	131^0	137^0

Faßt man alle diese Befunde noch einmal kurz zusammen, so kann man das Resultat über die bewegende Wirkung des Muskels so aussprechen:

Bei freier Beweglichkeit des Hüft- und Kniegelenks ist in mittleren, nicht zu starken Beugestellungen des Knies der M. semimembranosus Beuger des Kniegelenks und auch Beuger des Hüftgelenks. In der Nähe der extremen Streckstellung und der rechtwinkligen Beugestellung des Kniegelenks wirkt er auf das Hüftgelenk gar nicht, und bei noch größeren Streckstellungen einerseits und Beugestellungen andererseits auf dasselbe streckend ein, und zwar um so mehr, je näher das Bein sich der extremen Streck- oder Beugestellung des Knies befindet. Das Kniegelenk wird dagegen in allen Ausgangsstellungen des Beins von dem Muskel gebeugt.

d) *Anfangsbewegung bei gleichzeitiger Einwirkung von Muskeln und Schwere.*

Wenn auf das zweigliedrige System gleichzeitig mehrere verschiedene Kräfte bewegend einwirken, so gilt doch stets wieder die Formel (268) für die Bestimmung des Verhältnisses der in beiden Gelenken hervorgebrachten Anfangsdrehungen. Dabei ist ganz allgemein unter D_1 das resultierende Drehungsmoment zu verstehen, mit welchem alle Kräfte vereinigt auf das der festen Achse zunächst liegende Glied einwirken, und unter D_2 das resultierende Drehungsmoment derselben Kräfte für das zweite Glied. Um diese beiden resultierenden Drehungsmomente im gegebenen Falle zu gewinnen, hat man nur von jeder am System angreifenden äußeren Kraft und von jedem Paar innerer Kräfte die Drehungsmomente für sich zu bestimmen, mit welchen sie auf die beiden Glieder des Systems einwirken, und dann alle demselben Gliede angehörenden Drehungsmomente zu dem resultierenden Drehungsmoment zusammenzufassen. Bezeichnet man wieder wie früher die von der Schwere ausgeübten Drehungsmomente durch D_s mit angehängtem Index, welcher die Nummer des Körperteils angibt, auf welchen das Drehungsmoment ausgeübt wird, so hat man also bei gleichzeitiger Einwirkung von

Muskeln und Schwere am Arm zu setzen:

$$(278)\qquad \begin{aligned} D_1 &= D_{m_8} + D_{s_8} \\ D_2 &= D_{m_{10}} + D_{s_{10}} \end{aligned}$$

und am Bein, unter der Voraussetzung, daß das obere Sprunggelenk festgestellt ist:

$$(279)\qquad \begin{aligned} D_1 &= D_{m_2} + D_{s_2} \\ D_2 &= D_{m_{4,6}} + D_{s_{4,6}}. \end{aligned}$$

Um eine klare Vorstellung davon gewinnen zu können, in welcher Weise Schwere und Muskeln bei gleichzeitiger Tätigkeit in ihrer [illegible]genden Einwirkung sich entweder gegenseitig unterstützen oder [illegible]der entgegenwirken, soll nun zunächst an einigen Beispielen gezeigt werden, welche Anfangsdrehungen in den beiden Gelenken die Schwere allein hervorbringt. Da infolge der Gleichheit der maßgebenden Konstanten für Arm und Bein die Verhältnisse an der unteren Extremität genau dieselben sein werden als bei gleicher Ausgangsstellung an der oberen Extremität, so soll nur die Anfangsbewegung an letzterer etwas genauer untersucht werden.

α) Einwirkung der Schwere allein.

Bei alleiniger Einwirkung der Schwere nimmt der Ausdruck für das Verhältnis der Anfangsdrehungen im Schulter- und Ellbogengelenk nach (273) die Form an

$$(280)\qquad \frac{\psi''_{1,8}}{\psi''_{8,10}} = \frac{0{,}894\,\dfrac{D_{s_8}}{D_{s_{10}}} - \cos\psi_{8,10}}{(2{,}095 + \cos\psi_{8,10}) - (0{,}894 + \cos\psi_{8,10})\,\dfrac{D_{s_8}}{D_{s_{10}}}}$$

An Stelle desselben kann natürlich auch ein Ausdruck gesetzt werden, welcher das Verhältnis der Drehungsmomente $D_{s_{8,10}}$ und $D_{s_{10}}$ enthält; derselbe würde mit (274) übereinstimmen.

Ist im besonderen Falle die Längsachse des Oberarms vertikal gerichtet, so besitzt D_{s_8} und damit auch das in (280) auftretende Verhältnis der beiden Drehungsmomente den Wert Null. Die Formel (280) nimmt dann die spezielle Form an

$$(281)\qquad \frac{\psi''_{1,8}}{\psi''_{8,10}} = -\frac{\cos\psi_{8,10}}{2{,}095 + \cos\psi_{8,10}}$$

In den verschiedenen Stellungen des Ellbogengelenks erhält man hieraus folgende Werte für das Verhältnis der Anfangsdrehungen Schulter- und Ellbogengelenk:

Beugungswinkel $\psi_{8,10}$ des Ellbogengelenks	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°
Verhältnis $\frac{\psi_8''}{\psi_{10}''}$ der Anfangsdrehungen	— 0,32	— 0,32	— 0,31	— 0,29	— 0,27	— 0,24	— 0,19

Beugungswinkel $\psi_{8,10}$ des Ellbogengelenks	70°	80°	90°	100°	110°	120°	130°
Verhältnis $\frac{\psi_8''}{\psi_{10}''}$ der Anfangsdrehungen	— 0,14	— 0,08	0	+ 0,09	+ 0,20	+ 0,31	+ 0,44

Aus den Zahlen der Tabelle ist zunächst wieder zu ersehen, daß die Schwere bei vertikaler Haltung des Oberarms auch eine Anfangsdrehung im Schultergelenk hervorbringt, trotzdem sie gar kein Drehungsmoment auf den Oberarm ausübt. Die eintretende Bewegung des Oberarms ist nur dem Einfluß zuzuschreiben, welchen eine Drehung des Unterarms infolge des Gelenkzusammenhanges auf den Oberarm ausübt, wie früher unter 8) bei der elementaren Ableitung der Bewegungsgleichungen ausführlich auseinandergesetzt worden ist.

Wenn die Oberarmlängsachse vertikal nach unten gerichtet ist, so wird in irgend einer Beugestellung des Ellbogengelenks die Schwere den erhobenen Unterarm senken und eine Streckung im Ellbogengelenk hervorrufen. Die Zahlen der Tabelle zeigen nun, daß, solange die rechtwinklige Beugestellung im Ellbogengelenk noch nicht erreicht ist, das Schultergelenk dabei gleichzeitig gebeugt und der Oberarm infolgedessen nach vorn gedreht wird. In der Nähe der extremen Streckstellung des Ellbogengelenks beträgt die Anfangsbeugung im Schultergelenk etwa den dritten Teil der gleichzeitigen Anfangstreckung im Ellbogengelenk. Je mehr sich aber die Haltung des Armes der rechtwinkligen Beugestellung des Ellbogengelenks nähert, um so geringer wird relativ die Beugung im Schultergelenk, bis sich endlich aus der rechtwinkligen Beugestellung selbst der Oberarm im Anfang nicht mit bewegt. In größeren Beugestellungen des Ellbogengelenks wird nun das Schultergelenk durch die Schwere gestreckt, der Oberarm also nach rückwärts gedreht, und zwar um so mehr, je näher die Ausgangshaltung des Armes der extremen Beugestellung kommt.

In Figur 46 findet sich die von der Schwere bei vertikal nach unten hängendem Oberarm hervorgerufene Anfangsbewegung des Armes in der schon in den letzten Figuren angewendeten Weise für einige Ausgangsstellungen dargestellt. Dabei ist wiederum angenommen worden, daß das Drehungsverhältnis sich nicht ändert, während im Ellbogengelenk eine Streckung von 30° vor sich geht.

Ist die Längsachse des Oberarms vertikal nach oben in der Ausgangsstellung gerichtet und das Ellbogengelenk irgendwie gebeugt, so kann die Schwere nur die Beugung im Ellbogengelenk vermehren. Bei Ausgangshaltungen des Armes zwischen der extremen Streckstellung und der rechtwinkligen Beugestellung des Ellbogengelenks

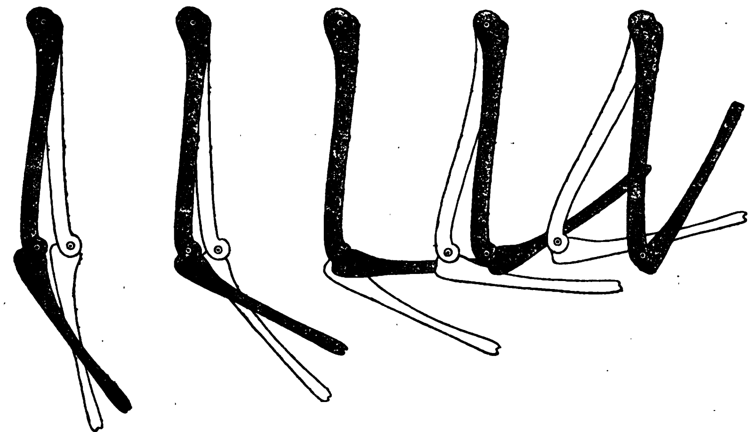


Fig. 46.

muß dabei im Schultergelenk eine Rückwärtsdrehung, d. h. eine Streckung eintreten. Dies folgt aus dem negativen Vorzeichen der entsprechenden Verhältniszahlen in der obigen Tabelle. Sobald da



Fig. 47.

gegen in der Ausgangsstellung das Ellbogengelenk über die rechtwinklige Beugestellung hinaus gebeugt ist, wird die weitere von der Schwere erzeugte Beugung im Ellbogengelenk von einer Beugung im Schultergelenk begleitet. In der rechtwinkligen Beugestellung selbst

wirkt dagegen die Schwere im ersten Moment gar nicht auf das Schultergelenk ein.

Die hiermit in groben Zügen geschilderte Anfangsbewegung des Armes unter der alleinigen Einwirkung der Schwere wird durch Figur 47 in der bisherigen Weise für einige Ausgangstellungen veranschaulicht.

Wenn in der Ausgangshaltung des Armes nicht die Längsachse des Oberarms, sondern die Längsachse des Unterarms vertikal gerichtet ist, so besitzt das von der Schwere ausgeübte Drehungsmoment $D_{s_{10}}$ den Wert Null. Man hat daher in diesem Falle genau dieselben Verhältnisse wie bei der isolierten Kontraktion eines nur über das Schultergelenk hinwegziehenden Muskels. Es gelten infolgedessen dann die in der Tabelle auf den Seiten 282 und 283 bzw. 292 niedergelegten Werte für das Verhältnis der Anfangsdrehungen. Man gewinnt daher auch eine richtige Vorstellung für die Änderung der Armhaltung durch die Figuren 43 und 44. Nur muß man dieselben so betrachten, daß in der Ausgangshaltung die Längsachse des Unterarms vertikal gerichtet ist, und zwar in Figur 43 vertikal nach unten, in Figur 44 dagegen vertikal nach oben. Denn man erkennt leicht, daß bei vertikal nach unten gesenktem Unterarm die Schwere wie ein ein gelenkiger Beugemuskel, dagegen bei verkikal erhobenem Unterarm wie ein eingelenkiger Streckmuskel des Schultergelenks wirkt.

Einen weiteren speziellen Fall, der im Grunde auch schon früher erledigt ist, hat man, wenn in der Ausgangshaltung des Armes der Gesamtschwerpunkt desselben mit dem Mittelpunkte des Schultergelenks in einer Vertikalen liegt, und nun der Arm der Einwirkung der Schwere allein überlassen bleibt. Man hat dann genau dieselben Verhältnisse wie bei der isolierten Kontraktion eines nur über das Ellbogengelenk hinwegziehenden Muskels; die Drehungsmomente D_{s_8} und $D_{s_{10}}$, mit welchen die Schwere in diesem Falle auf die beiden Abschnitte des Armes einwirkt, sind wie bei den eingelenkigen Ellbogenmuskeln entgegengesetzt gleich. Es gelten infolgedessen auch die in der Tabelle auf Seite 279 bzw. in der auf Seite 291 niedergelegten Zahlen für das Verhältnis der Anfangsdrehungen. Man kann weiterhin die Figuren 41 und 42 direkt als Veranschaulichung der von der Schwere in diesem Falle hervorgerufenen Anfangsbewegungen auffassen. Zu dem letzteren Zwecke hat man nur die Figuren so zu betrachten, daß der Schwerpunkt des Armes in der Ausgangshaltung bei Figur 41 vertikal über und bei Figur 42 vertikal unter dem Mittelpunkte des Schultergelenks erscheint. Dies kann man nach dem früheren (vgl. Seite 248) leicht mit Hilfe des in den Figuren mit angegebenen Richtpunktes R des Unterarmes erreichen.

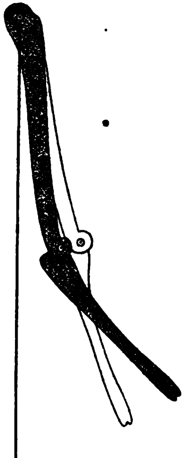
Man hat also das Resultat, daß die Schwere genau die gleiche Anfangsbewegung des Armes hervorbringt wie ein eingelenkiger Ell-

bogenbeuger oder ein eingelenkiger Ellbogenstrecker, je nachdem in der Ausgangshaltung der Schwerpunkt des Armes vertikal über oder vertikal unter dem Mittelpunkte des Schultergelenks liegt.

Bei einer beliebigen Stellung des Armes muß man erst das Verhältnis der beiden Drehungsmomente der Schwere aus den Werten der beiden Gelenkwinkel berechnen, bevor man die Formel (280) zur Bestimmung des Verhältnisses der Anfangsdrehungen verwenden kann. Die hierzu dienende Formel ergibt sich aus (232) in Rücksicht auf die für den Arm geltenden Werte (233) der beiden Hauptstrecken; sie lautet

$$\frac{D_{s_8}}{D_{s_{10}}} = \frac{21{,}65 \sin \psi_{1,8}}{9{,}16 \sin (\psi_{1,8} + \psi_{8,10})}. \tag{282}$$

Aus derselben erhält man z. B. für eine Haltung des Armes, bei welcher der Schulter- und Ellbogengelenkwinkel bzw. $+10^0$ und 30^0 betragen, als Wert des Verhältnisses der Drehungsmomente $+0{,}64$. Die Schwere sucht im vorliegenden Falle, wie man ohne weiteres erkennt, sowohl den Oberarm als auch den Unterarm in die Stellung überzuführen, bei welcher die Längsachsen beider vertikal nach unten gerichtet sind. Man könnte also vielleicht vermuten, daß die Schwere bei der angegebenen Stellung des Armes sowohl im Schultergelenk als auch im Ellbogengelenk Streckung hervorbingen wird. Setzt man den gefundenen Wert für $\frac{D_{s_8}}{D_{s_{10}}}$ in (280) ein und beachtet, daß $\psi_{8,10} = 30^0$ ist, so erhält man für das Verhältnis der Anfangsdrehungen den Wert $-0{,}16$. Die Drehung im Schultergelenk findet also in entgegengesetztem Sinne statt wie die Drehung im Ellbogengelenk. Da letztere ungefähr sechsmal so groß ist als die erstere, und die Bewegung des Armes unter der Einwirkung der Schwere natürlich nur so vor sich gehen kann, daß sich dabei der Schwerpunkt des Armes senkt, so überzeugt man sich leicht, daß es sich hier nur um Streckung im Ellbogengelenk und Beugung im Schultergelenk handeln kann. Die Bewegung findet also so statt, wie sie durch die Figur 48 veranschaulicht wird. Bewerkenswert ist dabei wieder, daß im Schultergelenk Beugung eintritt, trotzdem die Schwere bestrebt ist, eine Streckung hervorzubringen. Der Grund für diese Tatsache ist ebenfalls in der gegenseitigen Beeinflussung der beiden Abschnitte des Armes bei der Bewegung zu suchen.


Fig. 48.

Während man bei dem eben behandelten Beispiel nicht im Zweifel sein konnte, wie der Drehungssinn in beiden Gelenken ist, gibt es Fälle, in

denen man sich nicht ohne weiteres darüber Rechenschaft geben kann. Man muß dann zu der Formel (265) zurückgreifen, welche die Winkelbeschleunigungen in den beiden Gelenken eines zweigliedrigen Systems aus den Drehungsmomenten zu berechnen gestattet. Setzt man in diese Formeln die für den Arm gefundenen Werte der Konstanten λ_1, λ_2, l_1 und c_2 ein, so erkennt man zunächst, daß der gemeinsame Nenner für den Arm einen positiven Wert besitzt; denn es ist schon das Produkt $\lambda_1 \lambda_2$ größer als das Produkt $l_1 c_2$. Es richtet sich daher das Vorzeichen der beiden Winkelbeschleunigungen, und damit das Vorzeichen der Anfangsdrehungen, nach dem Vorzeichen der Zähler in (265). Dividiert man die Zähler durch das an und für sich positive Produkt $l_1 c_2$ und beachtet, daß damit (266) in (268) übergeführt wird, so kann man in Rücksicht auf die für den Arm eingeführten Indizes und die zugehörigen Werte der Konstanten (vgl. (280)) sagen:

$\psi_{1,8}''$ hat das gleiche Vorzeichen wie $\left[0{,}894 \frac{D_{s_8}}{D_{s_{10}}} - \cos \psi_{8,10}\right] D_{s_{10}}$ und

$\psi_{8,10}''$ hat das gleiche Vorzeichen wie

$$\left[(2{,}095 + \cos \psi_{8,10}) - (0{,}894 + \cos \psi_{8,10}) \frac{D_{s_8}}{D_{s_{10}}}\right] D_{s_{10}}.$$

Es ist demnach die Drehung im Hüftgelenk positiv oder negativ, je nachdem sich für den Zähler von (280) bei der Berechnung des Drehungsverhältnisses ein Vorzeichen ergeben hat, welches mit dem Vorzeichen des Drehungsmomentes $D_{s_{10}}$ übereinstimmt oder demselben entgegengesetzt ist. Die Drehung im Ellbogengelenk ist dagegen positiv oder negativ, je nachdem der Nenner von (280) das gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen wie $D_{s_{10}}$ hat.

Hat man z. B. eine Ausgangsstellung, bei welcher der Oberarm bis zur horizontalen Stellung seiner Längsachse erhoben, und der Unterarm wieder im Ellbogengelenk um 30° aus der äußersten Streckstellung gebeugt ist, so besitzen die beiden Gelenkwinkel $\psi_{1,8}$ und $\psi_{8,10}$ die Werte 90° und 30°. Es folgt demnach für das Verhältnis der Drehungsmomente D_{s_8} und $D_{s_{10}}$ nach (282) der Wert + 2,73 und hieraus nach (280) für das Verhältnis der Anfangsdrehungen der Wert — 0,85. Bei der Berechuug dieses Verhältnisses mit Hilfe der Formel (280) hat sich für den Zähler das positive und für den Nenner das negative Vorzeichen herausgestellt. Da nun, wie man leicht bestätigt, bei der angenommenen Stellung des Arms $D_{s_{10}}$ negativ ist, so ergibt sich, daß im vorliegenden Falle das Schultergelenk gestreckt und das Ellbogengelenk gebeugt wird, so wie es Figur 49 andeutet. Das ist wiederum ein bemerkenswertes Resultat; denn wenn man z. B. das Schultergelenk festgestellt denkt, so müßte natürlich Streckung im Ellbogengelenk stattfinden.

In den beiden zuletzt angeführten Beispielen handelte es sich um die gleiche Stellung im Ellbogengelenk; es war beidemal der Unterarm um 30° aus der äußersten Streckstellung gegen den Oberarm gebeugt angenommen. Dagegen sollte der Oberarm im Schultergelenk im ersten Falle um 10°, im zweiten um 90° aus der vertikalen Stellung nach vorn herausgedreht sein. Trotzdem sich die beiden Stellungen des Armes nur dadurch unterscheiden, daß im zweiten Falle der Oberarm um 80° mehr erhoben ist als im ersten, so finden doch in dem einen Falle die Anfangsdrehungen in den Gelenken im entgegengesetzten Sinne statt als im anderen. Denkt man sich den Arm unter Beibehaltung der Beugestellung des Ellbogengelenks durch allmähliches Erheben des Oberarms aus der ersten Stellung in die zweite übergeführt, so ist von vornherein zu erwarten, daß man dabei auf eine Stellung treffen wird, in welcher keine Anfangsdrehung mehr im Schultergelenk stattfindet, und auf eine andere Stellung, in welcher im Ellbogengelenk keine Anfangsdrehung vorhanden ist. Die eine Stellung wird dadurch charakterisiert sein, daß das Verhältnis der Anfangsdrehungen im Schulter- und Ellbogengelenk den Wert Null angenommen hat, für die andere Stellung muß dagegen dieses Verhältnis unendlich groß, das reziproke Verhältnis also gleich Null sein. Zwischen diesen beiden ausgezeichneten Stellungen ist dann weiter eine Anfangsbewegung des Armes zu erwarten, in welcher die beiden Gelenkdrehungen von gleichem Drehungssinn sind, so daß ihr Verhältnis einen positiven Wert besitzt.

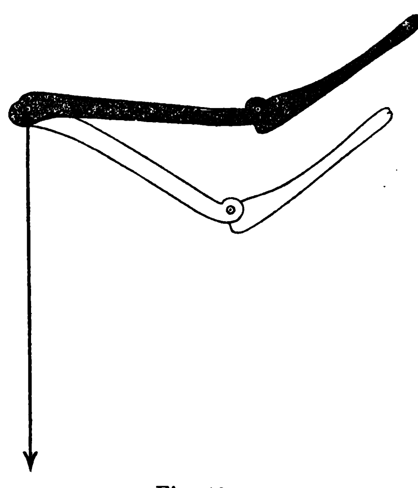


Fig. 49.

Um diese singulären Stellungen des Armes festzustellen, hat man nur zunächst zu untersuchen, für welche Werte des Verhältnisses der beiden Drehungsmomente D_{s_8} und $D_{s_{10}}$ das Verhältnis $\frac{\psi''_{1,8}}{\psi''_{8,10}}$ entweder gleich Null oder unendlich groß wird. Die Entscheidung läßt sich leicht mit Hilfe der Formel (280) treffen. In dem einen Falle muß nämlich der Zähler, in dem anderen der Nenner auf der rechten Seite von (280) den Wert Null annehmen.

Es findet daher ausschließlich Drehung im Ellbogengelenk statt, wenn

$$\text{(283)} \qquad \frac{D_{s_8}}{D_{s_{10}}} = \frac{\cos \psi_{8,10}}{0,894},$$

dagegen ausschließlich Drehung im Schultergelenk, wenn

$$\text{(284)} \qquad \frac{D_{s_8}}{D_{s_{10}}} = \frac{2,095 + \cos \psi_{8,10}}{0,894 + \cos \psi_{8,10}}$$

ist. Beachtet man nun, in welcher Beziehung nach (282) dieses Verhältnis der Drehungsmomente zu den beiden Gelenkwinkeln $\psi_{1,8}$ und $\psi_{8,10}$ steht, so kann man leicht in beiden Fällen die zusammengehörenden Werte der Gelenkwinkel berechnen.

Setzt man die rechten Seiten der Formeln (283) und (282) gleich, so erhält man nach einer einfachen Umformung hieraus schließlich die Formel

$$\text{(285)} \qquad \operatorname{tg} \psi_{1,8} = \frac{\sin \psi_{8,10} \cos \psi_{8,10}}{2,113 - \cos^2 \psi_{8,10}}.$$

Diese Formel dient dazu, für jede durch einen bestimmten Wert von $\psi_{8,10}$ charakterisierte Beugestellung im Ellbogengelenk die Stellung des Schultergelenks zu berechnen, von welcher aus die Schwere ausschließlich eine Anfangsdrehung im Ellbogengelenk hervorbringt. Besitzt nun $\psi_{8,10}$ den Wert 30°, wie oben angenommen wurde, so ergibt sich aus (285) für $\psi_{1,8}$ bis auf halbe Grade abgerundet der Wert $17\frac{1}{2}°$.

Setzt man dagegen die rechten Seiten der Formeln (284) und (282) einander gleich, so erhält man wiederum nach einer einfachen Umformung zur Berechnung von $\psi_{1,8}$ die Formel

$$\text{(286)} \qquad \operatorname{tg} \psi_{1,8} = \frac{(2,095 + \cos \psi_{8,10}) \sin \psi_{8,10}}{2,113 + 0,269 \cos \psi_{8,10} - \cos^2 \psi_{8,10}}.$$

Mit Hilfe dieser Formel kann man andererseits für jede durch einen bestimmten Wert von $\psi_{8,10}$ charakterisierte Beugestellung im Ellbogengelenk die Stellung des Schultergelenks berechnen, von welcher aus die Schwere ausschließlich eine Anfangsdrehung im Schultergelenk hervorbringt. Für den speziellen Wert 30° des Winkels $\psi_{8,10}$ ergibt sich aus (286) für $\psi_{1,8}$ der Wert von abgerundet 43°.

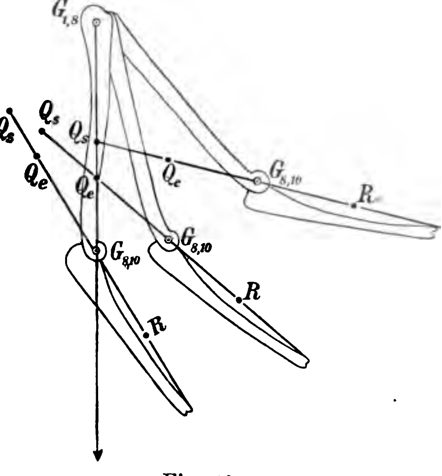


Fig. 50.

Diese beiden singulären Haltungen des Armes, in denen bei alleiniger Einwirkung der Schwere entweder nur Bewegung im Ell-

bogengelenk oder nur Bewegung im Schultergelenk eintritt, finden sich in Figur 50 zusammen mit der Haltung dargestellt, in welcher der Oberarm bei gleicher Beugestellung im Ellbogengelenk vertikal nach unten gerichtet ist. Geht man von dieser letzteren Stellung aus und dreht ohne Änderung der Beugestellung des Ellbogengelenks den Oberarm im Schultergelenk nach vorn und oben bis zur äußersten Grenze, so ergibt sich aus der eben angestellten Untersuchung das folgende Verhalten des Armes gegenüber der Einwirkung der Schwere.

Im Anfang streckt die Schwere das Ellbogengelenk und beugt gleichzeitig das Schultergelenk in der Weise, daß das Verhältnis der Anfangsdrehungen im Schulter- und Ellbogengelenk den Wert $-0{,}29$ (vgl. die Tabelle auf Seite 297) besitzt. Erhebt man nun den Oberarm, so tritt die Beugung im Schultergelenk gegen die Streckung im Ellbogengelenk noch mehr zurück. Ist der Oberarm um 10^0 auf der vertikalen Stellung herausgedreht, so ist das Drehungsverhältnis schon auf etwa die Hälfte, genauer auf $-0{,}16$ herabgesunken (vgl. Fig. 48) und wenn die Drehung um $17\frac{1}{2}^0$ aus der vertikalen Stellung erfolgt ist, so hat die Anfangsbeugung im Schultergelenk ganz aufgehört; es wird also jetzt allein im Ellbogengelenk Streckung hervorgebracht. Geht die Erhebung des Oberarms weiter, so bekommt das Verhältnis der Anfangsdrehungen einen positiven Wert, d. h. aber es tritt jetzt neben der Streckung des Ellbogengelenks auch Streckung im Schultergelenk ein. Diese Streckung des Schultergelenks überwiegt bald die gleichzeitige Streckung des Ellbogengelenks, und zwar um so mehr, als die letztere sich so wie so allmählich verringert. Wenn der Oberarm um 43^0 aus der vertikalen Stellung erhoben ist, so ist die Bewegung im Ellbogengelenk ganz verschwunden, und es ist momentan nur noch Streckung im Schultergelenk als Wirkung der Schwere vorhanden. Wird nun der Oberarm noch mehr erhoben, so tritt von neuem Bewegung im Ellbogengelenk ein; dieselbe besteht aber jetzt in einer Beugung desselben, die mit weiterer Erhebung des Oberarms immer mehr zunimmt. Ist beispielsweise der Oberarm in die horizontale Lage gekommen, so ist das Verhältnis der Streckung des Schultergelenks zu der Beugung im Ellbogengelenk auf den Wert $-0{,}85$ heruntergesunken, so daß also jetzt schon wieder die Anfangsdrehung im Ellbogengelenk die stärkere geworden ist. In der Stellung des Armes, in welcher bei 30^0 Beugungswinkel im Ellbogengelenk die Längsachse des Unterarms vertikal nach oben gerichtet ist, besitzt endlich das Verhältnis der Anfangsdrehungen den noch kleineren Wert $-0{,}51$ (vgl. die Tabelle auf Seite 282). Die Beugung im Ellbogengelenk ist daher jetzt verhältnismäßig noch größer geworden.

Wie man sieht, ist die Kenntnis der singulären Stellungen des Armes, in denen unter dem Einfluß der Schwere entweder nur Drehung im Ellbogengelenk oder nur Drehung im Schultergelenk

eintritt, von Bedeutung für die Entscheidung, von welcher Art in einer anderen Ausgangshaltung des Armes mit gleichem Ellbogenwinkel die Bewegungen in den beiden Gelenken sind. Liegt diese Ausgangsstellung zwischen den beiden singulären Stellungen, so sind die Drehungen in den Gelenken von gleicher Art, liegt sie außerhalb, so haben die Gelenkbewegungen entgegengesetzten Drehungssinn.

Unter Verwendung der Formeln (285) und (286) kann man in jedem Falle einer bestimmten Beugehaltung des Ellbogengelenks die singulären Stellungen leicht berechnen. Man kann nun aber auch ohne Berechnung des Schultergelenkwinkels $\psi_{1,8}$ auf mehr anschaulichem Wege zu der Kenntnis der genannten singulären Stellungen gelangen, wenn man sich nur mit Hilfe der einfacheren Formeln (283) und (284) vorher die Verhältnisse der beiden Drehungsmomente D_{s_8} und $D_{s_{10}}$ verschafft, welche diesen Stellungen entsprechen. Kennt man nämlich das Verhältnis der Drehungsmomente, mit welchen die Schwere auf die beiden Abschnitte des Armes in einer Stellung einwirkt, so kann man nach dem früheren (vgl. Seite 259) auch sofort den Punkt auf der Längsachse des Unterarms angeben, welcher in der betreffenden Stellung mit dem Mittelpunkte des Schultergelenks in einer Vertikalen liegt. Dieser Punkt ist früher als Gleichgewichtspunkt bezeichnet worden; er liegt so, daß das Verhältnis seines Abstandes von der Ellbogenachse zu dem Abstand der Ellbogenachse vom Richtpunkte des Unterarms gleich dem Verhältnis der Drehungsmomente D_{s_8} und $D_{s_{10}}$ ist. Im Falle, daß der Ellbogenwinkel $\psi_{8,10}$ den Wert 30^0 besitzt, berechnet man für das Verhältnis dieser Drehungsmomente aus (283) den Wert $+ 0{,}969$ und aus (284) den Wert $+ 1{,}682$. Es liegt daher im ersten Falle der Gleichgewichtspunkt (Q_e in Fig. 50) auf der Rückwärtsverlängerung der Unterarmlängsachse nahezu ebenso weit vom Mittelpunkte des Ellbogengelenks ab, als dieser vom Richtpunkte entfernt ist. Im zweiten Falle liegt der Gleichgewichtspunkt (Q_s in Fig. 50) ebenfalls auf der Rückwärtsverlängerung der Unterarmlängsachse, aber noch weiter von der Ellbogenachse entfernt.

Wenn man sich mit Hilfe der angegebenen Werte für das Verhältnis der Drehungsmomente die zu den beiden singulären Stellungen gehörenden genauen Lagen Q_e und Q_s des Gleichgewichtspunktes verschafft hat, wie es in Fig. 50 angedeutet ist, so hat man dann ein sehr einfaches und zugleich anschauliches Mittel, bei jeder anderen Stellung des Armes mit gleichem Ellbogenwinkel zu entscheiden, in welchem Sinne die Drehungen in den beiden Gelenken stattfinden. Es ist auch nach den obigen Auseinandersetzungen ohne weiteres klar, daß die durch die Schwere hervorgerufenen Anfangsdrehungen im Schulter- und Ellbogengelenk gleichen oder entgegengesetzten Drehungssinn haben, je nachdem der Gleichgewichtspunkt auf der Längsachse des Unterarms innerhalb oder außerhalb der Strecke

$\overline{Q_e Q_s}$ liegt. Befindet sich der Gleichgewichtspunkt innerhalb dieser Strecke, so werden beide Gelenke gestreckt. Befindet er sich außerhalb, und zwar auf der Seite, welche an Q_e angrenzt, so wird das Schultergelenk gebeugt und das Ellbogengelenk gestreckt; liegt er dagegen auf der Verlängerung der Strecke $\overline{Q_e Q_s}$ über Q_s hinaus, so wird umgekehrt das Schultergelenk gestreckt und das Ellbogengelenk gebeugt.

Die in Figur 50 angegebene Lage der Punkte Q_e und Q_s gilt nur für den Fall, daß der Winkel $\psi_{8,10}$ des Ellbogengelenks den Wert 30^0 besitzt.

Man kann aber auch für alle anderen Beugestellungen im Ellbogengelenk den Ort dieser beiden Punkte sofort angeben, wenn man die entsprechenden Werte des Verhältnisses der Drehungsmomente D_{s_8} und $D_{s_{10}}$ kennt.

Aus Formel (283) berechnet man für die verschiedenen Stellungen des Armes, in denen nur Bewegung im Ellbogengelenk eintritt, die in folgender Tabelle niedergelegten zusammengehörenden Werte von $\psi_{8,10}$ und $\frac{D_{s_8}}{D_{s_{10}}}$:

Beugungswinkel $\psi_{8,10}$ des Ellbogengelenks	0^0	10^0	20^0	30^0	40^0	50^0	60^0
Verhältnis $\frac{D_{s_8}}{D_{s_{10}}}$ bzw. $\left[\frac{D_{s_{10}}}{D_{s_8}}\right]$	[+0,894]	[+0,908]	[+0,951]	+ 0,969	+ 0,857	+ 0,719	+ 0,559

Beugungswinkel $\psi_{8,10}$ des Ellbogengelenks	70^0	80^0	90^0	100^0	110^0	120^0	130^0
Verhältnis $\frac{D_{s_8}}{D_{s_{10}}}$ bzw. $\left[\frac{D_{s_{10}}}{D_{s_8}}\right]$	+ 0,383	+ 0,194	0	— 0,194	— 0,383	— 0,559	— 0,719

In dieser Tabelle ist wieder der Wert des reziproken Verhältnisses angegeben und durch eine Klammer kenntlich gemacht, wenn sich $D_{s_8} > D_{s_{10}}$ herausgestellt hat. Man erkennt aus der Tabelle, daß der Punkt Q_e so lange auf der Rückwärtsverlängerung der Unterarmlängsachse liegt, als der Beugungswinkel $\psi_{8,10}$ des Ellbogengelenks noch nicht den Wert 90^0 erreicht hat. In der rechtwinkligen Beugestellung fällt Q_e mit dem Mittelpunkte des Ellbogengelenks zusammen und bei höheren Beugegraden liegt er auf der Längsachse des Unterarms selbst und nähert sich dabei immer mehr dem Richtpunkte des Unterarms. Einige sich ergebende Stellungen des Armes, in denen die Schwere nur Streckung im Ellbogengelenk hervorbringt, finden sich in Figur 51 dargestellt.

Weiterhin berechnet man aus Formel (284) für die verschiedenen

Stellungen des Armes, in denen nur Bewegung im Schultergelenk eintritt, die folgenden zusammengehörenden Werte von $\psi_{8,10}$ und $\frac{D_{s_{10}}}{D_{s_8}}$. Es handelt sich dabei in der Tabelle ausschließlich um Werte dieses

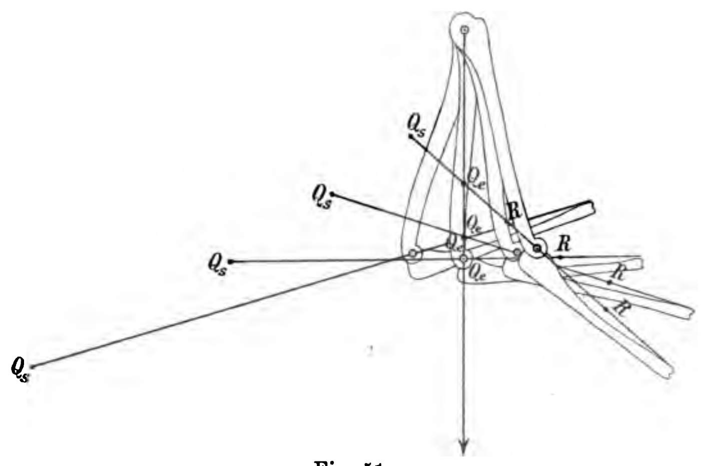


Fig. 51.

reziproken Verhältnisses, da für alle in Betracht kommenden Stellungen $D_{s_8} > D_{s_{10}}$ ist; deshalb konnten auch die Klammern um die Zahlen fortgelassen werden:

Beugungswinkel $\psi_{8,10}$ des Ellbogengelenks	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°
Verhältnis $\frac{D_{s_{10}}}{D_{s_8}}$	+ 0,612	+ 0,610	+ 0,604	+ 0,594	+ 0,580	+ 0,561	+ 0,537

Beugungswinkel $\psi_{8,10}$ des Ellbogengelenks	70°	80°	90°	100°	110°	120°	130°
Verhältnis $\frac{D_{s_{10}}}{D_{s_8}}$	+ 0,507	+ 0,471	+ 0,427	+ 0,375	+ 0,315	+ 0,247	+ 0,173

Aus dieser Tabelle ist zu ersehen, daß der Punkt Q_s für alle Beugegrade des Ellbogengelenks auf der Rückwärtsverlängerung der Unterarmlängsachse liegt, und zwar durchweg in einer Entfernung vom Ellbogengelenkmittelpunkte, welche größer ist als die Entfernung des letzteren vom Richtpunkte; denn da die Zahlen sich auf das reziproke Verhältnis der beiden Drehungsmomente beziehen, so geben sie zugleich das Verhältnis des Abstandes des Ellbogengelenkmittelpunktes vom Richtpunkte zu dem Abstande des Gleichgewichtspunktes Q_s vom Ellbogengelenkmittelpunkte an. In Figur 52 findet sich auch eine Anzahl der durch die Tabelle gewonnenen Stellungen des Armes

dargestellt, in welchen die Schwere ausschließlich Drehung, und zwar Streckung, im Schultergelenk hervorbringt.

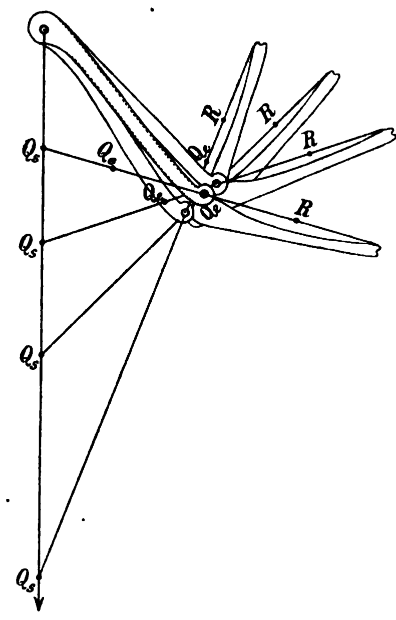


Fig. 52.

In Figur 51 findet sich die Lage von Q_s und in Figur 52 die Lage von Q_e gleichzeitig mit auf der Unterarmlängsachse angegeben. Man ist daher imstande, an der Hand der beiden Figuren sich in der oben geschilderten Weise eine klare Vorstellung zu bilden, in welchem Sinne die von der Schwere hervorgebrachten Anfangsdrehungen in jeder beliebigen Stellung des Armes stattfinden. Man braucht zu diesem Zwecke nur zu entscheiden, ob in einer Stellung des Armes der Gleichgewichtspunkt innerhalb der zu dem bestimmten Wert von $\psi_{8,10}$ gehörenden Strecke $\overline{Q_e Q_s}$ liegt, oder ob er auf der Verlängerung derselben über Q_e bzw. Q_s hinaus zu suchen ist. Diese Untersuchung muß die Berechnung des Verhältnisses der Anfangsdrehungen in den beiden Gelenken nach Formel (280) ergänzen; denn aus dieser Rechnung erfährt man eben nur den Wert des Drehungsverhältnisses, man wird aber dabei nicht zugleich über den Sinn der beiden Drehungen orientiert.

Man kann nun schließlich auch unter Vermeidung der Rechnung auf graphischem Wege zu der Kenntnis des Verhältnisses der Anfangsdrehungen gelangen, wenn man sich die Fläche konstruiert und in ihren Projektionen darstellt, welche die Abhängigkeit des Verhältnisses der Anfangsdrehungen von dem Verhältnis der Drehungsmomente und dem Beugungswinkel im Ellbogengelenk veranschaulicht. Da es zu weit führen würde, diese Methode hier ausführlich auseinanderzusetzen, so sei auf meine zweite Abhandlung über „Beiträge zu einer Muskeldynamik", welche den besonderen Titel: „Über die Wirkung der Schwere und beliebiger Muskeln auf das zweigliedrige System"[1]) führt, und außerdem auf die Abhandlung: „Das statische und das kinetische Maß für die Wirkung eines Muskels"[2]) verwiesen. In denselben findet sich nicht nur die genannte Fläche in verschiedener

1) Abhandl. der math. phys. Klasse der Königl. Sächs. Ges. d. Wissensch. Band XXIII. Nr. VI. 1897.

2) Abhandl. der math. phys. Klasse der Königl. Sächs. Ges. d. Wissensch. Band XXVII. Nr. V. 1902.

Weise dargestellt, sondern auch die Verwendung derselben zur Bestimmung des Verhältnisses der Anfangsdrehungen infolge der Einwirkung der Schwere oder beliebiger Muskeln an den zweigliedrigen Systemen des Arms und Beins an zahlreichen Beispielen erläutert.

β) Spezielles Beispiel der Anfangsbewegung infolge der Einwirkung von Muskeln und Schwere: Das Ablösen der Fersen vom Boden.

Im 17. Abschnitt sind unter b γ) die Bedingungen untersucht worden, unter denen sich Muskeln und Schwere bei erhobenen Fersen das Gleichgewicht halten, so daß der Mensch stehen bleibt, nachdem er sich auf die Zehen erhoben hat. Im Anschluß an dieses Gleichgewichtsproblem soll nun an dieser Stelle noch untersucht werden, unter welchen Bedingungen überhaupt eine wenn auch nur kurz dauernde Ablösung der Fersen vom Boden eintreten kann, und wie sich dabei von verschiedenen Ausgangshaltungen aus die Anfangsdrehungen in den hier überhaupt in Betracht kommenden Gelenken gestalten. Man hat es in diesem Falle mit einer Anfangsbewegung des Körpers zu tun, bei welcher nicht die Schwere allein und auch nicht allein Muskeln, sondern beide gemeinsam auf denselben einwirken.

Es sollen wieder beide Füße parallel stehen und sich beim Ablösen gleichzeitig nur um die gemeinsame feste Achse M durch die I. Metatarsusköpfchen beider Seiten drehen können (vgl. Fig. 53 und auch die frühere Fig. 35 auf Seite 255). Der Umstand, daß in Wirklichkeit die gemeinsame Drehungsachse beim Erheben auf die Zehen etwas nach vorn wandert, fällt in Anbetracht der sonstigen vereinfachenden Voraussetzungen für den Beginn des Ablösens der Fersen nicht ins Gewicht. Der übrige Körper mit Ausnahme der Füße, welcher das starre zweite Glied des ebenen zweigliedrigen Systems darstellt, ist gegen das aus den beiden Füßen gebildete erste Glied in der gemeinsamen Achse F der beiden oberen Sprunggelenke drehbar. Macht man noch die annähernd verwirklichte Annahme, daß alle auf die beiden Abschnitte des Körpers einwirkenden Kräfte der Medianebene parallel laufen, und beachtet, daß auch die Bewegungen des Ablösens der parallel gestellten Füße zu dieser Ebene parallel laufen, so genügt es, den ganzen Körper mit allen Kräften auf diese Ebene projiziert zu denken, so wie es Figur 53 veranschaulicht, und nur die Bewegungen in dieser Projektion zu untersuchen.

Die Verbindungsstrecke MF soll die Längsachse des ersten Gliedes heißen, und ihre Länge mit l_1 bezeichnet sein. Ferner soll die von F nach dem Schwerpunkte des zweiten Gliedes führende Strecke als die Längsachse desselben, und ihre Länge mit r_2 bezeichnet sein. Hält man an der früher gemachten Voraussetzung fest, daß die Masse der Füße gegenüber der Masse des übrigen Körpers vernachlässigt

werden kann, so fällt dieser Schwerpunkt mit dem Gesamtschwerpunkte S_0 des ganzen Körpers zusammen. In denselben Punkt fällt auch der Hauptpunkt des zweiten Gliedes, während der Hauptpunkt des ersten Gliedes mit F identisch ist. Es stellt daher in diesem speziellen Falle l_1 zugleich die Hauptstrecke c_1 des ersten Gliedes, und r_2 die Hauptstrecke c_2 des zweiten Gliedes dar, und die Masse des zweiten Gliedes stimmt mit der Masse m_0 des ganzen Körpers überein. Die Längsachsen MF und FS_0 sollen mit der nach hinten gerichteten Horizontalen bezüglich die Winkel φ_1 und φ_2 bilden (vgl. Fig. 53), dann stellt die Differenz $\varphi_2 - \varphi_1$ den Winkel ψ des Zwischengelenks F (Fußgelenks) dar, während φ_1 selbst als Winkel in dem gemeinsamen Metatarsophalangealgelenk M aufgefaßt werden kann.

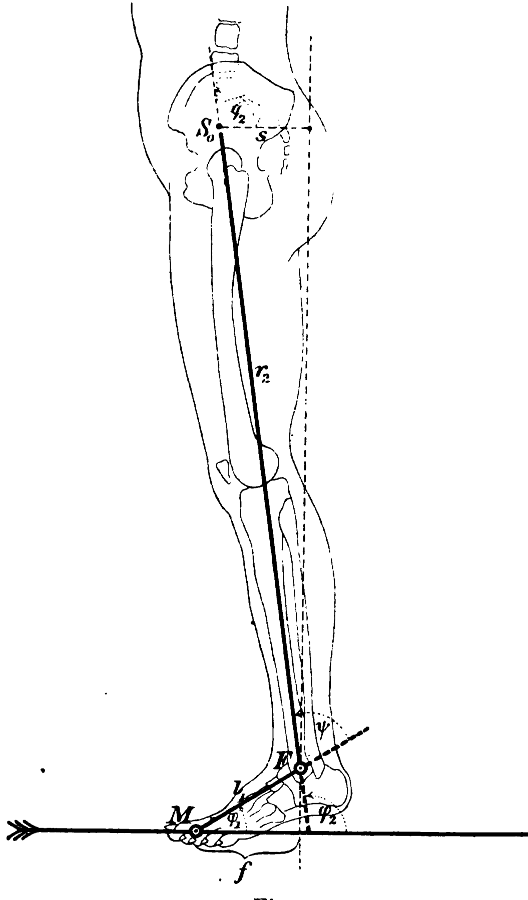


Fig. 53.

Für den Anfang der Bewegung dieses Systems aus der Ruhe, d. h. also hier für das Ablösen der Fersen vom Boden bei irgend einer Ausgangshaltung gelten nun wieder die allgemeinen Gleichungen (263) bzw. (264). Da im vorliegenden Falle weniger die Bewegung im Fußgelenk als vielmehr die Anfangsbewegung der beiden Abschnitte im Raume von Interesse ist, so sollen der Untersuchung die Gleichungen (263) auf Seite 271 zugrunde gelegt werden, in denen die Winkelbeschleunigungen φ_1'' und φ_2'' der beiden Längsachsen im Raume verwendet sind.

Jedes der beiden auf den rechten Seiten dieser Gleichungen stehenden Drehungsmomente D_1 und D_2 setzt sich hier aus dem resultierenden Drehungsmoment der Muskeln und dem Drehungsmoment

der Schwere für den betreffenden Abschnitt zusammen. Da es sich nur um eingelenkige Muskeln handeln kann, so ist das resultierende Drehungsmoment, mit welchem die Muskeln auf das erste Glied einwirken, entgegengesetzt gleich dem resultierenden Drehungsmoment, mit welchem sie das zweite Glied zu drehen suchen. Die hinter der Achse des oberen Sprunggelenks hinwegziehenden Muskeln suchen den Winkel φ_1 zu vergrößern, die vor der Achse liegenden suchen φ_1 dagegen zu verkleinern. Das von den ersteren auf das Glied ausgeübte Drehungsmoment ist daher positiv, das der letzteren negativ. Da, wie sich zeigen wird, hauptsächlich die hinter der Achse vorüberziehende Wadenmuskulatur für das Ablösen der Fersen in Frage kommt, so wird das resultierende Drehungsmoment der Muskeln für das erste Glied positiv, für das zweite negativ sein. Bezeichnet man das erste mit D_m, so besitzt das zweite den Wert $-D_m$.

Da der Hauptpunkt des ersten Gliedes in die Achse F des Fußgelenks fällt, so ist das Drehungsmoment, mit welchem die Schwere auf das erste Glied einwirkt, nach dem früheren gleich dem Produkt aus dem Gewicht G des ganzen Körpers und dem horizontalen Abstand f der Vertikalen durch F von dem Drehpunkte M. Der Abstand f läßt sich leicht mit Hilfe von l_1 und φ_1 berechnen; er ist gleich $l_1 \cos \varphi_1$. Da die Schwere den Winkel φ_1 zu verkleinern sucht, so ist dieses Drehungsmoment negativ in Rechnung zu ziehen. Da der Hauptpunkt des zweiten Gliedes mit S_0 zusammenfällt, so wirkt nach dem früheren die Schwere auf das zweite Glied mit einem Drehungsmoment ein, welches durch das Produkt aus dem Gesamtgewicht G und dem horizontalen Abstand s der Vertikalen durch F von dem Gesamtschwerpunkte S_0 gemessen wird. Rechnet man diesen Abstand positiv, wenn die Vertikale durch F hinter dem Gesamtschwerpunkte vorüberzieht, so wie es in der durch Figur 53 dargestellten Haltung der Fall ist, so läßt sich s mit Hilfe von φ_2 durch das Produkt $-r_2 \cos \varphi_2$ für jede Ausgangshaltung leicht berechnen. Das Drehungsmoment, mit welchem die Schwere unter dieser Voraussetzung bei positivem s auf das zweite Glied einwirkt, besitzt positiven Wert; denn es sucht φ_2 zu vergrößern. Beachtet man noch, daß c_2 mit r_2 identisch ist, und daß die Differenz $\varphi_2 - \varphi_1$ die Größe des Winkels ψ zwischen der Längsachse des zweiten Gliedes und der Verlängerung der Längsachse des ersten Gliedes (vgl. Fig. 53) angibt, so gehen in dem vorliegenden speziellen Falle die Gleichungen (263) über in

$$(287) \quad \begin{aligned} m_0 \lambda_1^2 \cdot \varphi_1'' + m_0 l_1 r_2 \cos \psi \cdot \varphi_2'' &= D_m - Gf \\ m_0 \lambda_2^2 \cdot \varphi_2'' + m_0 l_1 r_2 \cos \psi \cdot \varphi_1'' &= D_m + Gs. \end{aligned}$$

Das erste reduzierte System ist unter den gemachten Voraussetzungen auf den Massenpunkt F mit der Gesamtmasse m_0 zusammen-

geschrumpft; das Trägheitsmoment $m_0 \lambda_1^2$, für welches im folgenden die kurze Bezeichnung M_1 verwendet werden soll, ist daher mit $m_0 l_1^2$ identisch. Das zweite reduzierte System wird dagegen durch den ganzen Körper mit Ausnahme der beiden Füße dargestellt. Das Trägheitsmoment $m_0 \lambda_2^2$ desselben ist daher nicht verschieden von dem Trägheitsmoment dieses Körperabschnittes in bezug auf die gemeinsame Achse F beider oberen Sprunggelenke; es soll für dasselbe die kurze Bezeichnung M_2 gebraucht werden. Schließlich soll auch noch für das in den Gleichungen auftretende Produkt $m_0 l_1 r_2$ die kürzere Bezeichnung $\mathsf{M}_{1,2}$ eingeführt sein. Unter Verwendung dieser Bezeichnungen ergibt die Auflösung der Gleichungen (287) nach den beiden Winkelbeschleunigungen φ_1'' und φ_2'' das Resultat:

$$(288)\quad \begin{cases} \varphi_1'' = \dfrac{D_m(\mathsf{M}_2 + \mathsf{M}_{1,2}\cos\psi) - G(f\cdot\mathsf{M}_2 + s\cdot\mathsf{M}_{1,2}\cos\psi)}{\mathsf{M}_1\mathsf{M}_2 - \mathsf{M}_{1,2}^2\cos^2\psi} \\[2ex] \varphi_2'' = \dfrac{-D_m(\mathsf{M}_1 + \mathsf{M}_{1,2}\cos\psi) + G(s\cdot\mathsf{M}_1 + f\cdot\mathsf{M}_{1,2}\cos\psi)}{\mathsf{M}_1\mathsf{M}_2 - \mathsf{M}_{1,2}^2\cos^2\psi} \end{cases}$$

Zur Berechnung des Trägheitsmomentes M_2 dienen die aus direkten Messungen an einem geeigneten Präparate gewonnenen Unterlagen, welche in den ersten vier Spalten der folgenden Tabelle niedergelegt sind:

Körperteile	Gewicht in kg	Massenzahl	Trägheitsradius $\varkappa$ in bez. auf die zur Medianebene senkrechte Achse durch den Schwerpunkt des Körperteils in cm	Abstand des Schwerpunktes des Körperteils von der Achse des oberen Sprunggelenks in cm	Trägheitsmoment des Körperteils in bez. auf die Achse des oberen Sprunggelenks.
Rumpf + Kopf	27,710	0,02824	23,4	113,5	379,258
Ganze obere Extremität	3,615	0,00368	21,2	98,5	37,258
Oberschenkel	6,450	0,00657	12,4	65,3	29,025
Unterschenkel	2,935	0,00299	10,4	24,3	2,089

Die in der letzten Spalte angegebenen Zahlen für die Trägheitsmomente in bezug auf die Achse des oberen Sprunggelenks sind aus den übrigen berechnet worden. Hierzu dient der schon früher angeführte Satz, nach welchem man das Trägheitsmoment eines Körpers für eine beliebige Achse dadurch erhalten kann, daß man das Trägheitsmoment für die parallele Schwerpunktsachse um das Produkt aus der Masse des Körpers und dem Quadrat des Abstandes der Achse vom Schwerpunkte vermehrt. Aus den Trägheitsmomenten der einzelnen Körperteile gewinnt man nun durch Addition das Trägheitsmoment M_2 des ganzen Körpers ohne die Füße, wobei natürlich die Trägheitsmomente der oberen Extremität und des Ober- und Unter-

schenkels zweimal in Rechnung zu ziehen sind. Auf diese Weise erhält man in dem eingeführten Maßsystem für M_2 den Wert 516,202.

Zur Berechnung des Trägheitsmomentes M_1, welches gleich dem Produkt $m_0 l_1^2$ ist, hat man zu beachten, daß der Abstand l_1 zwischen der Sprunggelenk- und der Metatarsalachse bei dem zugrunde gelegten Individuum 15 cm betrug. Als Massenzahl des Gesamtkörpers erhält man aus der obigen Tabelle, unter Vernachlässigung der Masse der Füße, 0,05472. Demnach ergibt sich für M_1 der Wert 12,312.

Der Abstand r_2 des Gesamtschwerpunktes des Körpers von der Sprunggelenkachse F betrug bei dem betreffenden Individuum 86 cm. Demnach besitzt das durch $\mathsf{M}_{1,2}$ bezeichnete Produkt $m_0 l_1 r_2$ den Wert 70,589.

Denkt man diese Werte in (288) eingesetzt und berücksichtigt, daß $\cos\psi$ höchstens den Wert $+1$ annehmen kann, so erkennt man, daß in diesen beiden Formeln der Nenner auf der rechten Seite stets positiv ist. Dies würde sich auch bei jedem anderen normal gebauten Individuum herausgestellt haben. Das Vorzeichen der Winkelbeschleunigungen φ_1'' und φ_2'' richtet sich infolgedessen ausschließlich nach dem Vorzeichen des Zählers in den Formeln. Demnach erhält man für jede Anfangsbewegung aus einer Ruhestellung des ganzen Körpers folgendes allgemein gültige Kriterium über den Sinn der eintretenden Drehungen:

Die Winkelbeschleunigung φ_1'' der Füße ist positiv, Null oder negativ, je nachdem das resultierende Drehungsmoment D_m der Muskeln größer, gleich oder kleiner als der Ausdruck

$$(289) \qquad G\frac{f\cdot\mathsf{M}_2 + s\cdot\mathsf{M}_{1,2}\cos\psi}{\mathsf{M}_2+\mathsf{M}_{1,2}\cos\psi}$$

ist. Dagegen ist die Winkelbeschleunigung φ_2'' des ganzen übrigen Körpers positiv, Null oder negativ, je nachdem das resultierende Drehungsmoment D_m der Muskeln kleiner, gleich oder größer als der Ausdruck

$$(290) \qquad G\frac{s\cdot\mathsf{M}_1 + f\cdot\mathsf{M}_{1,2}\cos\psi}{\mathsf{M}_1+\mathsf{M}_{1,2}\cos\psi}$$

ist.

Eine Drehung der Füße ist nach den gemachten Voraussetzungen positiv, wenn die Fersen erhoben werden, und der übrige um die gemeinsame Achse der oberen Sprunggelenke drehbare Abschnitt des Körpers führt eine positive oder negative Drehung aus, je nachdem dabei der Oberkörper gegen die Füße vorwärts oder rückwärts gedreht wird.

Setzt man die für das der Untersuchung zugrunde gelegte Individuum geltenden Zahlenwerte für M_1, M_2 und $\mathsf{M}_{1,2}$ in (289) ein und kürzt zur Vereinfachung den Quotient mit $\mathsf{M}_{1,2}$, so erhält man nach

dem obigen Kriterium das bestimmte Resultat, daß die Fersen vom Boden abgelöst werden, sobald das resultierende Drehungsmoment D_m der Muskeln so beschaffen ist, daß

$$D_m > G \frac{f \cdot 7{,}312 + s \cdot \cos\psi}{7{,}312 + \cos\psi}. \tag{291}$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so tritt die Ablösung der Fersen als unmittelbare Wirkung der Kontraktion von Muskeln ein, welche das Sprunggelenk überspannen; sie ist aber nicht etwa gleichzeitig eine Folge von Schleuderungen, da ja Winkelgeschwindigkeiten zuerst noch gar nicht vorhanden sind.

Man kann sich nun leicht davon überzeugen, daß der Faktor von G in (291) für alle in Frage kommenden Ruhehaltungen des Körpers einen positiven Wert besitzt; denn selbst bei negativem s oder negativem Wert von $\cos\psi$ wird doch immer das erste Glied sowohl im Zähler als auch im Nenner an Größe das zweite übertreffen. Daraus geht aber hervor, was schon oben angedeutet wurde, daß in jedem Falle das resultierende Drehungsmoment D_m der Muskeln einen positiven Wert besitzen muß, wenn die Fersen vom Boden abgelöst werden sollen, d. h. es kann sich dabei nur um die Wadenmuskeln handeln. Befinden sich außer der Wadenmuskulatur beim Ablösen der Fersen auch gleichzeitig vordere Muskeln, wie der M. tibialis anterior, in Kontraktion, so muß dann das Drehungsmoment der ersteren das der letzteren an Größe um den Wert D_m übertreffen.

Will man sich gleichzeitig über die Art der Anfangsbewegung des von den Füßen getragenen Abschnittes des Körpers Rechenschaft geben, so braucht man nur die gefundenen Werte für M_1, M_2 und $\mathsf{M}_{1,2}$ in (290) einzusetzen. Man erhält dann das bestimmte Resultat, daß der um die gemeinsame Sprunggelenkachse drehbare Abschnitt, d. h. also der Körper ohne die Füße, sich relativ zum Sprunggelenk F nach vorn oder nach hinten neigt, je nachdem das resultierende Drehungsmoment D_m der Muskeln kleiner oder größer ist als der Ausdruck

$$G \frac{s \cdot 0{,}174 + f \cdot \cos\psi}{0{,}174 + \cos\psi}. \tag{292}$$

Ist dagegen D_m diesem Ausdruck an Größe gleich, so führt der ganze Körperabschnitt beim Erheben der Füße auf die Zehen eine Translationsbewegung nach Maßgabe der Bewegung der Sprunggelenkachse aus, ohne daß dabei die Längsachse desselben ihre Richtung im Raume änderte.

Endlich erhält man für das Größenverhältnis der beiden Winkelbeschleunigungen φ_1'' und φ_2'', welches das Verhältnis der Anfangsdrehungen beider Abschnitte des Körpers im Raume angibt, aus (288)

nach Einsetzen der Werte für die Größen M die Formel

$$(293)\qquad \frac{\varphi_1''}{\varphi_2''} = \frac{D_m\,(7{,}312 + \cos\psi) - G(f \cdot 7{,}312 + s \cdot \cos\psi)}{-\,D_m\,(0{,}174 + \cos\psi) + G(s \cdot 0{,}174 + f \cdot \cos\psi)}.$$

Es sollen nun einige spezielle Fälle in Betracht gezogen werden.

I. Fall: Der Körperschwerpunkt liege vertikal über der Metatarsalachse. In diesem Falle sind die Strecken f und s beide positiv und gleich lang; man kann also s einfach durch f ersetzen. Zum Ablösen der Fersen ist dann nach dem angegebenen Kriterium (291) nur nötig, daß $D_m > Gf$ ist. Ist diese Bedingung erfüllt, so heben sich nicht nur die Fersen vom Boden ab, sondern es dreht sich auch der zweite Körperabschnitt in negativem Sinne, d. h. der Oberkörper bewegt sich relativ zur Achse der Sprunggelenke gleichzeitig nach hinten; es richtet sich also der ursprünglich nach vorn geneigte Körper auf. Dies bestätigen auch photographische Aufnahmen des Ablösungsvorganges von Grützner.[1]) Damit ist natürlich noch nicht gesagt, daß auch der Körperschwerpunkt im Raume nach hinten wandert; denn die Sprunggelenkachse erfährt ja beim Ablösen der Fersen eine Bewegung, die nicht nur nach oben, sondern auch etwas nach vorn gerichtet ist. So viel ist aber a priori klar, daß der Schwerpunkt sich hebt; denn sowohl das Erheben der Füße auf die Zehen, als auch das Aufrichten des übrigen Körpers tragen zu einer anfänglichen Hebung des Schwerpunktes bei. Es wäre nur noch zu untersuchen, ob der Schwerpunkt nicht auch eine horizontale Beschleunigungskomponente besitzt, so daß seine Bewegungsrichtung von der Vertikalen abweicht.

Zur Entscheidung dieser Frage muß man in der im 3. Abschnitt des allgemeinen Teils auseinandergesetzten Weise die Beschleunigung $\overline{\gamma}_0$ des Gesamtschwerpunktes S_0 durch die beiden Winkelbeschleunigungen φ_1'' und φ_2'' ausdrücken; denn da die Bewegung aus der Ruhe geschieht, so sind Winkelgeschwindigkeiten φ_1' und φ_2', welche sonst in den Normalbeschleunigungen einen Einfluß auf die Schwerpunktsbeschleunigung ausüben würden, noch nicht vorhanden.

Nach der für das zweigliedrige System vereinfachten Formel (28) auf Seite 28 hat man demnach im vorliegenden Falle nur

$$(294)\qquad \overline{\gamma}_0 = \overline{l_1\varphi_1''} + \overline{r_2\varphi_2''},$$

wobei $\overline{l_1\varphi_1''}$ die Tangentialbeschleunigung des Punktes F relativ zu M, und $\overline{r_2\varphi_2''}$ die Tangentialbeschleunigung des Punktes S_0 relativ zu F darstellt. Die erstere ist senkrecht zur Längsachse MF des ersten, und die letztere senkrecht zur Längsachse FS_0 des zweiten Abschnittes

1) Vgl. Grützner, Über den Mechanismus des Zehenstandes. Archiv f. d. ges. Physiologie. Bd. LXXIII. Fig. 10, Seite 630.

gerichtet. Gegen die nach vorn gerichtete Horizontale (vgl. Fig. 54) ist daher die erstere um den Winkel $90^0 - \varphi_1$, die letztere um den Winkel $\varphi_2 - 90^0$, bzw. bei spitzem Winkel φ_2 um $90^0 - \varphi_2$ geneigt; mit der nach oben gerichteten Vertikalen bildet dagegen die erstere den Winkel φ_1 und die letztere den Winkel φ_2. Denkt man sich daher die Schwerpunktsbeschleunigung $\bar{\gamma}_0$ in zwei Komponenten x_0'' und y_0'' zerlegt, von denen die erstere horizontal, die letztere dagegen vertikal gerichtet ist, und rechnet jene nach hinten und diese nach oben positiv, so erhält man für die beiden Beschleunigungskomponenten des Schwerpunktes die folgenden Formeln, welche wiederum nur einen speziellen Fall der früheren Formeln (31) auf Seite 29 darstellen

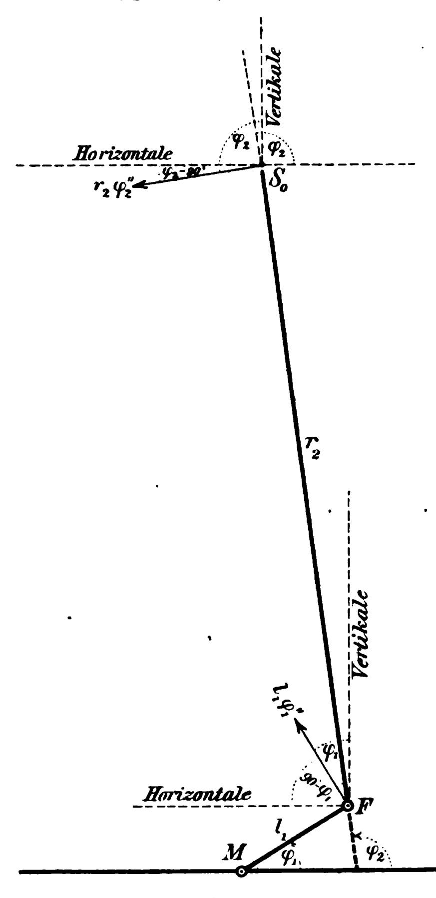


Fig. 54.

$$
(295) \qquad \begin{aligned} x_0'' &= -\, l_1 \varphi_1'' \sin \varphi_1 \\ &\quad - r_2 \varphi_2'' \sin \varphi_2 \\ y_0'' &= \quad l_1 \varphi_1'' \cos \varphi_1 \\ &\quad + r_2 \varphi_2'' \cos \varphi_2 . \end{aligned}
$$

Nach dem Einsetzen der in einem bestimmten Falle mit Hilfe von (288) gefundenen Werte von φ_1'' und φ_2'' kann man dann aus dem Vorzeichen des Resultats sofort entscheiden, ob sich der Schwerpunkt hebt oder senkt, und ob er dabei gleichzeitig nach vorn oder hinten wandert. Bei reiner Erhebung des Schwerpunktes ohne horizontale Bewegung müßte z. B. y_0'' positiv und x_0'' gleich Null sein, usw.

Um die genaue Richtung zu bestimmen, in welcher sich der Schwerpunkt aus einer Ruhehaltung im Anfang fortbewegt, braucht man nur das Verhältnis $y_0'' : x_0''$ auszurechnen; dasselbe ist dann gleich der trigonometrischen Tangente des Winkels, welchen die Bewegungsrichtung des Schwerpunktes mit der nach hinten gerichteten Horizontalen bildet. Will man dagegen den Winkel ε berechnen, welchen die Bewegungsrichtung des Schwerpunktes mit der nach

vorn gerichteten Horizontalen bildet, was sich hier mehr empfiehlt, so hat man das Verhältnis $y_0'' : (-x_0'')$ auszurechnen. Dasselbe läßt sich nach (295) auf die Form bringen

(296) $$\operatorname{tg} \varepsilon = -\frac{l_1 \frac{\varphi_1''}{\varphi_2''} \cos \varphi_1 + r_2 \cos \varphi_2}{l_1 \frac{\varphi_1''}{\varphi_2''} \sin \varphi_1 + r_2 \sin \varphi_2},$$

woraus zu erkennen ist, daß der Winkel ε nur von dem Verhältnis der beiden Winkelbeschleunigungen abhängt.

Das Verhältnis $\varphi_1'' : \varphi_2''$ nimmt nun im Falle, daß der Körperschwerpunkt vertikal über der Metatarsalachse liegt, infolge der Gleichheit von s und f nach (293), wie man leicht bestätigt, folgenden einfachen Wert an

(297) $$\frac{\varphi_1''}{\varphi_2''} = -\frac{7{,}312 + \cos \psi}{0{,}174 + \cos \psi}.$$

Es ist insbesondere zu beachten, daß in diesem Falle weder die Größe des resultierenden Drehungsmomentes der Muskeln noch das Gesamtgewicht des Körpers einen Einfluß auf den Wert des Verhältnisses der Anfangsdrehungen besitzt. Dagegen ändert sich dieses Verhältnis mit der Ausgangsstellung, welche jetzt schon durch den Winkel ψ eindeutig charakterisiert wird. Der Winkel ψ reicht hierzu allein aus, weil bei vertikal über der Metatarsalachse stehendem Schwerpunkte S_0 der Winkel φ_2 sich in enger Abhängigkeit von dem Winkel φ_1 befindet und daher durch denselben ausgedrückt werden kann. Es bilden nämlich in diesem Falle die drei Punkte M, F, S_0 ein Dreieck, dessen eine Seite vertikal steht (vgl. Fig. 55), so daß zwei Winkel desselben direkt gleich den Winkeln $90^0 - \varphi_1$ und $\varphi_2 - 90^0$ sind, um welche die Längsachse MF und FS_0 der beiden Abschnitte gegen die Vertikale geneigt sind. Dem ersteren liegt die Seite r_2, dem letzteren dagegen die Seite l_1 gegenüber, so daß man zwischen den Winkeln φ_1 und φ_2 die Beziehung hat

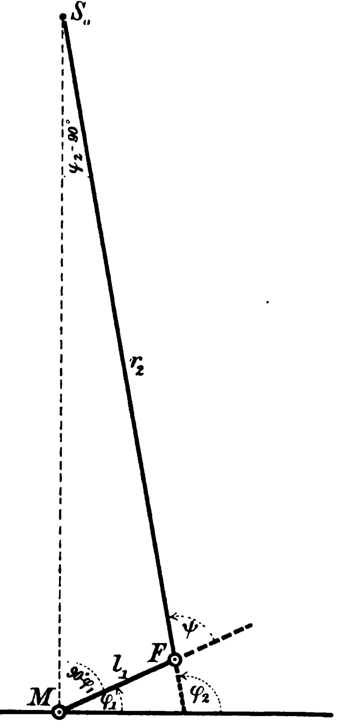


Fig. 55.

(298) $$\cos \varphi_1 : -\cos \varphi_2 = r_2 : l_1.$$

Da $l_1 = 15$ cm und $r_2 = 86$ cm, so folgt hieraus zur Berechnung von φ_2 die Formel

$$\cos \varphi_2 = -0{,}174 \cos \varphi_1. \tag{299}$$

In dem gewöhnlichen Falle, daß die Fersen zunächst auf dem Boden aufstehen und bei der Bewegung abgelöst werden, beträgt der Winkel φ_1, den die Längsachse MF des Fußes mit der Horizontalebene bildet, nach Messungen am Lebenden angenähert 25^0. Mit Hilfe der Formel (299) ergibt sich daher für φ_2 der Wert 97^0 und hieraus für ψ der Wert 72^0. Man erhält infolgedessen nach (297) für das Verhältnis der Anfangsdrehungen der beiden Abschnitte im Moment des Ablösens der Fersen vom Boden den Wert $-15{,}8$. Da dieses Verhältnis, wie oben vorausgesagt wurde, einen negativen Wert besitzt, so richtet sich also der Oberkörper nach hinten auf, während die Füße sich um die Metatarsalachse drehen. Dabei ist die Drehung der Füße rund 16mal so groß als die gleichzeitige Rückwärtsdrehung des übrigen Körpers.

Setzt man für das Verhältnis der Winkelbeschleunigungen den Wert $-15{,}8$ in (296) ein, so erhält man für tg ε den abgerundeten Wert $+15$. Daraus geht hervor, daß die Bewegung, welche der Körperschwerpunkt beim Ablösen der Fersen im Anfang ausführt, bei der betrachteten Ausgangsstellung des Körpers nicht genau vertikal nach oben, sondern zugleich etwas nach vorn gerichtet ist. Der Winkel, um welchen die Richtung dieser Anfangsbewegung gegen den horizontalen Fußboden geneigt ist, beträgt abgerundet 86^0; dieselbe weicht also nur um 4^0 von der Vertikalen nach vorn ab.

Mit Hilfe der Formeln (294) bis (299) läßt sich in ganz gleicher Weise der Fall behandeln, daß der Körper aus irgend einer Ruhehaltung mit schon erhobenen Fersen, bei welcher nach dem früheren (vgl. 17bγ)) der Schwerpunkt auch vertikal über der Metatarsalachse liegen muß, in Bewegung gesetzt werden soll. Man kann dann sowohl nach den Bedingungen des weiteren Erhebens, als auch nach denen des Senkens der Fersen fragen. In den Formeln ist dabei der Wert von ψ einzusetzen, durch welchen die betreffende Ausgangshaltung charakterisiert ist. Die Durchführung spezieller Beispiele unterliegt nach der ausführlichen Behandlung des Falles $\psi = 72^0$ keinen Schwierigkeiten.

II. Fall: Der Körperschwerpunkt liegt vertikal über der gemeinsamen Achse der oberen Sprunggelenke. Dieser Fall ist dadurch charakterisiert, daß die Strecke s den Wert Null besitzt. Zum Ablösen der Fersen ist dann nach dem oben angegebenen Kriterium (291) erforderlich, daß

$$D_m > Gf \frac{7{,}312}{7{,}312 + \cos \psi} \tag{300}$$

ist. Wenn, wie es ja in diesem Falle vorausgesetzt wird, die Längsachse FS_0 des zweiten Abschnittes vertikal steht, so ist, wie man leicht aus Figur 53 ableitet, der Winkel ψ das Komplement zu φ_1. Da beim Aufstehen mit der ganzen Sohle auf horizontalem Boden φ_1 den Wert 25^0 besitzt, so hat man also hier für ψ den Wert 65^0, und als Bedingung für das Ablösen der Fersen

$$(301) \qquad D_m > 0{,}945\ Gf.$$

Dagegen erfährt nach dem früheren Kriterium (292) der zweite Abschnitt eine Anfangsdrehung nach vorn oder hinten, je nachdem D_m kleiner oder größer als

$$(302) \qquad Gf \frac{\cos\psi}{0{,}174 + \cos\psi},$$

d. h. also im vorliegenden Falle, je nachdem D_m kleiner oder größer als

$$(303) \qquad 0{,}709\ Gf$$

ist. Wenn nun $D_m > 0{,}945\ Gf$, so wird notwendigerweise die Ferse vom Boden abgelöst. Da aber gleichzeitig dann auch $D_m > 0{,}709\ Gf$ ist, so neigt sich also dabei der übrige Körper nach hinten. Man sieht also, daß, wenn der Schwerpunkt S_0 vertikal über der gemeinsamen Achse der oberen Sprunggelenke liegt, nicht nur ein Ablösen der Fersen möglich ist, sondern daß hierzu sogar ein kleineres resultierendes Drehungsmoment, und damit eine etwas geringere Spannung der beteiligten Muskeln gehört, als wenn der Schwerpunkt S_0 vertikal über der Metatarsalachse liegt.

Auch in diesem Falle kann man sich zunächst ohne alle Rechnung davon überzeugen, daß der Schwerpunkt beim Ablösen der Fersen gehoben wird. Die Drehung der Füße um die Metatarsalachse erteilt nämlich, wie man sofort erkennt, dem Schwerpunkte eine nach aufwärts gerichtete vertikale Anfangsbewegung, welche durch keine andere Bewegung ausgeglichen werden kann; denn die gleichzeitige Drehung des zweiten Abschnittes ruft infolge der vertikalen Stellung von FS_0 im Anfang nur eine horizontale Bewegung des Schwerpunktes hervor.

Um die genaue Richtung der Anfangsbewegung des Schwerpunktes S_0 abzuleiten, hat man zunächst wieder den Wert des Verhältnisses der beiden Winkelbeschleunigungen φ_1'' und φ_2'' festzustellen. Entsprechend dem Wert Null für die Größe s gilt nach (293) zur Berechnung dieses Verhältnisses die spezielle Formel

$$(304) \qquad \frac{\varphi_1''}{\varphi_2''} = -\frac{D_m(7{,}312 + \cos\psi) - Gf \cdot 7{,}312}{D_m(0{,}174 + \cos\psi) - Gf \cdot \cos\psi}.$$

Da in derselben das resultierende Drehungsmoment D_m der Muskeln noch vorkommt, so kann man den Wert des Verhältnisses

der Anfangsdrehungen durch Änderung der Muskelspannungen in bestimmter Weise variieren.

Für $\psi = 65^0$ geht die Formel über in

$$(305) \qquad \frac{\varphi_1''}{\varphi_2''} = -\frac{7{,}735\, D_m - 7{,}312\, Gf}{0{,}597\, D_m - 0{,}423\, Gf}.$$

Um einen bestimmten Fall herauszugreifen, der sich leicht rechnerisch verfolgen läßt, sei angenommen, daß $D_m = Gf$ ist. Dann werden sicher nach dem oben angeführten Kriterium (301) die Fersen vom Boden abgelöst. Das Verhältnis der Anfangsdrehungen nimmt dabei nach (305) den Wert $-2{,}4$ an. Beachtet man, daß φ_2 im vorliegenden Falle ein rechter Winkel ist, während φ_1 wie früher 25^0 beträgt, so erhält man weiterhin für tg ε nach (296) den Wert $-0{,}46$ und für ε selbst den abgerundeten Wert 155^0. Die Anfangsbewegung, welche in diesem Falle der Schwerpunkt ausführt, ist also nach hinten und oben gerichtet, wobei sie allerdings den verhältnismäßig großen Winkel von 65^0 mit der nach oben gerichteten Vertikalen bildet. Da im ersten Falle, wo der Schwerpunkt vertikal über der Metatarsalachse stand, auch keine genau vertikale, sondern eine nach oben und vorn gerichtete Anfangsbewegung des Schwerpunktes eintrat, so besteht also gar kein prinzipieller Unterschied zwischen dem Beginn des Ablösens der Fersen in jenem und dem eben betrachteten Falle. Ein wesentlich verschiedenes Verhalten zeigt der Körper erst im weiteren Verlaufe der Bewegung; denn da im letzten Falle der Schwerpunkt nicht mehr über der Unterstützungsfläche liegt, sobald die Fersen sich etwas vom Boden abgelöst haben, so kann natürlich der Körper nicht in einer beliebigen Bewegungsphase zum Stillstand gebracht werden. Dies ist aber im ersten Falle deshalb möglich, weil ja in Wirklichkeit die Füße bei erhobenen Fersen nicht bloß auf der Metatarsalachse ruhen, sondern auch noch mit den Unterflächen der Zehen den Boden berühren.

Bisher war angenommen worden, daß das resultierende Drehungsmoment D_m der Muskeln bei vertikal über der Sprunggelenkachse befindlichem Schwerpunkte an Größe gleich dem Produkt Gf ist. Nimmt man dagegen an, daß D_m doppelt so groß wie dieses Produkt ist, so erhält das Verhältnis der Winkelbeschleunigungen φ_1'' und φ_2'' den Wert $-10{,}6$, ferner wird tg $\varepsilon = -7{,}69$ und infolgedessen $\varepsilon = 97^1/_2{}^0$. Die Anfangsbewegung des Schwerpunktes wäre also dann nahezu vertikal gerichtet, da sie mit der nach oben gehenden Vertikalen nur noch einen Winkel von $7^1/_2{}^0$ bildet. Würde man weiterhin mit den Muskeln ein Drehungsmoment ausüben können, welches so groß ist, daß ihm gegenüber das Drehungsmoment Gf der Schwere gar nicht in Betracht käme, so würde das Verhältnis der Winkelbeschleunigungen den Wert -13 und tg ε den Wert $-50{,}3$ an-

nehmen. Der Winkel ε wäre dann abgerundet 91^0, so daß also dann der Schwerpunkt sich im Anfang fast genau vertikal nach oben bewegen würde.

Nach der eingehenden Untersuchung der beiden extremen Fälle, daß der Schwerpunkt entweder vertikal über der Metatarsalachse oder vertikal über der Sprunggelenkachse steht, wird man es wohl ohne weiteres verstehen, daß auch in jedem anderen Falle, in dem die Vertikale durch den Schwerpunkt die Unterstützungsfläche zwischen den beiden Gelenkachsen durchschneidet, und sogar noch in dem Falle, wo der Schwerpunkt nur vertikal über der Zehenregion steht, durch bloße Aktion der über das Sprunggelenk hinwegziehenden Muskeln die Fersen vom Boden abgelöst werden können. Natürlich werden dabei jedesmal die Fersen sehr bald wieder auf den Boden aufgesetzt. Verharren kann man in einer Stellung mit abgelösten Fersen eben nur, wenn die Vertikale des Schwerpunktes auch dann noch durch die Unterstützungsfläche hindurchgeht.

19. Über den ganzen Verlauf der Gelenkbewegungen bei fortgesetzter Kontraktion eines Muskels.

Bei den Untersuchungen des 18. Abschnittes war vorausgesetzt worden, daß vor der Kontraktion eines Muskels die Glieder des zweigliedrigen Gelenksystems sich im Ruhestande befanden. Unter dieser Annahme konnte man die von den Muskeln bei ihrer Kontraktion hervorgebrachten Anfangsbewegungen ableiten. Es ließen sich aber noch keineswegs damit die Gesetze feststellen, welche die Drehungen in den beiden Gelenken befolgen, wenn der Muskel sich während einer endlichen Zeit kontrahiert und dadurch fortwährend neue Bewegungsimpulse auf die beiden Glieder ausübt. Man könnte auch aus der Kenntnis der Anfangsdrehungen allein noch gar keinen Schluß auf die Art der Fortsetzung der Bewegung ziehen, wenn der Muskel tatsächlich nur einen einzigen Impuls ausüben und dann das System sich selbst überlassen würde; denn es würden auch in diesem Falle die Drehungsgeschwindigkeiten in den beiden Gelenken infolge der gegenseitigen Einwirkung der beiden Glieder aufeinander im allgemeinen nicht konstant bleiben.

Um einen genauen Einblick in den weiteren Verlauf der Gelenkbewegungen gewinnen zu können, genügt es demnach nicht, unter Nullsetzung der Winkelgeschwindigkeiten φ_1' und φ_2' bzw. ψ' die Winkelbeschleunigungen φ_1'' und φ_2'' bzw. ψ'' aus den Drehungsmomenten abzuleiten, sondern man muß auch diese Winkelgeschwindigkeiten selbst bestimmen, da sie im weiteren Verlaufe der Bewegung nicht mehr zu vernachlässigen sind, sondern beträchtliche Werte erlangen können. Wie es zur Ermittlung der Art der Anfangsdrehungen

nur nötig war, sich das Verhältnis der Winkelbeschleunigungen zu verschaffen, so braucht man auch hierbei zunächst nur sein Augenmerk auf das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten zu richten. Die Bestimmung des Verhältnisses der Winkelgeschwindigkeiten gewährt jedoch allein noch keinen genügenden Einblick in den Ablauf der Bewegungen. Man muß zu diesem Zwecke schließlich auch noch die Kenntnis der einzelnen Stellungen zu erlangen suchen, welche das zweigliedrige System während der Bewegung sukzessive durchläuft. Hierzu ist aber nötig, daß man die zusammengehörenden Werte der beiden Winkel φ_1 und φ_2 bzw. der Gelenkwinkel feststellt, durch welche diese Stellungen charakterisiert werden.

Der exakten Lösung dieser Aufgaben stellen sich nun im allgemeinen Falle der Einwirkung beliebiger Muskeln und der Schwere große, zum Teil unüberwindliche Schwierigkeiten entgegen. Denn dieselbe läuft im Grunde auf eine Integration der schon verhältnismäßig komplizierten Bewegungsgleichungen hinaus. Es kann daher hier nur an einem speziellen Falle gezeigt werden, wie sich unter günstigen Umständen die Behandlung und Lösung der angedeuteten Aufgaben gestaltet.

Im allgemeinen Teile ist gezeigt worden, in welcher Weise die Bewegungsgleichungen aus dem Werte der lebendigen Kraft T des Gelenksystems abgeleitet werden können. Für den Fall, daß das eine der beiden Glieder des ebenen zweigliedrigen Gelenksystems sich nur um eine feste Achse drehen kann, die zur Achse des Zwischengelenks parallel läuft, wurde für die lebendige Kraft der Ausdruck (67) auf Seite 42 erhalten. Da der Kosinus eines negativen Winkels gleich dem des zugehörigen positiven Winkels ist, so kann man (67) auch in der Form schreiben:

$$(306) \quad T = \tfrac{1}{2} m_0 \lambda_1^2 \cdot \varphi_1'^2 + \tfrac{1}{2} m_0 \lambda_2^2 \cdot \varphi_2'^2 + m_0 l_1 c_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \varphi_1' \varphi_2'.$$

Zur Bildung der Bewegungsgleichungen mußte man sich nach (68) unter anderem die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial T}{\partial \varphi_1}$ und $\frac{\partial T}{\partial \varphi_2}$ verschaffen. Dieselben lauten unter Zugrundelegung des Ausdrucks (306)

$$(307) \quad \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} &= m_0 l_1 c_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \varphi_1' \varphi_2', \\ \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} &= - m_0 l_1 c_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \varphi_1' \varphi_2'. \end{aligned}$$

Wie man sieht, sind diese beiden partiellen Differentialquotienten entgegengesetzt gleich. Addiert man daher die beiden für das bedingt bewegliche zweigliedrige System allein in Frage kommenden allgemeinen Lagrangeschen Gleichungen (vgl. die dritten Gleichungen von (68)), so heben sich die beiden Glieder $\frac{\partial T}{\partial \varphi_1}$ und $\frac{\partial T}{\partial \varphi_2}$ fort, und

man erhält, wenn man gleichzeitig für die Drehungsmomente Q_{φ_1} und Q_{φ_2} die später eingeführten Bezeichnungen D_1 und D_2 verwendet,

(308) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi_1'}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi_2'}\right) = D_1 + D_2.$$

Durch beiderseitige Multiplikation mit dem Differential dt und Integration ergibt sich hieraus die zunächst ganz allgemein gültige Beziehung

(309) $$\frac{\partial T}{\partial \varphi_1'} + \frac{\partial T}{\partial \varphi_2'} = \int (D_1 + D_2)\, dt + C,$$

wobei C die Integrationskonstante bedeutet.

Berechnet man die beiden partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial T}{\partial \varphi_1'}$ und $\frac{\partial T}{\partial \varphi_2'}$ aus (306), so nimmt schließlich (309) die Form an:

(310) $$m_0[\lambda_1^2 + l_1 c_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)] \cdot \varphi_1' + m_0[\lambda_2^2 + l_1 c_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)] \cdot \varphi_2' = \int (D_1 + D_2)\, dt + C.$$

Im speziellen Falle eines eingelenkigen, nur über das Zwischengelenk hinwegziehenden Muskels ist nach dem früheren die Summe der beiden Drehungsmomente D_1 und D_2 gleich Null. Zieht man wieder nur den Fall in Betracht, daß die beiden Glieder des Gelenksystems sich vor der Kontraktion des Muskels in Ruhe befinden, so ist für $\varphi_1' = 0$ auch $\varphi_2' = 0$, und es besitzt infolgedessen die Integrationskonstante C ebenfalls den Wert Null. Man hat daher bei einem sich aus der Ruhe kontrahierenden eingelenkigen Muskel des Zwischengelenks, oder auch bei einem derartigen eingelenkigen Muskelbündel, unter Ausschluß der Wirkung der Schwere für das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten φ_1' und φ_2' den Wert

(311) $$\frac{\varphi_1'}{\varphi_2'} = -\frac{\lambda_2^2 + l_1 c_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}{\lambda_1^2 + l_1 c_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

Hierbei bedeuten φ_1' und φ_2' die Winkelgeschwindigkeiten, mit denen die beiden Glieder sich bei der Bewegung des ganzen Systems im Raume drehen. Handelt es sich um die Bewegungen des nur im Ellbogengelenk gegliederten Armes oder des nur im Kniegelenk gegliederten Beines gegenüber dem festgestellten Rumpf, so kann man φ_1' auch als die Winkelgeschwindigkeit der Drehung im Schultergelenk bzw. Hüftgelenk auffassen. Dagegen stellt sich die Winkelgeschwindigkeit ψ' im Zwischengelenk als Differenz der beiden bisher in Betracht gezogenen Winkelgeschwindigkeiten dar. Beachtet man dies und ersetzt gleichzeitig $\varphi_2 - \varphi_1$ durch ψ, so gelangt man mit Hilfe von (311) zu dem folgenden Wert für das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten φ_1' und ψ' in den beiden Gelenken

(312) $$\frac{\varphi_1'}{\psi'} = -\frac{\lambda_2^2 + l_1 c_2 \cos\psi}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2 l_1 c_2 \cos\psi}.$$

Vergleicht man den Ausdruck für dieses Verhältnis mit dem speziellen Wert, welchen nach (266) das Verhältnis der entsprechenden Winkelbeschleunigungen annimmt, falls man dem Verhältnis $\frac{D_1}{D_2}$ den für die eingelenkigen Muskeln des Zwischengelenks geltenden Wert -1 beilegt, so erhält man ein sehr bemerkenswertes Resultat. Es ergibt sich nämlich, daß während des ganzen Verlaufs der Bewegung, welche ein eingelenkiger Muskel des Zwischengelenks bei seiner Kontraktion aus der Ruhe hervorruft, in jeder Bewegungsphase das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten und das Verhältnis der Winkelbeschleunigungen beider Gelenke gleichen Wert besitzen.

Dividiert man im Zähler und Nenner von (312) wieder mit $l_1 c_2$, so kann man, wie früher, die entstehenden Quotienten $\frac{\lambda_1^2}{l_1 c_2}$ und $\frac{\lambda_2^2}{l_1 c_2}$ bzw. durch $\frac{\sigma_1}{\varrho_2}$ und $\frac{\sigma_2}{l_1}$ ersetzen (vgl. Seite 274). Die Formel (312) geht dann über in

$$(313) \qquad \frac{\varphi_1'}{\psi'} = -\frac{\frac{\sigma_2}{l_1} + \cos\psi}{\frac{\sigma_1}{\varrho_2} + \frac{\sigma_2}{l_1} + 2\cos\psi}.$$

Hierbei bedeutet σ_1 die reduzierte Pendellänge für das um die feste Achse drehbare erste reduzierte System, σ_2 die reduzierte Pendellänge für das um die Achse des Zwischengelenks drehbare zweite reduzierte System, und ϱ_2 den Abstand des Richtpunktes des zweiten Gliedes vom Mittelpunkte des Zwischengelenks.

Die Beziehung (313) stellt eine Differentialgleichung dar, aus welcher sich durch Integration der Ausdruck für die Abhängigkeit des Drehungswinkels φ_1 des einen Gelenks von dem Drehungswinkel ψ des anderen Gelenks finden läßt.

Die Winkelgeschwindigkeiten φ_1' und ψ' sind mit den beiden Differentialquotienten $\frac{d\varphi_1}{dt}$ und $\frac{d\psi}{dt}$ identisch. Setzt man an Stelle des ersten dieser beiden Differentialquotienten das ihm gleiche Produkt $\frac{d\varphi_1}{d\psi} \cdot \frac{d\psi}{dt}$, so hebt sich der gemeinsame Faktor $\frac{d\psi}{dt}$ im Zähler und Nenner auf der linken Seite von (313) fort und man hat

$$(314) \qquad \frac{d\varphi_1}{d\psi} = -\frac{\frac{\sigma_2}{l_1} + \cos\psi}{\frac{\sigma_1}{\varrho_2} + \frac{\sigma_2}{l_1} + 2\cos\psi}.$$

Da sich in dieser Differentialgleichung durch Multiplikation mit $d\psi$ die beiden Variablen φ_1 und ψ separieren lassen, so kann man sie unmittelbar integrieren. Man erhält dann die folgende Beziehung zwischen φ_1 und ψ

$$(315)\quad \varphi_1 = \frac{\frac{\sigma_1}{\varrho_2} - \frac{\sigma_2}{l_1}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_1}{\varrho_2} + \frac{\sigma_2}{l_1}\right)^2 - 4}} \operatorname{arctg} \left\{ \sqrt{\frac{\frac{\sigma_1}{\varrho_2} + \frac{\sigma_2}{l_1} - 2}{\frac{\sigma_1}{\varrho_2} + \frac{\sigma_2}{l_1} + 2}} \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \right\} - \frac{\psi}{2} + \alpha,$$

unter α die Integrationskonstante verstanden.

Mit Hilfe dieser Formel lassen sich nun alle zusammengehörenden Werte der beiden Gelenkwinkel berechnen, welche Stellungen charakterisieren, die das System sukzessive während der Bewegung durchläuft. Da φ_1 den Wert α annimmt, wenn man ψ gleich Null setzt, so stellt α den Winkel des ersten Gelenks dar, welcher der äußersten Streckstellung des Zwischengelenks entspricht.

Da für das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten φ_1', ψ', sowie auch für die Beziehung zwischen φ_1 und ψ nur die beiden Konstanten $\frac{\sigma_1}{\varrho_2}$ und $\frac{\sigma_2}{l_1}$ maßgebend sind, so genügt es, als Beispiel für die Verwendung der Formeln (313) und (315) den allein im Ellbogengelenk gegliederten Arm herauszugreifen. Denn da diese maßgebenden Konstanten nach dem früheren für das allein im Kniegelenk gegliederte Bein mit genügender Annäherung die gleichen Werte besitzen wie für den Arm, so lassen sich die am Arm gewonnenen Resultate ohne weiteres auf das Bein übertragen.

Es hatte sich früher für $\frac{\sigma_1}{\varrho_2}$ der Wert 2,095 und für $\frac{\sigma_2}{l_1}$ der Wert 0,894 herausgestellt. Demnach nimmt für den rechten Arm unter Verwendung der früher eingeführten Indizes die Gleichung (313) die Form an

$$(316)\qquad \frac{\psi_{1,8}'}{\psi_{8,10}'} = -\frac{0{,}894 + \cos\psi_{8,10}}{2{,}989 + 2\cos\psi_{8,10}}.$$

Da die rechte Seite mit der rechten Seite von (275) identisch ist, so kann man die in der Tabelle auf Seite 279 angegebenen Zahlen direkt auch dem Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten im Schulter- und Ellbogengelenk zuschreiben.

Die Beziehung (318) zwischen den beiden Gelenkwinkeln $\psi_{1,8}$ und $\psi_{8,10}$ selbst lautet infolge der obigen Werte der Konstanten für den Arm

$$(317)\qquad \psi_{1,8} = 0{,}540\,54 \operatorname{arctg}\left[0{,}4452 \operatorname{tg}\frac{\psi_{8,10}}{2}\right] - \frac{\psi_{8,10}}{2} + \alpha.$$

Es soll sich nun zunächst um die Kontraktion eines eingelenkigen Beugemuskels des Ellbogengelenks handeln. Denkt man in der Ausgangsstellung das Ellbogengelenk gestreckt und den Oberarm so gestellt, daß bei aufrechter Stellung des Körpers seine Längsachse vertikal nach unten gerichtet ist, so besitzt nach den früheren Bestimmungen über die Bedeutung des Schultergelenkwinkels $\psi_{1,8}$ die

Integrationskonstante α den Wert Null. Man berechnet daher mit Hilfe von (317) unter anderen die folgenden zusammengehörenden Werte der beiden Gelenkwinkel:

Schultergelenkwinkel $\psi_{1,8}$	0°	— 5°41′	— 11°19′	— 16°51′	— 22°13′	— 27°18′
Ellbogengelenkwinkel $\psi_{8,10}$	0°	15°	30°	45°	60°	75°

Schultergelenkwinkel $\psi_{1,8}$	— 32°2′	— 36°13′	— 39°39′	— 42°4′	— 43°8′
Ellbogengelenkwinkel $\psi_{8,10}$	90°	105°	120°	135°	150°

Dabei sind für den Ellbogenwinkel Werte bis zu 150° angenommen worden, obgleich bei manchen Menschen damit schon die äußerste Beugestellung überschritten ist, weil diese Werte auch für das Bein gelten, wenn man, den früheren Festsetzungen über das Vorzeichen der Winkel entsprechend, die entgegengesetzten Vorzeichen verwendet.

In Figur 56 finden sich die Stellungen, welche nach der obigen Tabelle der Arm bei alleiniger Kontraktion eines eingelenkigen Ellbogenbeugers, etwa des M. brachialis einnimmt, in der Weise aufgezeichnet, daß die später erreichten Stellungen des Armes durch immer schwächere Schraffierung kenntlich gemacht sind.

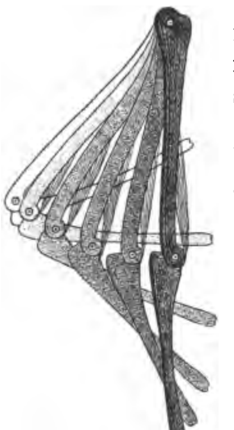


Fig. 56.

Die in der letzten Tabelle angegebenen Winkelwerte gelten auch gleichzeitig für den Fall, daß der Arm aus einer Beugestellung, etwa der extremen Beugestellung, infolge alleiniger Kontraktion eines eingelenkigen Streckers des Ellbogengelenks, wie etwa der eingelenkigen Köpfe des M. triceps brachii, in die Streckstellung übergeführt wird.

Zur Veranschaulichung dieser Bewegung kann man auch gleichzeitig die Figur 56 verwenden. Man hat dabei nur als Ausgangsstellung die zuletzt erreichte Beugestellung des Ellbogengelenks aufzufassen und zu berücksichtigen, daß bei dieser Auffassung der Figur die später erreichten Stellungen durch stärkere Schraffierung hervorgehoben erscheinen.

Beachtet man, daß in den Formeln (316) und (317) irgend welche auf die Spannung oder die Insertionsweise der eingelenkigen Ellbogenmuskeln bezüglichen Größen nicht mehr auftreten, so erkennt man, daß nicht nur das Verhältnis der Anfangsdrehungen, sondern auch das Verhältnis der erreichten Winkelgeschwindigkeiten im Schulter- und Ellbogengelenk, und auch die Aufeinanderfolge der einzelnen Stellungen des Armes von der Spannung dieser Muskeln und ihrer besonderen Art der Insertionen an den Knochen ganz unabhängig sind. Die aufeinanderfolgenden Haltungen des Armes werden

für alle eingelenkigen Muskeln des Ellbogengelenks die gleichen sein. Ein Unterschied kann durch die Änderung der Muskelspannung und der Muskelinsertionen nur insofern erzielt werden, als das eine Mal diese bestimmten Haltungen des Armes schnell, das andere Mal langsam durchlaufen werden, ohne daß jedoch dabei das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten sich ändert. Man hat es also, solange nur Armmuskeln mit dem Ursprung am Oberarm wirken, mit einer zwangläufigen Gliederbewegung zu tun. Eine andere Bewegungsart kann allein durch Muskeln, welche ihren Ursprung außerhalb des Armes, d. h. also am Rumpfe haben, und durch äußere Kräfte, wie die Schwere, bewirkt werden.

Die Art der Bewegung ist, wie sich soeben gezeigt hat, bei der Kontraktion eingelenkiger Muskeln, ausschließlich abhängig von dem Massenverhältnis der beiden Armabschnitte, von der Lage der Schwerpunkte und der Verteilung der Massen innerhalb der einzelnen Teile, wie sie in den Werten der Trägheitsmomente und Trägheitsradien zum Ausdruck kommt. Daraus geht nun hervor, daß die Bewegung sich im allgemeinen ändern wird, wenn das Massenverhältnis und die Massenverteilung andere werden. Dieser Fall tritt beispielsweise ein, wenn man einen schweren Körper in der Hand hält, und nun die Muskeln bei ihrer Kontraktion die Masse dieses Körpers mit in Bewegung zu setzen haben. Durch die neu hinzugebrachte Masse wird nicht allein das Massenverhältnis beider Abschnitte geändert, sondern es rücken auch die Schwerpunkte derselben in distaler Richtung fort, es verschieben sich die beiden Hauptpunkte in derselben Richtung, und es ändern sich die Trägheitsmomente der beiden reduzierten Systeme. Die Muskeln wirken demnach jetzt auf ein Massensystem ein, welches durchaus verschieden ist von dem System, das der unbelastete Arm darstellt.

Die Änderung der Verteilung der Massen, welche ein in der Hand gehaltener Körper verursacht, kommt nun für die Wirkung der eingelenkigen Ellbogenmuskeln nur insofern in Betracht, als durch dieselbe die beiden für das mechanische Verhalten des Systems maßgebenden Konstanten $\frac{\sigma_1}{\varrho_2}$ und $\frac{\sigma_2}{l_1}$ andere Werte erhalten.

Nimmt man wieder wie früher unter 17 b δ) an, daß der in der Hand gehaltene Körper (vgl. Fig. 36 auf Seite 257) das Gewicht G' bzw. die Massenzahl m' besitzt, und daß derselbe mit genügender Annäherung als ein Massenpunkt aufgefaßt werden kann, welcher sich im Abstande a von der Ellbogenachse auf der Längsachse des Unterarms befindet, so werden die neuen Werte der Hauptstrecken $[c_8']$, $[c_{10}']$ und des Abstandes $[\varrho_{10}]$ des Richtpunktes des Unterarms von der Ellbogenachse mit Hilfe der Formeln (252), (251) und (253) bzw. (254) bestimmt. Bezeichnet man weiter mit $[\lambda_8]$ und $\lambda_{10}]$ die

neuen Werte der Trägheitsradien der beiden reduzierten Systeme und beachtet, daß zum ersten reduzierten System im Ellbogengelenkmittelpunkte die Masse m' und zum zweiten reduzierten System im Abstande a von der Ellbogenachse dieselbe Masse m' hinzukommt, so erhält man zur Berechnung der Trägheitsradien und der entsprechenden Trägheitsmomente die Formeln

$$(318)\qquad \begin{aligned} (m_8 + m_{10} + m')\,[\lambda_8]^2 &= (m_8 + m_{10})\,\lambda_8^2 + m' l_8^2 \\ (m_8 + m_{10} + m')\,[\lambda_{10}]^2 &= (m_8 + m_{10})\,\lambda_{10}^2 + m' a^2. \end{aligned}$$

Durch diese und die früheren Formeln (251) bis (254) wird man aber auch in den Stand gesetzt, die neuen Werte der Konstanten $\frac{[\sigma_8]}{[\varrho_{10}]}$ und $\frac{[\sigma_{10}]}{l_8}$ zu berechnen; denn die erste Konstante ist wieder mit $\frac{[\lambda_8]^2}{l_8 [c_{10}']}$ und die zweite mit $\frac{[\lambda_{10}]^2}{l_8 [c_{10}']}$ identisch (vgl. Seite 274).

Als Beispiel soll der Fall angenommen werden, daß der in der Hand gehaltene Körper 15 kg wiegt; dann ist also $G' = 15$ und $m' = 0{,}015289$. Da l_8 die Länge von 30,3 cm, und a nach dem früheren (vgl. Seite 258) die Länge von 34,6 cm besitzt, so erhält man unter Berücksichtigung von (269) und (271) nach den Formeln (251) bis (254) und (318) für die beiden maßgebenden Konstanten schließlich die Werte 0,950 und 1,127. Die Formel (313) zur Berechnung des Verhältnisses der Winkelgeschwindigkeiten nimmt daher in diesem Falle die Form an

$$(319)\qquad \frac{\psi_{1,8}'}{\psi_{8,10}'} = -\frac{1{,}127 + \cos\psi}{2{,}077 + 2\cos\psi}.$$

Aus derselben erhält man für verschiedene Beugungsstellungen des Armes die folgenden Werte des Verhältnisses der Winkelgeschwindigkeiten im Schulter- und Ellbogengelenk:

Beugungswinkel im Ellbogengelenk	0°	15°	30°	45°	60°	75°
Verhältnis der Winkelgeschwindigkeitem im Schulter- und Ellbogengelenk	— 0,522	— 0,522	— 0,523	— 0,525	— 0,529	— 0,534

Beugungswinkel im Ellbogengelenk	90°	105°	120°	135°	150°
Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten im Schulter- und Ellbogengelenk	— 0,543	— 0,557	— 0,582	— 0,633	— 0,757

Diese Zahlen gelten auch gleichzeitig für das Verhältnis der Anfangsdrehungen, welche die eingelenkigen Muskeln des Ellbogengelenks bei isolierter Kontraktion aus der Ruhe in den beiden Gelenken des belasteten Armes hervorrufen. Vergleicht man dieselben mit den ent-

sprechenden Zahlen des unbelasteten Armes auf Seite 279, so erkennt man einen bemerkenswerten Unterschied. Die Vorzeichen stimmen zwar bei beiden überein, was darauf hinweist, daß auch beim belasteten Arm im Schultergelenk stets die entgegengesetzte Drehung hervorgerufen wird wie im Ellbogengelenk. Sieht man aber vom Vorzeichen ab und achtet nur auf die absoluten Werte des Verhältnisses, so zeigt sich, daß beim belasteten Arm der absolute Wert des Verhältnisses mit zunehmender Beugestellung des Ellbogengelenks ebenfalls zunimmt, während er beim unbelasteten Arm immer kleiner wurde. Während ferner beim unbelasteten Arm die absoluten Werte alle kleiner wie 0,5 ausfielen, sind sie beim belasteten Arm alle größer wie 0,5. Wäre der absolute Wert konstant gleich 0,5, so würde in jedem Zeitraum die Drehung im Ellbogengelenk doppelt so groß sein wie die gleichzeitige entgegengesetzt gerichtete Drehung im Schultergelenk. Da aber der Unterarm abgesehen von seiner Bewegung relativ zum Oberarm die Drehung im Schultergelenk mitmachen muß, so würde demnach die Richtungsänderung der Längsachse des Unterarms im Raume in diesem Falle genau gleich groß ausfallen wie die entgegengesetzte Richtungsänderung der Längsachse des Oberarms im Raume. Daß bei der Belastung mit 15 kg der absolute Wert des Verhältnisses der Winkelgeschwindigkeiten in den Gelenken durchweg größer wie 0,5 ausfällt, weist daher darauf hin, daß die Richtungsänderung der Oberarmlängsachse von jeder Armhaltung aus größer ist als die Richtungsänderung der Unterarmlängsachse.

Man kann sich nun durch die Berechnung des Verhältnisses der Winkelgeschwindigkeiten für verschiedene Größen des in der Hand gehaltenen Gewichtes davon überzeugen, daß der absolute Wert dieses Verhältnisses für jede Ausgangshaltung des Armes um so größer ausfällt, je größer das Gewicht G' ist. Es wird daher für ein Gewicht, das kleiner als 15 kg ist, einmal der oben angenommene Fall eintreten, daß für eine bestimmte Ausgangsstellung, etwa die Streckstellung des Armes, das Verhältnis genau gleich $-0,5$ ist. Es läßt sich die Größe des Gewichts G', bei welchem dies stattfindet, leicht bestimmen, wenn man auf die Formel (312) zurückgreift und in derselben die der Belastung entsprechenden Trägheitsradien $[\lambda_8]$ und $[\lambda_{10}]$ und die zugehörige Hauptstrecke $[c'_{10}]$ des belasteten Unterarms einsetzt. Soll der Wert des Verhältnisses der beiden Winkelgeschwindigkeiten $-0,5$ sein, so ergibt sich demnach die Bedingungsgleichung

$$(320) \qquad -\frac{[\lambda_{10}]^2 + l_8 [c'_{10}] \cos \psi_{8,10}}{[\lambda_8]^2 + [\lambda_{10}]^2 + 2\, l_8 [c'_{10}] \cos \psi_{8,10}} = -\frac{1}{2}.$$

Man erkennt leicht, daß dieser Bedingung nur genügt wird, wenn die beiden Trägheitsradien $[\lambda_8]$ und $[\lambda_{10}]$ einander gleich sind, und daß

sie dann aber auch ganz unabhängig von dem Werte des Winkels $\psi_{8,10}$, d. h. also für jede Stellung des Ellbogengelenks, erfüllt wird.

Aus der Bedingung, daß $[\lambda_8]$ und $[\lambda_{10}]$ gleiche Werte annehmen sollen, läßt sich nun nach (318) leicht das bestimmte Gewicht G' ableiten, für welches das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten konstant den Wert $-0{,}5$ besitzt. Aus (318) folgt die Beziehung

$$(321) \qquad (m_8 + m_{10})\,\lambda_8^2 + m' l_8^2 = (m_8 + m_{10})\,\lambda_{10}^2 + m' a^2,$$

woraus sich zunächst für die Masse m' ergibt:

$$(322) \qquad m' = \frac{\lambda_{10}^2 - \lambda_8^2}{a^2 - l_8^2}\,(m_8 + m_{10}).$$

Da die Massen den Gewichten proportional sind, so hat man hieraus schließlich zur Berechnung von G' die Formel

$$(323) \qquad G' = \frac{\lambda_{10}^2 - \lambda_8^2}{a^2 - l_8^2}\,(G_8 + G_{10}).$$

Nun betrugen die Gewichte G_8 und G_{10} 1,908 kg und 1,775 kg, die Trägheitsradien λ_8 und λ_{10} nach (271) 24,11 cm und 15,75 cm, die Länge l_8 30,3 cm und der Abstand a 34,6 cm. Man erhält daher für das gesuchte Gewicht 4,395 kg.

Wenn also ein Mensch, dessen Arm die gleichen Dimensionen und Massen und die gleiche Massenverteilung besitzt wie das der Untersuchung zugrunde gelegte Individuum, ein Gewicht von abgerundet 4,4 kg in der Hand hält, so würde derselbe durch alleinige Kontraktion von eingelenkigen Ellbogenmuskeln den Arm nur so bewegen können, daß der Oberarm sich im Raume immer um den gleichen Winkel in dem einen Sinne, wie der Unterarm in dem anderen Sinne dreht. Dabei müßte natürlich die Einwirkung der Schwere ausgeschlossen sein, was sich annähernd dadurch erreichen läßt, daß man die Längsachsen des Oberarms und Unterarms vor der Kontraktion des Muskels in eine horizontale Ebene bringt, so daß also die beiden Gelenkachsen vertikal stehen. Diese bei einer Belastung von 4,4 kg eintretende Bewegung findet sich durch Figur 57 in der schon in Figur 56 verwendeten Weise anschaulich dargestellt. Der kleine Kreis, welcher sich in einiger Entfernung vom unteren Ulna-Ende befindet, deutet die Lage und Bewegung der in der Hand gehaltenen Masse an.

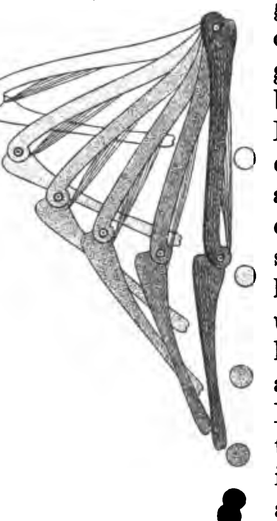


Fig. 57.

Das oben angedeutete Wachstum des absoluten Wertes von dem

Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten bei zunehmender Größe des in der Hand gehaltenen Gewichtes geht nun nicht über alle Grenzen hinaus. Denkt man sich einmal dieses Gewicht so groß, daß das Gewicht des ganzen Armes im Vergleich zu demselben verschwindend klein erscheint — ein Fall, der in Wirklichkeit natürlich nur annähernd erreicht werden kann —, so rückt der Hauptpunkt des Oberarms in den Mittelpunkt des Ellbogengelenks, und der Hauptpunkt des starren Systems Unterarm + Hand fällt mit dem Schwerpunkte des in der Hand gehaltenen Körpers zusammen, so daß die Hauptstrecke $[c'_{10}]$ den Wert a annimmt. Soweit man diesen Körper auch hier noch mit genügender Annäherung als Massenpunkt auffassen kann, hat man dann auch für den Trägheitsradius $[\lambda_{10}]$ die Größe a, während der Trägheitsradius $[\lambda_8]$ mit der Länge l_8 des Oberarms identisch ist. Das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten im Schulter- und Ellbogengelenk würde dann nach (312) die spezielle Form annehmen

$$(324) \qquad \frac{\psi'_{1,8}}{\psi'_{8,10}} = -\frac{a^2 + l_8 a \cos \psi_{8,10}}{l_8^2 + a^2 + 2 l_8 a \cos \psi_{8,10}}.$$

Da $a = 34{,}6$ und $l_8 = 30{,}3$, so würde das Verhältnis z. B. für die äußerste Streckstellung ($\psi_{8,10} = 0$) den Wert $-0{,}533$ und für die rechtwinklige Beugestellung im Ellbogengelenk ($\psi_{8,10} = 90^0$) den Wert $-0{,}566$ annehmen. Über diese Werte kann das Verhältnis für diese beiden Stellungen des Armes überhaupt nicht hinausgehen. Vergleicht man dieselben mit den entsprechenden Werten in der letzten Tabelle, so erkennt man, daß man mit einer Masse von 15 kg den Werten des Verhältnisses der Winkelgeschwindigkeiten schon sehr nahe gekommen ist, welche eintreten, wenn man das in der Hand gehaltene Gewicht über alle Grenzen wachsen läßt. Es werden sich daher die Bewegungen, welche bei Gewichten eintreten, die größer als 15 kg sind, nicht sehr von den zu $G' = 15$ kg gehörenden unterscheiden.

Da in dem Falle, daß in der Hand das Gewicht von 15 kg gehalten wird, die beiden für das Verhalten des Armes gegenüber einwirkenden Kräften maßgebenden Konstanten $\frac{[\sigma_8]}{[\varrho_{10}]}$ und $\frac{[\sigma_{10}]}{l_8}$ nach S. 328 bzw. die Werte 0,950 und 1,127 annehmen, so besteht für alle Stellungen, welche der mit 15 kg belastete Arm bei alleiniger Kontraktion eines Ellbogenmuskels durchläuft, zwischen den beiden Gelenkwinkeln nach (315) die spezielle Beziehung

$$(325) \qquad \psi_{1,8} = -0{,}31\,566 \operatorname{arctg}\left[0{,}13\,734 \operatorname{tg} \frac{\psi_{8,10}}{2}\right] - \frac{\psi_{8,10}}{2} + \alpha.$$

Nimmt man, wie früher, zunächst den Wert α, welchen bei der Streckstellung des Ellbogengelenks der Schulterwinkel $\psi_{1,8}$ besitzt, als Null an, wodurch übrigens die allgemeine Verwendbarkeit der

Formel (325) nicht beeinträchtigt wird, so erhält man folgende zusammengehörende Werte der beiden Gelenkwinkel:

Schultergelenkwinkel $\psi_{1,8}$	0°	−7° 50′	−15° 40′	−23° 32′	−31° 26′	−39° 24′
Ellbogengelenkwinkel $\psi_{8,10}$	0°	15°	30°	45°	60°	75°

Schultergelenkwinkel $\psi_{1,8}$	−47° 28′	−55° 42′	−64° 13′	−73° 17′	−83° 34′
Ellbogengelenkwinkel $\psi_{8,10}$	90°	105°	120°	135°	150°

In Figur 58 findet sich in der schon angewendeten Weise eine Reihe von Stellungen des Armes aufgezeichnet, welche derselbe nach dieser Tabelle bei alleiniger Kontraktion eines eingelenkigen Ellbogenmuskels durchläuft, wenn in der Hand ein Gewicht von 15 kg gehalten wird. Aus dieser Figur, in welcher die in der Hand gehaltene Last wiederum durch einen Kreis angedeutet ist, kann man deutlich erkennen, daß bei 15 kg Belastung die Bewegung nahezu so vor sich geht, daß der Schwerpunkt des in der Hand gehaltenen Körpers sich auf einer geraden Linie dem Schultergelenk nähert (Beugebewegung) oder sich auf einer geraden Linie von demselben entfernt (Streckbewegung). Genau genommen ist die Bahn dieses Punktes eine nur wenig gekrümmte Linie, welche ihre konkave Seite dem Ellbogengelenk zukehrt. Würde dagegen die in der Hand gehaltene Masse so groß sein, daß im Vergleich zu ihr die Masse des Armes gar nicht in Betracht käme, so würde ihr Schwerpunkt bei der Bewegung des Armes genau eine gerade Linie beschreiben.



Fig. 58.

Von der letzteren Tatsache kann man sich leicht überzeugen, wenn man die oben angegebenen speziellen Werte a, l_8 und a für die drei Größen $[c'_{10}]$, $[\lambda_8]$ und $[\lambda_{10}]$ in Betracht zieht. Man erhält dann auch für $[\varrho_{10}]$, $[\sigma_8]$ und $[\sigma_{10}]$ bzw. die speziellen Werte a, l_8 und a. Infolgedessen geht, wie man leicht bestätigt, die allgemein gültige Beziehung (315) in die spezielle Form über

$$(326) \qquad \psi_{1,8} = \operatorname{arctg}\left[\frac{a-l_8}{a+l_8}\operatorname{tg}\frac{\psi_{8,10}}{2}\right] - \frac{\psi_{8,10}}{2} + \alpha.$$

Nimmt man hierbei der Einfachheit halber wieder den Winkel α, welcher auf die Bewegung selbst gar keinen Einfluß ausübt, gleich Null an, ersetzt nach den früheren den Gelenkwinkel $\psi_{8,10}$ durch die Differenz $\varphi_{10} - \varphi_8$ (vgl. S. 243) und schreibt an Stelle von $\psi_{1,8}$ wie früher φ_8, so läßt sich diese Beziehung schließlich auch in der Form schreiben

$$(327) \qquad (a - l_8):(a + l_8) = \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi_{10} + \varphi_8}{2}\right) : \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi_{10} - \varphi_8}{2}\right).$$

Hieraus erkennt man aber, daß l_8 und a für alle Stellungen des Armes die Seiten eines Dreiecks darstellen, dessen gegenüberliegende Winkel φ_{10} und $-\varphi_8$ sind. Dies ist nur möglich, wenn sich der Endpunkt der Strecke a, d. h. also hier der Schwerpunkt des in der Hand gehaltenen Gewichtes, stets auf der im Raume oder gegen den fixierten Rumpf festen Geraden durch den Schultergelenkmittelpunkt befindet, von welcher aus die Winkel φ_8 und φ_{10} nach den früheren Annahmen gerechnet werden.

20. Verwendung der Bewegungsgleichungen zur Bestimmung der Muskelkräfte bei bekannter Bewegung des menschlichen Körpers.

Die Probleme der Muskeldynamik lassen sich in zwei Gruppen ordnen. Die Aufgaben der ersten Gruppen fragen nach den Bewegungen der Körperteile, welche ein oder mehrere Muskeln unter gegebenen Verhältnissen bei ihrer Kontraktion hervorbringen. In diese Gruppe gehören die in den letzten beiden Abschnitten angeführten Beispiele. Wenn es sich nicht allein um die von einem Muskel hervorgebrachten Anfangsbewegungen, sondern um den ganzen Verlauf der Kontraktionsbewegung handelt, scheitert, wie schon erwähnt, eine exakte Lösung derartiger Aufgaben in vielen Fällen an der Unmöglichkeit der Integration der verwickelten Differentialgleichungen. Es ist daher im 19. Abschnitt nur ein besonderer Fall eingehender behandelt worden, in welchem die Integration und damit die Lösung der Aufgabe möglich ist. Soweit bei diesen Aufgaben die Spannungen der Muskeln als bekannt vorausgesetzt werden, besitzen sie auch mehr rein theoretisches als praktisches Interesse für die Physiologie. Denn es ist bisher weder gelungen, die Spannung eines Muskels am lebenden Körper direkt zu messen, noch einem Muskel, etwa durch elektrische Reizung, eine bestimmt angebbare Spannung zu erteilen. Es hat sich aber in den letzten Abschnitten gezeigt, daß es manche der ersten Gruppe zufallende Fragen gibt, welche allgemein lösbar sind, da sie auf die Größe der Spannung sowie auch auf die Integrationsmöglichkeit der Differentialgleichungen keine Rücksicht nehmen. Hierher gehörten beispielsweise die Fragen nach dem Anfang der Gelenkbewegung,

welche ein sich kontrahierender Muskel aus der Ruhe unter Ausschluß aller anderen Kräfte dem Körper erteilt. Es wurden in diesem Falle die Differentialgleichungen der Bewegung dazu verwendet, unter Vernachlässigung der Winkelgeschwindigkeiten die Verhältnisse der Winkelbeschleunigungen durch die für das mechanische Verhalten der einzelnen Körperteile charakteristischen Konstanten und die Verhältnisse der von den Muskeln auf die Körperteile ausgeübten Drehungsmomente auszudrücken. Im Falle eines einzigen Muskels ließ sich dies dadurch ermöglichen, daß bei Ausschluß anderer Kräfte die Werte der Drehungsmomente alle den gleichen Spannungsfaktor besitzen, so daß derselbe sich bei dem Verhältnis je zweier Drehungsmomente heraushebt.

Eine zweite Gruppe von Aufgaben der Muskeldynamik macht nun einen ganz anderen Gebrauch von den Bewegungsgleichungen; sie setzt den Bewegungszustand des menschlichen Körpers für den ganzen Verlauf einer Bewegung als bekannt voraus, und fragt nach den Muskeln und den Muskelkräften, welche diese Bewegung im Verein mit äußeren Kräften erzeugen. Diese Aufgaben sind für die Bewegungsphysiologie von großem Wert; ihre Lösung bildet in gewissem Sinne das Endziel aller Forschung auf dem Gebiete der Muskeldynamik. Probleme dieser Art sind im Prinzip mit Hilfe der Differentialgleichungen immer lösbar; denn es ist ja nur eine Frage der Technik, die Bewegungen des lebenden Körpers, z. B. bei irgend einer Lokomotionsart oder der Leistung einer mechanischen Arbeit, so genau zu messen, daß auch die in den Differentialgleichungen auftretenden Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der verschiedenen Schwerpunkte, ebenso wie die Winkelgeschwindigkeiten und Winkelbeschleunigungen der einzelnen Körperteile und die Drehungsmomente der äußeren Kräfte für jede Phase der Bewegung bestimmt werden können. Man verwendet dann die Bewegungsgleichungen dazu, für jeden Körperteil das resultierende Drehungsmoment sämtlicher auf denselben einwirkenden Muskeln zu berechnen. Es ist zuletzt Sache einer weiteren, der Muskelstatik angehörenden Untersuchung, dieses resultierende Drehungsmoment auf die einzelnen Muskeln zu verteilen.

Soweit Aufgaben dieser zweiten Gruppe bisher in Angriff genommen sind, beziehen sich dieselben fast durchweg auf die Lokomotion des Menschen und der Tiere. Es soll daher als Beispiel für diese Verwendung der Bewegungsgleichungen zur Ableitung der Muskelkräfte bei bekannter Bewegung ein Problem herausgegriffen werden, welches sich auf eine bestimmte beim menschlichen Gang auftretende Bewegung bezieht, nämlich auf die schwingende Bewegung des jeweils vom Boden abgelösten Beins.

Faßt man in erster Annäherung die Schwingung des Beins als eine ebene, der Medianebene des Körpers parallele Bewegung auf und

denkt den Fuß im oberen Sprunggelenk gegen den Unterschenkel beweglich, so hat man es also dabei mit der Bewegung eines ebenen dreigliedrigen Gelenksystems zu tun. Da das Bein im Hüftgelenk mit dem Becken beweglich verbunden ist, so handelt es sich dabei zunächst nicht um freie Beweglichkeit des Beins. Es ist auch hier nicht der früher genauer untersuchte Fall vorhanden, daß das erste Glied (der Oberschenkel) sich nur um eine im Raume feste Achse drehen kann, sondern der Mittelpunkt des Hüftgelenks ist durch seine Verbindung mit dem Becken in eine bestimmte Bewegung gezwungen. Nach den ausführlichen Untersuchungen im 7. Abschnitt des allgemeinen Teils über die Bedeutung der Bewegungsgleichungen, und vor allen Dingen nach den Ausführungen des 8. Abschnittes über die elementare Ableitung der Bewegungsgleichungen ist man aber in den Stand gesetzt, auch in diesem scheinbar komplizierteren Falle bedingter Beweglichkeit des dreigliedrigen ebenen Gelenksystems die Bewegungsgleichungen ohne Mühe in der für die Untersuchung geeignetsten Form hinzuschreiben. Man hat zu diesem Zwecke in der früher geschilderten Weise nur den so wie so am Bein angreifenden Kräften im Mittelpunkte des Hüftgelenks eine Kraft hinzugefügt zu denken, welche nach Größe und Richtung so bemessen sein muß, daß sie im Verein mit den übrigen äußeren Kräften des ganzen Beins dem Schwerpunkte desselben seine Beschleunigung erteilen kann. Zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen benutzt man dann weiter für die vorliegende Untersuchung die früher angegebene Interpretation der Bewegungsgleichungen, welche die Drehung eines jeden der drei Abschnitte des Beins um seine zu der Bewegungsebene senkrechte Schwerpunktsachse in ihrer Abhängigkeit von den auf denselben einwirkenden Drehungsmomenten der Muskeln, der Schwere und der in entgegengesetzter Richtung zu nehmenden Effektivkräfte der anhängenden Körperteile darstellt.

Nach den früheren ausführlichen Auseinandersetzungen kommen für die drei Abschnitte des (rechten) Beins die folgenden Kräfte in Betracht.

Auf den Oberschenkel wirkt zunächst direkt die Schwere wie eine Kraft ein, welche gleich dem Gewicht G_2 des Oberschenkels ist, vertikal nach unten zieht und im Schwerpunkte S_2 des Oberschenkels angreift, so wie es in Figur 59 angedeutet worden ist. Sofern Muskeln sich an der Hervorbringung der Schwingungsbewegung beteiligen, wirken die direkt an dem Oberschenkel inserierenden Muskeln infolge ihrer Spannung wie Kräfte auf denselben ein, welche gleich ihren Gesamtspannungen sind und die Richtung nach dem anderen Insertionspunkte hin besitzen. Als Angriffspunkt hat hierbei diejenige Stelle des Oberschenkels zu gelten, von welcher aus der betreffende Muskel sich frei über das verbindende Gelenk hinweg nach einem

Nachbargliede ausspannt; es ist also der Angriffspunkt der Muskelkraft in vielen Fällen durchaus nicht identisch mit seinem am Oberschenkel befindlichen Insertionspunkte oder mit einem mittleren Punkte seiner Insertionsfläche, wie das früher schon ausführlich auseinandergesetzt worden ist. Um das Bild nicht zu unübersichtlich zu machen, sind in Figur 59 zunächst keine Repräsentanten von direkt am Oberschenkel angreifenden Muskelkräften eingezeichnet worden.

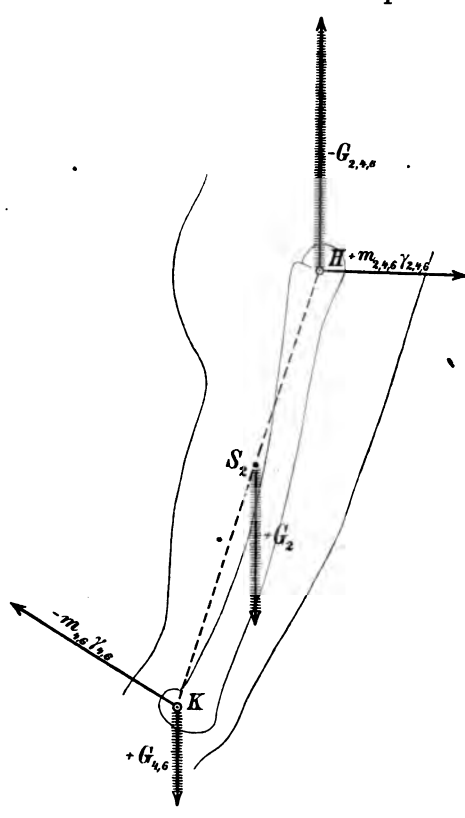


Fig. 59.

Außer mit den genannten Kräften wirken nun sowohl die Schwere als auch die Muskeln noch in anderer Weise auf den Oberschenkel ein, nämlich dadurch, daß sie den Gelenkdruck sowohl im Hüftgelenk als auch im Kniegelenk beeinflussen.

Der fortwährend wechselnde Druck, welcher im Hüftgelenk auf den Oberschenkel ausgeübt wird, ist in jedem Moment als eine Kraft aufzufassen, welche im Mittelpunkte des Femurkopfes angreift, und deren Intensität und Richtung so zu bemessen sind, daß der Druck im Verein mit den direkt am ganzen Bein angreifenden äußeren Kräften dem Schwerpunkte des ganzen Beins gerade seine in dem betreffenden Zeitpunkte vorhandene Beschleunigung nach Größe und Richtung zu erteilen vermag. Durch diese Bedingung ist die im Hüftgelenk ausgeübte Druckkraft in eindeutiger Weise bestimmt, wenn man alle am Bein direkt angreifenden äußeren Kräfte und die Beschleunigung des Gesamtschwerpunktes des Beins nach Größe und Richtung kennt. Man faßt sie am besten als Resultante einer Reihe von Komponenten auf, von denen eine gleich und gleich gerichtet mit der Effektivkraft des ganzen Beins ist, während die anderen den sämtlichen am Bein direkt angreifenden äußeren Kräften an Größe gleich, aber gerade entgegengesetzt wie diese gerichtet sind.

Unter der Effektivkraft des ganzen Beins versteht man nach dem früheren eine Kraft, welche mit der Beschleunigung des Gesamt-

schwerpunktes des Beins gleichgerichtet ist, und deren Intensität durch das Produkt aus der Masse des ganzen Beins und der Beschleunigung seines Schwerpunktes gemessen wird. Bezeichnet man die Masse des ganzen Beins mit $m_{2,4,6}$ und die Beschleunigung des Gesamtschwerpunktes $S_{2,4,6}$ mit $\gamma_{2,4,6}$, wobei durch die drei Indizes angedeutet sein soll, daß es sich um das System der drei mit den Nummern 2, 4 und 6 versehenen Abschnitte des Körpers handelt, so beträgt demnach die Größe der Effektivkraft des ganzen Beins $m_{2,4,6}\gamma_{2,4,6}$. In Figur 59 ist diese Druckkomponente angedeutet und mit dem positiven Vorzeichen versehen worden, um damit zum Ausdruck zu bringen, daß sie mit der Effektivkraft des Beins gleichgerichtet ist.

Die am Bein direkt angreifenden äußeren Kräfte sind wiederum von zweierlei Art. Einmal zieht im Schwerpunkte $S_{2,4,6}$ des ganzen Beins das Gewicht $G_{2,4,6}$[1]) desselben vertikal nach unten; und dann wirken in der oben angedeuteten Weise die am Bein ansetzenden Muskeln bei ihrer Kontraktion als Kräfte ein. Dabei kommen jedoch nur solche Muskeln in Betracht, deren Ursprung sich außerhalb des Beins, d. h. also hier am Rumpfe, befindet; denn die Muskeln, welche beide Insertionen am Bein selbst nehmen, verursachen nur Kräfte, welche als innere Kräfte für das ganze Bein aufzufassen sind. Infolgedessen ist unter den Druckkomponenten im Hüftgelenk eine vertikal nach oben gerichtet und gleich dem Gewicht des Beins; dieselbe ist in Figur 59 eingezeichnet und entsprechend ihrer Richtung mit $-G_{2,4,6}$ bezeichnet worden. Die übrigen in der Figur nicht mitangedeuteten Druckkomponenten sind den Muskelkräften entgegengesetzt gleich.

Der ebenfalls sich fortwährend ändernde Druck, welcher im Kniegelenk auf den Oberschenkel ausgeübt wird, stellt sich in jedem Moment als eine Kraft dar, welche unter der gemachten Voraussetzung ebener Bewegung des Beins im Mittelpunkte des Kniegelenks angreift; dabei ist als Mittelpunkt des Kniegelenks derjenige Punkt aufzufassen, in welchem die durch den Hüftgelenkmittelpunkt und den Schwerpunkt des Oberschenkels hindurchgehende Längsachse des Oberschenkels die Knieachse trifft. Dieser Druck hat die gleiche Größe wie der im Kniegelenk auf den Unterschenkel ausgeübte Druck; seine Richtung ist aber der Richtung des letzteren genau entgegengesetzt. Nach den obigen Auseinandersetzungen über die Druckkraft im Hüftgelenk kann es keinem Zweifel unterliegen, daß die im Kniegelenk auf den Oberschenkel ausgeübte Druckkraft folgende Kom-

1) Um Verwechslungen zu vermeiden, sind in den Figuren 59 bis 64 die Mittelpunkte der drei Gelenke nicht wie früher mit dem Buchstaben G und doppeltem Index, sondern mit den Buchstaben H, K und F bezeichnet worden. Die Größen G mit einfachem oder mehrfachem Index bedeuten also im folgenden stets Gewichtskräfte.

ponenten besitzt: zunächst eine Komponente, welche der Effektivkraft $m_{4,6}\gamma_{4,6}$ des Systems Unterschenkel + Fuß gleich ist, aber die entgegengesetzte Richtung wie diese besitzt; ferner eine Komponente, welche dem Gewicht $G_{4,6}$ des Systems Unterschenkel + Fuß gleich und auch wie dieses vertikal nach unten gerichtet ist (vgl. Fig. 59); endlich eine Anzahl von Komponenten, welche den am Unterschenkel und Fuß direkt angreifenden äußeren Muskelkräften gleich sind und auch die gleiche Richtung wie diese besitzen. Äußere Muskelkräfte können dabei allein solche Muskeln ausüben, welche nur ihren Ansatz am Unterschenkel oder Fuß, dagegen ihren Ursprung außerhalb dieses Systems, also entweder am Oberschenkel oder am Rumpf besitzen. In Figur 59 sind nur die beiden ersten Druckkomponenten im Kniegelenk angedeutet, die von den Muskeln herrührenden Komponenten aber wiederum fortgelassen worden. Die Gewichtskomponente ist mit $+ G_{4,6}$ bezeichnet worden, um anzudeuten, daß sie dem Gewicht des Systems Unterschenkel + Fuß nicht nur gleich, sondern auch gleichgerichtet ist. Da die aus der Effektivkraft dieses Systems herrührende Druckkomponente derselben entgegengesetzt gerichtet ist, so ist sie in der Figur durch $- m_{4,6}\gamma_{4,6}$ bezeichnet worden.

Damit sind nun alle Kräfte aufgezählt, welche in der Periode des Schwingens auf den Oberschenkel einwirken können. Derselbe wird sich unter der Einwirkung derselben genau so bewegen, als ob er völlig frei, vom übrigen Körper abgelöst wäre; denn der Einfluß, welchen infolge der Gelenkverbindung die anderen Körperteile bei der Bewegung auf den Oberschenkel ausüben, ist vollkommen durch die beiden Druckkräfte im Hüft- und Kniegelenk wiedergegeben. Der Oberschenkel kann nun nach Einführung der Gelenkdrucke als Körper für sich betrachtet werden; es stellen daher alle oben aufgezählten Kräfte äußere Kräfte für den Oberschenkel dar. Da der Schwerpunkt eines freien Körpers sich stets so bewegt, als ob die sämtlichen auf den Körper einwirkenden äußeren Kräfte mit ihrer Stärke und Richtung im Schwerpunkte selbst angriffen und außerdem in diesem Punkte die ganze Masse des Körpers vereinigt wäre, so müssen die in Figur 59 aufgezeichneten Kräfte im Verein mit den erwähnten Muskelkräften nach dem Schwerpunkte S_2 des Oberschenkels verlegt als Resultante $m_2\gamma_2$ ergeben, wo m_2 die Masse und γ_2 die Beschleunigung des Schwerpunktes, ihr Produkt also die Effektivkraft vom Oberschenkel bedeuten. Daß dies wirklich der Fall ist, kann man leicht erkennen. Es ergeben nämlich schon die beiden im Hüftgelenkmittelpunkte H und Kniegelenkmittelpunkte K vorhandenen Druckkomponenten $+ m_{2,4,6}\gamma_{2,4,6}$ und $- m_{4,6}\gamma_{4,6}$ als Resultante $m_2\gamma_2$. Dies geht unmittelbar daraus hervor, daß die Effektivkraft $m_{2,4,6}\gamma_{2,4,6}$ des ganzen Beins sich als Resultante der drei Effektivkräfte $m_2\gamma_2$, $m_4\gamma_4$ und $m_6\gamma_6$ vom Oberschenkel, Unterschenkel und Fuß darstellt, und daß

andererseits die Effektivkraft $m_{4,6}\gamma_{4,6}$ des Systems Unterschenkel + Fuß die Resultante von $m_4\gamma_4$ und $m_6\gamma_6$ ist. Setzt man demnach $m_{2,4,6}\gamma_{2,4,6}$ mit $-m_{4,6}\gamma_{4,6}$ zusammen, so muß sich die Effektivkraft $m_2\gamma_2$ ergeben, Alle anderen am Oberschenkel angreifenden Kräfte dürfen also keinen Einfluß auf die Bewegung des Schwerpunktes ausüben. Dies stimmt damit überein, daß, wie man nachweisen kann, zu jeder der anderen Kräfte sich eine auffinden läßt, welche ihr entgegengesetzt gleich ist, so daß sich dieselben zu einer Reihe von Kräftepaaren zusammenordnen lassen.

Was zunächst die drei in H, S_2 und K angreifenden Gewichtskräfte anlangt, so kann man die beiden letzteren, welche vertikal nach unten gerichtet sind, zu eine Resultante vereinigen, deren Größe $G_{2,4,6}$ ist, so daß dieselbe der in H angreifenden Druckkomponente $-G_{2,4}$ entgegengesetzt gleich ist. Der Angriffspunkt H_2' dieser Resultante, welche sich in der folgenden Figur 60 aufgezeichnet findet, liegt auf der Verbindungsstrecke S_2K und teilt dieselbe im umgekehrten Verhältnis der beiden Gewichtskräfte; dieser Punkt ist schon früher als partieller Hauptpunkt des Oberschenkels bezeichnet worden; er kann auch aufgefaßt werden als der Schwerpunkt des Massensystems, welches man erhält, wenn man im Mittelpunkte des Kniegelenks die Massen von Unterschenkel und Fuß konzentriert und dem Oberschenkel hinzugefügt denkt. Dieser Hauptpunkt ist deshalb als partiell zu bezeichnen, weil man zu seiner Konstruktion das Bein vom Rumpf abgelöst denken muß;

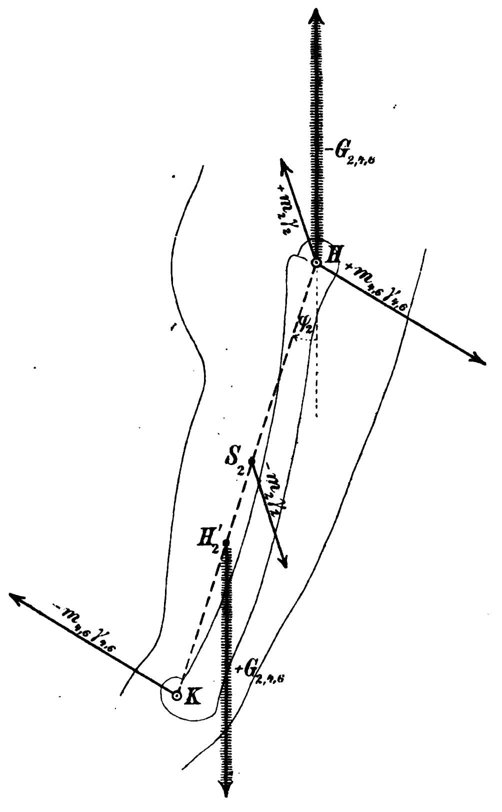


Fig. 60.

bliebe das Bein im Zusammenhang mit dem Rumpf, so müßte man auch noch im Hüftgelenkmittelpunkte die Massen des Rumpfes, des anderen Beins, der beiden Arme und des Kopfes konzentriert und dem Oberschenkel hinzugefügt denken. Der Schwerpunkt dieses

fingierten Massensystems wäre dann der Hauptpunkt H_2 des Oberschenkels, welcher in Frage kommt, wenn der Oberschenkel im Zusammenhang mit dem übrigen Körper in Betracht gezogen wird. Die in H_2' angreifende Gewichtskraft $+ G_{2,4,6}$ bildet nun mit der im Hüftgelenkmittelpunkte H vertikal nach oben gerichteten Druckkomponente $- G_{2,4,6}$ ein Kräftepaar, welches nur im Sinne einer Drehung auf den Oberschenkel einzuwirken sucht, die Beschleunigung seines Schwerpunktes aber nicht beeinflussen kann. Das Moment dieses Kräftepaares stellt das auf den Oberschenkel in der Periode des Schwingens ausgeübte Drehungsmoment der Schwere dar; es soll wie früher kurz mit D_{s_2} bezeichnet werden.

In entsprechender Weise wie die Gewichtskräfte lassen sich nun auch die direkt am Oberschenkel angreifenden Muskelkräfte mit den von den Muskeln herrührenden Druckkomponenten im Hüftgelenk und Kniegelenk zu Kräftepaaren so vereinigen, daß einem jeden Muskel, soweit er als physiologische Einheit betrachtet werden darf, ein besonderes Kräftepaar entspricht. Denn zu jeder am Oberschenkel direkt angreifenden Muskelkraft findet sich unter den Druckkomponenten in einem der beiden Gelenke stets eine entgegengesetzt gleiche, welche von demselben Muskel herrührt. Hat aber ein Muskel beide Insertionsstellen außerhalb des Oberschenkels, so daß er über beide Gelenke desselben hinwegzieht, so greift die von der proximalen Insertion herrührende Kraft des Paares im Hüftgelenkmittelpunkte und die andere, ihr entgegengesetzt gleiche, im Kniegelenkmittelpunkte an. Dies alles ist schon früher ganz allgemein auseinandergesetzt und begründet worden, so daß es nicht nötig ist, an dieser Stelle noch einmal ausführlich darauf zurückzukommen. Es mag nur noch einmal hervorgehoben werden, daß die Art der Zusammensetzung der Kräftepaare, mit welchen die Muskeln auf den Oberschenkel drehend einzuwirken suchen, ganz unabhängig von den jeweiligen Bedingungen für die Bewegung des Oberschenkels sind; diese Kräftepaare sind also der Art nach dieselben, wenn das betreffende Bein schwingt, als wenn es sich auf den Fußboden aufgesetzt hat. Hierdurch unterscheiden sie sich wesentlich von dem Kräftepaar, mit welchem die Schwere auf den Oberschenkel einwirkt. Unter der Voraussetzung ebener Bewegung kommen nur diejenigen Komponenten der Muskelkräftepaare zur Wirkung, deren Ebenen der Medianebene des Körpers parallel laufen; man hat dabei dann nur noch zu unterscheiden, welche Kräftepaare den Oberschenkel von der rechten Seite aus gesehen im Sinne des Uhrzeigers, und welche ihn im umgekehrten Sinne des Uhrzeigers zu drehen suchen. Rechnet man die Momente der letzteren positiv, so muß man den Momenten der ersteren das negative Vorzeichen geben. Das resultierende Moment für alle von Muskeln herrührenden Kräftepaare, welches dann gleich der algebraischen Summe

der Momente der einzelnen Kräftepaare ist, soll wie früher kurz mit D_{m_2} bezeichnet werden. Da auch die sämtlichen Muskelkräfte paarweise entgegengesetzt sind, so können sie ebenfalls keinen Einfluß auf die Bewegung des Gesamtschwerpunktes des Oberschenkels ausüben. Es bleiben somit nur die beiden Druckkomponenten übrig, von denen die eine im Hüftgelenkmittelpunkte angreift und der Effektivkraft des ganzen Beins direkt gleich ist, während die andere im Kniegelenk angreift und der Effektivkraft des Systems Unterschenkel + Fuß entgegengesetzt gleich ist. Für diese ist aber oben schon nachgewiesen worden, daß sie sich zu einer Resultante zusammensetzen, welche dem Schwerpunkte des Oberschenkels gerade seine richtige Beschleunigung nach Größe und Richtung zu erteilen imstande ist.

Diese beiden von den Effektivkräften herrührenden Druckkräfte üben nun außerdem im allgemeinen auch einen drehenden Einfluß auf den Oberschenkel aus. Man kann denselben am besten dadurch zur Anschauung bringen, daß man im Schwerpunkte des Oberschenkels eine Kraft hinzugefügt denkt, welche die Vorwärtsbewegung desselben verhindert, ohne einen Einfluß auf die Drehung des ganzen Oberschenkels um den Schwerpunkt auszuüben. Diese hinzugefügte Kraft muß der Effektivkraft des Oberschenkels genau entgegengesetzt gleich sein; in Figur 60 ist sie angedeutet und entsprechend ihrer Richtung mit $-m_2\gamma_2$ bezeichnet worden. Da die Drehung des Oberschenkels durch diese Kraft nicht gestört wird, so muß sie sich mit den beiden in H und K angreifenden Effektivkräften so zu Kräftepaaren vereinigen lassen, daß keine einzelne Kraft mehr übrig bleibt. Dies läßt sich auf verschiedene Weise erreichen. Man könnte z. B. die Kraft $-m_2\gamma_2$ in die beiden Komponenten $-m_{2,4,6}\gamma_{2,4,6}$ und $+m_{4,6}\gamma_{4,6}$ zerlegen, von denen die eine der im Hüftgelenk angreifenden, dagegen die andere der auf das Kniegelenk einwirkenden Effektivkraft (vgl. Fig. 59) entgegengesetzt gleich ist; dann hat man die beiden Kräftepaare $[+m_{2,4,6}\gamma_{2,4,6}, -m_{2,4,6}\gamma_{2,4,6}]$ und $[+m_{4,6}\gamma_{4,6}, -m_{4,6}\gamma_{4,6}]$ direkt vor Augen. Oder man kann auch, wie es in Figur 60 angedeutet ist, die im Hüftgelenkmittelpunkte angreifende Effektivkraft $+m_{2,4,6}\gamma_{2,4,6}$ in die beiden Komponenten $+m_{4,6}\gamma_{4,6}$ und $+m_2\gamma_2$ zerlegen. Dann hat man wiederum zwei Kräftepaare, von denen das eine aus den beiden im Hüftgelenkmittelpunkte und Kniegelenkmittelpunkte angreifenden Kräften $+m_{4,6}\gamma_{4,6}$ und $-m_{4,6}\gamma_{4,6}$ besteht, während das andere sich aus der im Hüftgelenkmittelpunkte angreifenden Kraft $+m_2\gamma_2$ und der im Schwerpunkte des Oberschenkels hinzugefügten Kraft $-m_2\gamma_2$ zusammensetzt. Diese letztere Darstellung des drehenden Einflusses der Effektivkräfte ist für den vorliegenden Zweck, die in der Periode des Schwingens wirksamen Kräfte zu bestimmen, deshalb die geeignetere, weil man bei ihrer Verwendung nur genötigt ist, sich außer der

Beschleunigung γ_2 des Schwerpunktes vom Oberschenkel die Beschleunigung $\gamma_{4,6}$ des Schwerpunktes vom System Unterschenkel + Fuß, nicht aber die Beschleunigung des Schwerpunktes des ganzen Beins zu verschaffen. Das resultierende Drehungsmoment der Effektivkräfte, welches beim Oberschenkel mit D_{e_2} bezeichnet werden soll, ist unter der Voraussetzung ebener Bewegung wieder gleich der algebraischen Summe der Momente der beiden Kräftepaare, sofern man das (von der rechten Seite aus gesehen) den Oberschenkel im umgekehrten Sinne des Uhrzeigers drehende positiv und das im Sinne des Uhrzeigers drehende negativ rechnet.

Am Unterschenkel gestalten sich die Verhältnisse ganz ähnlich wie am Oberschenkel. Die Schwere zieht zunächst direkt mit der Kraft G_4, welche dem Gewicht des Unterschenkels gleich ist, im Schwerpunkte S_4 des Unterschenkels vertikal nach unten (vgl. Fig. 61). Jeder direkt am Unterschenkel inserierende Muskel wirkt, sofern er überhaupt gespannt ist, mit einer Kraft ein, die nach dem anderen Insertionspunkte hin gerichtet ist und an demjenigen Punkte des Unterschenkels angreift, von welchem aus er frei über das Kniegelenk oder obere Sprunggelenk hinwegziehen kann. Von diesen Muskelkräften finden sich wiederum keine Repräsentanten in Fig. 61 eingezeichnet. Außer von diesen beiden direkt am Unterschenkel angreifenden Kraftarten wird die Bewegung des Unterschenkels nur noch durch den fortwährend wechselnden Gelenkdruck im Kniegelenk und im Fußgelenk beeinflußt.

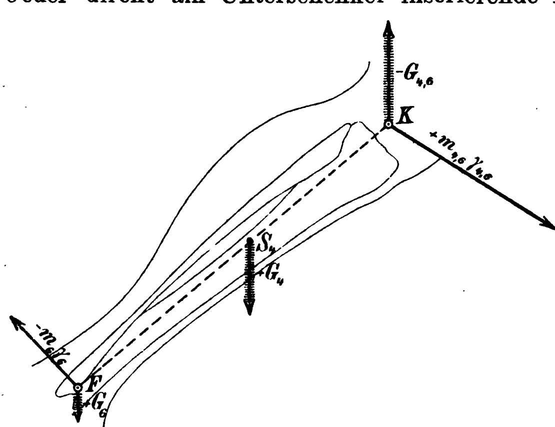


Fig. 61.

Der Druck im Kniegelenk wirkt auf den Unterschenkel wie eine Kraft, welche im Mittelpunkte des Kniegelenks angreift und an Größe genau mit dem im Kniegelenk auf den Oberschenkel ausgeübten Druck übereinstimmt, aber die entgegengesetzte Richtung von diesem besitzt, wie schon oben angedeutet wurde. Derselbe besteht daher nach den obigen Auseinandersetzungen aus drei Arten von Komponenten. Eine Komponente ist gleich und gleichgerichtet mit der Effektivkraft $m_{4,6}\gamma_{4,6}$ des Systems Unterschenkel + Fuß; eine zweite Komponente ist an Größe gleich dem Gewicht $G_{4,6}$ dieses

Systems und zieht vertikal nach oben. Diese beiden Komponenten finden sich in Figur 61 angedeutet und ihren Richtungen entsprechend mit $+ m_{4,6}\gamma_{4,6}$ und $- G_{4,6}$ bezeichnet. Alle anderen (in die Figur nicht mit eingezeichneten) Komponenten sind Muskelkräfte, welche den am ganzen System Unterschenkel + Fuß direkt angreifenden Muskelkräften entgegengesetzt gleich sind.

Der Druck, welcher im Mittelpunkte des Fußgelenks auf den Unterschenkel einwirkt, setzt sich ebenfalls, aus drei Arten von Komponenten zusammen. Eine Komponente ist der Effektivkraft $m_6\gamma_6$ des Fußes entgegengesetzt gleich; sie ist deshalb in Figur 61 durch $- m_6\gamma_6$ bezeichnet worden. Eine zweite Komponente ist gleich dem Gewicht G_6 des Fußes und zieht vertikal nach unten ($+ G_6$ in Fig. 61). Die etwa noch vorhandenen anderen Kräfte sind Muskelkräfte, welche den am Fuß direkt angreifenden Muskelkräften nicht nur an Größe, sondern auch an Richtung gleich sind.

Alle diese Tatsachen lassen sich leicht verstehen und ableiten, wenn man beachtet, daß einerseits der Druck, welcher im Kniegelenk auf den Unterschenkel ausgeübt wird, notwendigerweise so beschaffen sein muß, daß er im Verein mit den direkt am System Unterschenkel + Fuß angreifenden äußeren Kräften dem Schwerpunkte dieses Systems seine Beschleunigung $\gamma_{4,6}$ erteilen kann, und daß andererseits der im Fußgelenk auf den Unterschenkel einwirkende Druck dem in demselben Gelenk auf den Fuß ausgeübten Druck entgegengesetzt gleich sein muß. Der letztere hat aber im Verein mit den direkt am Fuß angreifenden Kräften dem Fußschwerpunkte seine Beschleunigung γ_6 zu erteilen.

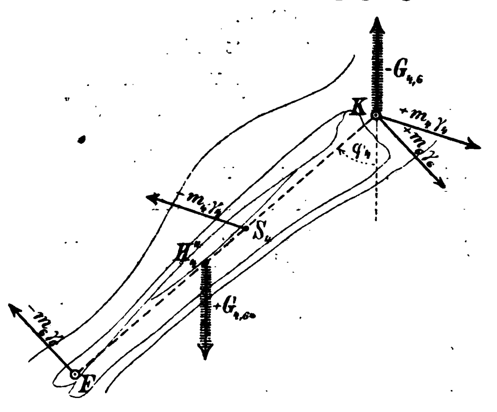


Fig. 62.

Die beiden im Schwerpunkte S_4 des Unterschenkels und im Fußgelenkmittelpunkte F angreifenden Gewichtskräfte lassen sich nun wiederum zu einer ebenfalls vertikal nach unten ziehenden Resultante zusammensetzen, deren Größe dem Gesamtgewicht $G_{4,6}$ des Systems Unterschenkel + Fuß gleich ist, und deren Angriffspunkt auf der Verbindungsstrecke S_4F liegt und dieselbe im umgekehrten Verhältnis der beiden Gewichte G_4 und G_6 teilt. Dieser Punkt, welcher in Figur 62 angegeben und daselbst mit H_4'' bezeichnet ist, stellt den partiellen Hauptpunkt des Unterschenkels dar, welcher sich auf das

im Kniegelenk von dem übrigen Körper abgelöst gedachte System Unterschenkel + Fuß und nicht etwa, wie der oben angegebene partielle Hauptpunkt H_2' des Oberschenkels, auf das ganze Bein bezieht. Dieser partielle Hauptpunkt ist deshalb auch zum Unterschied mit zwei Strichen versehen worden. Die in H_4'' angreifende Gewichtskraft, welche in Figur 62 eingezeichnet ist, bildet nun wiederum mit der in K angreifenden Druckkomponente $-G_{4,6}$ ein Kräftepaar, dessen Moment D_{s_4} das in der Periode des Schwingens auf den Unterschenkel ausgeübte Drehungsmoment der Schwere darstellt.

Wie die Schwerkräfte, so lassen sich auch die direkt am Unterschenkel angreifenden Muskelkräfte mit den unter den Druckkomponenten im Kniegelenk und Fußgelenk vorhandenen Muskelkräften zu soviel Kräftepaaren zusammenfassen, als Muskeln überhaupt in der Periode des Schwingens auf den Unterschenkel drehend einwirken. Von diesen Kräftepaaren sucht ein Teil den Unterschenkel von der rechten Seite aus gesehen im Sinne des Uhrzeigers, und der andere Teil im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers zu drehen. Rechnet man wieder die Momente der ersteren negativ und die der letzteren positiv, so stellt die algebraische Summe aller dieser Momente das resultierende Drehungsmoment D_{m_4} der Muskeln des Unterschenkels dar.

Da sowohl die auf den Unterschenkel direkt und indirekt einwirkenden Schwerkräfte, als auch die unmittelbar und mittelbar an ihm angreifenden Muskelkräfte sich zu Kräftepaaren ordnen, so können sie auf die Bewegung des Unterschenkelschwerpunktes keinen Einfluß ausüben. Diese ist allein den in K und F wirksamen, mit den Effektivkräften zusammenhängenden Druckkomponenten $+ m_{4,6}\gamma_{4,6}$ und $- m_6\gamma_6$ zuzuschreiben. In der Tat setzen sich diese beiden Kräfte, nach dem Schwerpunkte S_4 des Unterschenkels verlegt, zu der Resultante $+ m_4\gamma_4$ zusammen, wie es für die Beschleunigung γ_4 des Unterschenkelschwerpunktes erforderlich ist. Denkt man sich in S_4 die der Effektivkraft $m_4\gamma_4$ entgegengesetzt gleiche Kraft $- m_4\gamma_4$ angebracht, so würde hierdurch nur die Bewegung dieses Schwerpunktes selbst verhindert, die Drehung des Unterschenkels um denselben aber in keiner Weise beeinträchtigt werden. Es muß infolgedessen diese hinzugefügte Kraft sich mit den in K und F angreifenden Kräften $+ m_{4,6}\gamma_{4,6}$ und $- m_6\gamma_6$ zu Kräftepaaren vereinigen lassen. Dies kann auf verschiedene Art geschehen. Man könnte beispielsweise die in S_4 angreifende Kraft $- m_4\gamma_4$ durch die beiden Komponenten $- m_{4,6}m_{4,}\gamma_6$ und $+ m_6\gamma_6$ ersetzt denken; dann bildet die in K angreifende Kraft $+ m_{4,6}\gamma_{4,6}$ mit der in S_4 angreifenden Komponente $- m_{4,6}\gamma_{4,6}$ das eine, und die in S_4 angreifende Komponente $+ m_6\gamma_6$ mit der in F angreifenden Kraft $- m_6\gamma_6$ das andere der beiden Kräftepaare, welche die drehende Wirkung der drei Kräfte zur Anschauung bringen. Man kann aber auch, wie es in Figur 62 an-

gedeutet ist, die Kraft in K durch ihre Komponenten $+ m_4 \gamma_4$ und $+ m_6 \gamma_6$ ersetzt denken; dann bildet die erstere mit der in S_4 angreifenden Kraft $- m_4 \gamma_4$ das eine, und die letztere mit der in F angreifenden Kraft $- m_6 \gamma_6$ das andere Kräftepaar. Diese beiden Kräftepaare sind natürlich in bezug auf ihre Gesamtwirkung den bei der ersten Art der Zusammensetzung sich ergebenden vollkommen äquivalent. Rechnet man wieder das Moment negativ oder positiv, je nachdem ein Kräftepaar im Sinne oder im umgekehrten Sinne des Uhrzeigers den Unterschenkel von der rechten Seite aus gesehen zu drehen sucht, so ist das für den Unterschenkel mit D_{e_4} zu bezeichnende resultierende Drehungsmoment der Effektivkräfte gleich der algebraischen Summe der Momente der beiden Kräftepaare.

Am Fuß sind die Verhältnisse am einfachsten. Bei demselben hat man in der Periode des Schwingens nur folgende Krafteinwirkungen zu berücksichtigen. Im Schwerpunkte S_6 des Fußes zieht das Gewicht G_6 desselben vertikal nach unten (vgl. Fig. 63). Ferner können die am Fuß ansetzenden Muskeln mit Kräften einwirken, welche nach ihrem Ursprung am Unter- oder Oberschenkel hinziehen. Außerdem findet nur noch eine Druckeinwirkung im Fußgelenkmittelpunkte F statt. Diese besteht zunächst aus den Komponenten $- G_6$ und $+ m_6 \gamma_6$, von denen die erstere vertikal nach oben gerichtet ist und die letztere die Richtung der Beschleunigung γ_6 des Fußes besitzt; die übrigen Komponenten des Druckes in F sind den am Fuß unmittelbar angreifenden Muskelkräften entgegengesetzt gleich.

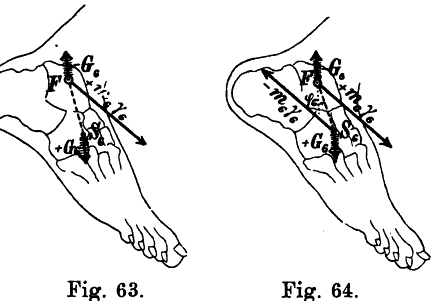


Fig. 63. Fig. 64.

Hieraus ist ohne weiteres ersichtlich, daß sowohl die beiden in F und S_6 angreifenden Schwerkräfte ein Kräftepaar bilden, dessen Moment das Drehungsmoment D_{s_6} der Schwere darstellt, als auch die sämtlichen auf den Fuß einwirkenden Muskelkräfte sich zu Kräftepaaren zusammenordnen, deren Momente in ihrer algebraischen Summe das resultierende Drehungsmoment D_{m_6} der Muskeln für den Fuß ergeben. Die dann in F noch übrigbleibende Druckkomponente $+ m_6 \gamma_6$ wird allein die Bewegung des Fußschwerpunktes S_6 hervorbringen. Annulliert man dieselbe durch die in S_6 angebrachte Kraft $- m_6 \gamma_6$ (vgl. Fig. 64), welche $+ m_6 \gamma_6$ entgegengesetzt gleich sein muß, so hat man in diesen beiden in F und S_6 angreifenden Kräften schließlich noch das von den Effektivkräften abhängige Kräftepaar vor Augen. Das Moment D_{e_6} desselben stellt das auf den Fuß ausgeübte Drehungsmoment der Effektivkräfte dar.

Bezeichnet man nun die Winkelbeschleunigungen, mit denen bei ebener Bewegung des ganzen Beins der Oberschenkel, Unterschenkel und Fuß sich in der Periode des Schwingens um ihre Schwerpunkte S_2, S_4 und S_6 drehen, wieder beziehungsweise mit φ_2'', φ_4'' und φ_6'', und versteht man unter $\varkappa_2$, $\varkappa_4$ und $\varkappa_6$ die Trägheitsradien dieser drei Abschnitte des Beins in bezug auf die zur Bewegungsebene senkrechten (queren) Achsen durch ihre Schwerpunkte, welche nach den Angaben im 15. Abschnitt Hauptträgheitsradien darstellen, so bestehen nach dem früheren zwischen diesen Größen und den auf die drei Abschnitte einwirkenden Drehungsmomenten die Beziehungen

$$m_h \varkappa_h^2 \varphi_h'' = D_{m_h} + D_{s_h} + D_{e_h}, \tag{328}$$

wobei für die drei Abschnitte des rechten Beins, Oberschenkel, Unterschenkel oder Fuß, der Index h bezüglich den Wert 2, 4 oder 6 und für die Abschnitte des linken Beins bezüglich den Wert 3, 5 oder 7 besitzt.

Die Beziehungen (328) stellen die Bewegungsgleichungen der drei Hauptabschnitte des Beins in der Form vor, wie sie sich zur Bestimmung der Muskelkräfte als am zweckmäßigsten erweist. Unter den in jeder Bewegungsgleichung auftretenden vier veränderlichen Größen φ_h'', D_{m_h}, D_{s_h} und D_{e_h} lassen sich drei für jeden Moment der Schwingungsbewegung auf empirischem Wege bestimmen, nämlich die Winkelbeschleunigung φ_h'', das Drehungsmoment D_{s_h} der Schwere und das resultierende Drehungsmoment D_{e_h} der Effektivkräfte. Man kann daher jede der Gleichungen (328) dazu verwenden, das nicht empirisch bestimmbare resultierende Drehungsmoment D_{m_h} der auf den betreffenden Körperteil einwirkenden Muskeln zu berechnen. Aus (328) ergibt sich zu diesem Zwecke ganz allgemein die Formel

$$D_{m_h} = m_h \varkappa_h^2 \varphi_h'' - D_{s_h} - D_{e_h}, \tag{329}$$

welche für jeden Abschnitt des rechten oder linken Beins gilt, gleichgültig, welchen Index h die in derselben vorkommenden Größen tragen.

Um die Werte festzustellen, welche die drei Größen $\varkappa_h$, D_{s_h} und D_{e_h} in den verschiedenen Bewegungsphasen des schwingenden Beins besitzen, hat man sich zunächst eine genaue kinematische Analyse der Schwingungsbewegung beim Gehen zu verschaffen. Diese ist auf photographischem Wege gewonnen worden, wie aus einer Reihe von Abhandlungen des Verfassers über den Gang des Menschen[1]) zu ersehen ist. Dabei sind die grundlegenden Versuche seinerzeit noch in Gemeinschaft mit dem verstorbenen Anatomen W. Braune angestellt

1) Der Gang des Menschen. I. bis VI. Teil. Abhandlungen der mathematisch-physischen Klasse der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften Bd. XXI Nr. IV, Bd. XXV Nr. I, Bd. XXVI Nr. III, Bd. XXVI Nr. VII. Bd. XXVIII Nr. V und Bd. XXVIII Nr. VII.

worden. Eine auch nur in groben Umrissen gehaltene Darstellung der Versuche, sowie der auf dieselben gegründeten kinematischen Analyse und ihrer Ergebnisse würde die diesem Buche gesetzten Grenzen weit überschreiten. Es kann daher im folgenden nur ein kurzer Überblick über die Resultate der kinetischen Untersuchung der Schwingungsbewegung des Beins beim Gehen gegeben werden. Die ausführliche Ableitung und Begründung derselben ist aus den angeführten Abhandlungen über den Gang des Menschen zu ersehen.

Zunächst hat sich bei der Untersuchung herausgestellt, daß die Muskeln fast im ganzen Verlaufe der Schwingungsbewegung mit viel größeren resultierenden Drehungsmomenten auf die drei Abschnitte des Beins einwirken als die Schwere. Daraus ist aber zu ersehen, daß die Schwingung des Beins beim Gehen nicht, wie die Brüder Weber[1]) und nach ihnen viele Physiologen annahmen, eine reine Pendelschwingung ist, sondern daß sie im Gegenteil in noch stärkerem Maße der Einwirkung von Muskeln als dem Einflusse der Schwere zuzuschreiben ist. Die Untersuchung hat aber weiterhin auch Aufschluß gegeben über die Arten der Muskelgruppen, welche die Schwingungsbewegung des Beins hervorbringen, sowie über die genaue Größe der resultierenden Drehungsmomente, mit denen dieselben bei gemeinsamer Tätigkeit auf die drei Abschnitte des Beins einwirken. Dagegen ließ sich natürlich aus den Werten der Drehungsmomente D_{m_h} allein noch nicht mit voller Sicherheit entscheiden, welche einzelnen Muskeln dabei in Betracht kommen. Man ist aber durch die Resultate der genannten Untersuchung der Lösung dieser Frage einen wesentlichen Schritt näher gekommen, indem durch die Untersuchung festgestellt ist, welches Drehungsbestreben die vorläufig noch nicht genau gekannten Muskeln zusammen auf Oberschenkel, Unterschenkel und Fuß in jedem einzelnen Moment ausüben. Man hat sich infolgedessen gar nicht mehr mit der durch die Muskeln hervorgebrachten Schwingungsbewegung selbst zu beschäftigen, sondern nur noch eine Reihe von statischen Aufgaben zu lösen, welche dem früher angedeuteten Problem der Bestimmung aller Muskeln, die sich zur Hervorbringung einer bestimmten Ruhehaltung des Körpers kontrahieren müssen, durchaus äquivalent sind. Es ist also damit die Bewegung selbst aus der weiteren Betrachtung eliminiert, und die Untersuchung aus dem Gebiete der Kinetik in das der Statik hinübergeleitet worden.

Wenn nun auch die durch die Untersuchung gewonnenen Werte der Drehungsmomente D_{m_h} allein noch keine absolut sicheren Schlüsse auf die Muskeln zulassen, welche hauptsächlich an der Hervorbringung der Schwingungsbewegung des Beins beteiligt sind, so haben sie doch

---

1) Vgl. W. Weber und E. Weber, Mechanik der menschlichen Gehwerkzeuge, Göttingen 1836 und W. Webers ges. Werke, Berlin 1894, Bd. 6 § 17.

auch ohne weitere eingehende statische Untersuchung schon folgendes sehr wahrscheinlich gemacht: Zu Anfang der Periode des Schwingens wirken die sogenannten Beuger des Oberschenkels, wie der M. iliopsoas, ferner der M. rectus femoris und der M. tibialis anterior. Die Spannung dieser Muskeln wird im Verlaufe der Schwingung allmählich geringer, bis ihre Kontraktion gegen Ende des ersten Drittels der Schwingungsdauer ganz aufhört. Nun folgt eine etwa 0,04 Sek. lange Pause, in welcher allein der M. tibialis anterior schwach kontrahiert oder auch nur rein elastisch gespannt ist. Nach Ablauf dieser Periode kontrahieren sich voraussichtlich sogenannte Rückwärtsstrecker des Oberschenkels, wie der M. glutaeus maximus, ferner einer oder der andere der drei Muskeln M. biceps femoris caput longum, M. semimembranosus und M. semitendinosus, während der M. tibialis anterior immer noch in seiner Spannung anhält. Im letzten Viertel der Schwingungszeit wird der M. tibialis anterior voraussichtlich durch den M. gastrocnemius abgelöst, während es nicht wahrscheinlich ist, daß auch der M. soleus zur Kontraktion gebracht wird. Kurz vor dem Aufsetzen des Beins auf den Fußboden tritt dann vielleicht wieder der M. tibialis anterior in Tätigkeit. Es ist aber zu bemerken, daß die beiden über das Fußgelenk hinwegziehenden Muskeln im allgemeinen überhaupt nur geringe Spannungen in der Periode des Schwingens annehmen werden.

B. Einige Anwendungen auf Bewegungsvorgänge an Maschinen.

21. Der resultierende Massendruck am Schubkurbelgetriebe und sein Ausgleich.

Die im allgemeinen Teil bei der kinetischen Untersuchung der Gelenksysteme gewonnenen Gesichtspunkte und Methoden erweisen sich auch sehr fruchtbar für die Lösung mancher Probleme der technischen Mechanik. Dies soll nun schließlich noch an einem Beispiel gezeigt werden.

Die in der Technik verwendeten ebenen dreigliedrigen Gelenksysteme sind insofern von spezieller und besonders einfacher Natur, als ihre Bewegungsfreiheit auf 1 Grad beschränkt ist. Die Stellung des Systems muß daher in jedem Falle schon durch eine einzige Koordinate eindeutig bestimmt werden können. Im übrigen lassen sich aber alle bei der Untersuchung des ebenen dreigliedrigen Gelenksystems erhaltenen Resultate ohne weiteres auf jeden derartigen speziellen Mechanismus anwenden.

Als Beispiel möge das Schubkurbelgetriebe in Betracht gezogen werden, da über die Kinetik desselben sehr eingehende Arbeiten[1]) vorliegen, und man daher besser in der Lage ist, sich über die Bedeutung der Hauptpunkte und Hauptstrecken für derartige Untersuchungen ein Urteil zu bilden. Insbesondere soll aus der Kinetik des Schubkurbelgetriebes die Frage nach dem totalen Massendruck herausgegriffen werden, d. h. also nach dem Druck, welcher ausschließlich infolge der Bewegung des Gesamtschwerpunktes des Getriebes auf die feste Achse desselben und damit auf das Fundament ausgeübt wird, an welchem das Schubkurbelgetriebe drehbar befestigt ist. Dieser totale Massendruck wird bekanntlich durch das Produkt aus der Gesamtmasse des Systems und der Beschleunigung γ_0 seines Gesamtschwerpunktes gemessen und besitzt eine Richtung, welche der Richtung dieser Beschleunigung entgegengesetzt ist.

Figur 65 stelle ein Schema dieses Schubkurbelgetriebes dar. Der erste der drei Körper des Gelenkmechanismus wird hier durch das aus Schwungrad, Welle, Kurbel und Kurbelzapfen bestehende

---

1) Man vergleiche insbesondere H. Lorenz, Dynamik der Kurbelgetriebe. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 44. Band 1899 und 45. Band 1900.

starre System gebildet. Wenn nun auch die Berücksichtigung der Massen des Schwungrades und der Welle die Untersuchung in keiner Weise komplizieren würde, so sollen dieselben doch zunächst, wie bei H. Lorenz, außer Betracht bleiben, da sie auf den resultierenden

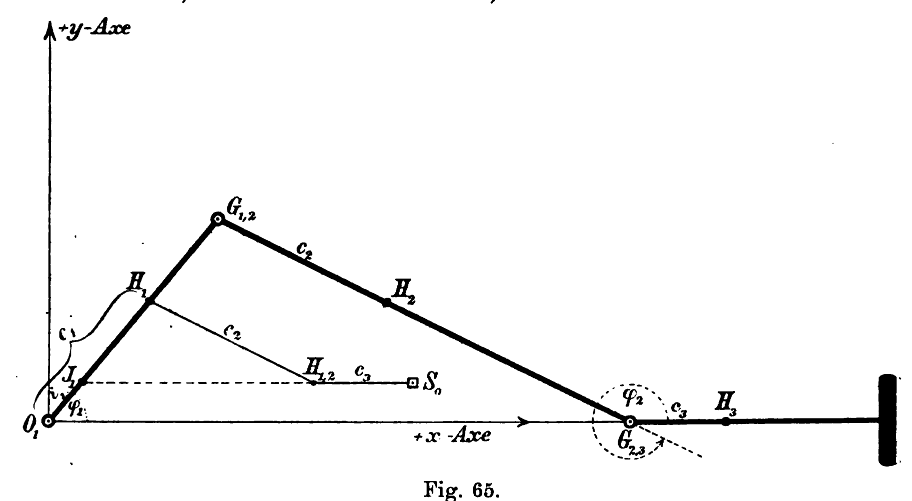


Fig. 65.

Massendruck, um dessen Bestimmung es sich handeln soll, keinen Einfluß ausüben. Es wird sich später zeigen, inwieweit die Formeln sich ändern, wenn man dem ersten Körper die Massen des Schwungrades und der Welle hinzufügt. Vorläufig soll unter m_1 nur die Masse der Kurbel mit dem Kurbelzapfen verstanden sein. Der zweite Körper des dreigliedrigen Gelenksystems wird durch die sogenannte Schubstange, und der dritte durch das aus Kreuzkopf, Kolbenstange und Kolben bestehende Gleitstück gebildet.

Der Drehpunkt O_1 der Kurbel liege in der Verlängerung der Gleitbahn, und die letztere stelle die X-Achse des Koordinatensystems dar. Dann nimmt in diesem speziellen Falle des Schubkurbelgetriebes der früher mit φ_3 bezeichnete Winkel den Wert Null an. Zwischen φ_1 und φ_2 (vgl. Fig. 65) besteht dagegen die Beziehung

$$\sin \varphi_1 : - \sin \varphi_2 = l_2 : l_1,$$

wobei unter l_1 die zwischen den Gelenkpunkten O_1 und $G_{1,2}$ gemessene Länge der Kurbel, und unter l_2, wie früher, der Abstand der beiden Gelenkmittelpunkte $G_{1,2}$ und $G_{2,3}$ verstanden werden soll. Nimmt man φ_1 als Koordinate für die Stellung des ganzen Mechanismus, so hat man also in den früher aufgestellten Formeln zu setzen

$$(330) \qquad \sin \varphi_2 = -\frac{l_1}{l_2} \sin \varphi_1 \quad \text{und} \quad \cos \varphi_2 = \sqrt{1 - \frac{l_1^2}{l_2^2} \sin^2 \varphi_1},$$

wozu noch kommt

$$\text{(331)} \qquad \sin \varphi_3 = 0 \quad \text{und} \quad \cos \varphi_3 = 1.$$

Unter dem Hauptpunkte H_1 der Kurbel hat man im Falle der Nichtberücksichtigung der Massen von Schwungrad und Welle den Schwerpunkt des Massensystems zu verstehen, welches man dadurch erhält, daß man die Massen m_2 der Schubstange und m_3 des Gleitstücks im Punkte $G_{1,2}$ der Kurbel hinzugefügt denkt. Die zwischen O_1 und H_1 sich hinziehende Hauptstrecke der Kurbel sei, wie früher, mit $\bar{c}_1$ bezeichnet. Den Hauptpunkt H_2 der Schubstange erhält man als Schwerpunkt des aus der Schubstange durch Hinzufügen der Masse m_1 von Kurbel und Kurbelzapfen im Punkte $G_{1,2}$ und der Masse m_3 des Gleitstücks im Punkte $G_{2,3}$ entstehenden Massensystems. Die Hauptstrecke $\overline{G_{1,2}H_2}$ sei wieder durch $\bar{c}_2$ bezeichnet. Endlich erhält man den Hauptpunkt H_3 des Gleitstücks, indem man in $G_{2,3}$ die Massen m_1 und m_2 dem Gleitstück hinzugefügt denkt und von diesem fingierten Massensystem den Schwerpunkt aufsucht. Die Hauptstrecke $\overline{G_{2,3}H_3}$ des Gleitstücks sei $\bar{c}_3$.

Die geometrische Addition der drei Hauptstrecken $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$ und $\bar{c}_3$ von O_1 aus führt sofort zu dem Gesamtschwerpunkte S_0 des Schubkurbelgetriebes (mit Ausnahme von Schwungrad und Welle). So weit sind die Verhältnisse wie beim allgemeinen dreigliedrigen Gelenksystem. Geht man nun aber zu den Koordinaten x_0 und y_0 des Gesamtschwerpunktes über, so stellen sich doch wesentliche Vereinfachungen gegenüber dem allgemeinen Falle ein. Verlängert man nämlich die zur X-Achse parallele Verbindungsstrecke $\overline{S_0 H_{1,2}}$ über $H_{1,2}$ hinaus bis zum Schnittpunkte J_1 auf $O_1 G_{1,2}$ (vgl. Fig. 65), so läßt sicht leicht einsehen, daß dieser Punkt J_1 infolge der Ähnlichkeit der Dreiecke $J_1 H_1 H_{1,2}$ und $O_1 G_{1,2} G_{2,3}$ eine feste Lage auf der Längsachse der Kurbel besitzt. Sein Abstand von H_1 ist $\frac{l_1}{l_2} c_2$, und daher der von O_1 gleich $c_1 - \frac{l_1}{l_2} c_2$; der letztere möge kurz durch i_1 bezeichnet sein.

Der Punkt J_1 besitzt nun stets dieselbe Ordinate, und infolgedessen auch dieselben y-Komponenten der Geschwindigkeit und Beschleunigung wie der Gesamtschwerpunkt S_0. Es ergibt sich daher ohne weiteres für die letzteren

$$\text{(332)} \qquad \begin{aligned} y_0 &= i_1 \sin \varphi_1 \\ y_0' &= i_1 \cos \varphi_1 \cdot \varphi_1' \\ y_0'' &= - i_1 \sin \varphi_1 \cdot \varphi_1'^2 + i_1 \cos \varphi_1 \cdot \varphi_1''. \end{aligned}$$

Infolgedessen erhält man für die Komponente des totalen Massendrucks in der Richtung der positiven Y-Achse den Wert:

$$(333) \qquad Y = m_0 i_1 [\sin \varphi_1 \cdot \varphi_1'^2 - \cos \varphi_1 \cdot \varphi_1''],$$

wobei $i_1 = c_1 - \frac{l_1}{l_2} c_2$ ist, und φ_1' die Winkelgeschwindigkeit, dagegen φ_1'' die Winkelbeschleunigung darstellt, mit denen sich die Kurbel um O_1 dreht.

In der Richtung der X-Achse gestalten sich die Verhältnisse zwar nicht ganz so einfach wie in der Y-Richtung, aber doch auch wesentlich einfacher als beim allgemeinen dreigliedrigen Gelenksystem. Da $\bar{c}_3$ bei allen Bewegungen der X-Achse parallel bleibt, so muß der Hauptpunkt $H_{1,2}$ des Systems der ersten beiden Körper (vgl. S. 19) in jeder Beziehung genau die gleiche Bewegung ausführen wie der Gesamtschwerpunkt S_0. Die Bahnkurve des letzteren ist nur um den Vektor $\bar{c}_3$ gegen die von $H_{1,2}$ verschoben. Dagegen sind die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen für den ganzen Ablauf der Bewegung bei beiden Punkten gleich. Man kann daher der Bestimmung der X-Komponente des totalen Massendrucks den Punkt $H_{1,2}$ zugrunde legen. Führt man im Interesse der Einfachheit der Darstellung zunächst noch den von φ_1 abhängigen Winkel φ_2, sowie auch die Winkelgeschwindigkeit φ_2' und die Winkelbeschleunigung φ_2'' in die Formeln ein, so erhält man für den Gesamtschwerpunkt S_0

$$(334) \qquad \begin{aligned} x_0 &= c_1 \cos \varphi_1 + c_2 \cos \varphi_2 + c_3 \\ x_0' &= - c_1 \sin \varphi_1 \cdot \varphi_1' - c_2 \sin \varphi_2 \cdot \varphi_2' \\ x_0'' &= - c_1 \cos \varphi_1 \cdot \varphi_1'^2 - c_2 \cos \varphi_2 \cdot \varphi_2'^2 - c_1 \sin \varphi_1 \cdot \varphi_1'' \\ &\qquad - c_2 \sin \varphi_2 \cdot \varphi_2'' \end{aligned}$$

und daraus für den totalen Massendruck in der Richtung der positiven X-Achse

$$(335) \qquad \begin{aligned} X = {} & m_0 c_1 (\cos \varphi_1 \cdot \varphi_1'^2 + \sin \varphi_1 \cdot \varphi_1'') \\ & + m_0 c_2 (\cos \varphi_2 \cdot \varphi_2'^2 + \sin \varphi_2 \cdot \varphi_2''). \end{aligned}$$

Hierbei sind nun noch der Winkel φ_2 und seine Ableitungen vermöge der Relation $l_2 \sin \varphi_2 = - l_1 \sin \varphi_1$ durch den Winkel φ_1, bezüglich dessen Ableitungen, auszudrücken.

Durch wiederholte Differentiation dieser Relation und geeignete Zusammenfassung erhält man schließlich als Wert der X-Komponente des totalen Massendrucks beim Schubkurbelgetriebe:

$$(336) \qquad \begin{aligned} X = {} & m_0 \left\{ c_1 \cos \varphi_1 + c_2 \frac{l_1^2}{l_2^2} \left(1 - \frac{l_1^2}{l_2^2} \sin^2 \varphi_1\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(\cos 2\varphi_1 + \frac{l_1^2}{l_2^2} \sin^4 \varphi_1\right) \right\} \varphi_1'^2 \\ & + m_0 \left\{ c_1 \sin \varphi_1 + c_2 \frac{l_1^2}{2 l_2^2} \left(1 - \frac{l_1^2}{l_2^2} \sin^2 \varphi_1\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \sin 2\varphi_1 \right\} \varphi_1''. \end{aligned}$$

Nach Angabe von H. Lorenz[1]) besitzt bei den in der Praxis

1) l. c. Seite 5.

vorkommenden Getrieben das Verhältnis $l_1 : l_2$ in der Regel einen so kleinen Wert, daß die höheren Potenzen dieses Verhältnisses nur sehr geringen Einfluß auf die Größe des Massendrucks ausüben. Denkt man sich daher in dem Ausdruck (336) für die X-Komponente des totalen Massendrucks die beiden Potenzen mit gebrochenen Exponenten nach dem Vorgange von H. Lorenz in Reihen entwickelt, die angedeuteten Multiplikationen ausgeführt, darauf nach Potenzen von $\frac{l_1}{l_2}$ geordnet, und schließlich alle Glieder, welche eine höhere als die zweite Potenz dieses Verhältnisses enthalten, vernachlässigt, so erhält man die Annäherungsformel

$$(337)\qquad X = m_0\left[c_1 \cos\varphi_1 + c_2 \frac{l_1^2}{l_2^2} \cos 2\varphi_1\right]\varphi_1'^2 + m_0\left[c_1 \sin\varphi_1 + c_2 \frac{l_1^2}{2\,l_2^2} \sin 2\varphi_1\right]\varphi_1''.$$

Dieser steht zur Seite die absolut genaue Formel für die Y-Komponente des totalen Massendrucks

$$(338)\qquad Y = m_0\left(c_1 - \frac{l_1}{l_2}\, c_2\right)(\sin\varphi_1 \cdot \varphi_1'^2 - \cos\varphi_1 \cdot \varphi_1'').$$

Diese beiden Formeln stimmen natürlich mit den von H. Lorenz auf weniger einfachem Wege gewonnenen Formeln 23) und 24) auf Seite 9 der zitierten Arbeit genau überein. Man kann sich leicht unter Berücksichtigung der Bedeutung der Hauptpunkte davon überzeugen, daß die in der letzteren auftretenden Ausdrücke

$$\frac{1}{g}\,[Ks'' + (G+P)r], \quad \frac{1}{g}\,[G(l-s') + Pl] \quad \text{und} \quad \frac{1}{g}\left[Ks'' + G\frac{r}{l}\,s'\right]$$

bezüglich mit den Größen $m_0 c_1$, $m_0 c_2$ und $m_0 i_1$ identisch sind.

Mit Hilfe der Hauptpunkte kann man nun auch in einfacher und vor allen Dingen sehr anschaulicher Weise, ohne alle Rechnung, die Bedingungen für den Ausgleich der Massendrücke darstellen.

Der totale Massendruck verschwindet im vorliegenden Falle nur dann, wenn der Gesamtschwerpunkt S_0 bei allen Bewegungen des Systems seinen Ort im Raume beibehält. Dazu ist keineswegs unbedingt erforderlich, daß S_0 bei allen Stellungen des Systems mit dem festen Drehpunkte O_1 zusammenfällt. Es wird nach den obigen Darlegungen S_0 auch dann im Raume festbleiben, wenn der Hauptpunkt $H_{1,2}$ des Systems von Kurbel und Schubstange (vgl. Fig. 65) nach O_1 fällt und während des Ablaufs der Bewegung diesen Ort unverändert beibehält. Hierfür ist aber die notwendige und hinreichende Bedingung die, daß der Hauptpunkt H_1 der Kurbel mit dem Drehpunkte O_1, und der Hauptpunkt H_2 der Schubstange mit dem Gelenkmittelpunkte $G_{1,2}$ zusammenfällt, d. h. also mit anderen Worten, daß die beiden Hauptstrecken

$\bar{c}_1$ und $\bar{c}_2$ die Länge Null besitzen. Die Erfüllung dieser Bedingung ist theoretisch wohl möglich; sie erfordert nach dem Zusammenhang der Hauptpunkte mit den Massen, Dimensionen und der Lage der Schwerpunkte der einzelnen Glieder nur, daß

$$(339)\qquad \begin{aligned} m_1 r_1 + (m_2 + m_3) l_1 &= 0 \quad \text{und} \\ m_2 r_2 + \ m_3 l_2 \quad &= 0 \end{aligned}$$

ist, unter r_1 den Abstand des Schwerpunktes der Kurbel (inkl. Kurbelzapfen) von O_1, und unter r_2 den Abstand des Schwerpunktes der Schubstange von $G_{1,2}$ verstanden. Die erste Bedingung wird erfüllt, wenn der Schwerpunkt S_1 der Kurbel nicht auf dem Kurbelradius $O_1 G_{1,2}$ selbst, sondern auf dessen Rückwärtsverlängerung über O_1 hinaus, und zwar in der Entfernung $\frac{m_2 + m_3}{m_1} l_1$ liegt. Die zweite Bedingungsgleichung verlangt dagegen, daß der Schwerpunkt S_2 der Schubstange nicht zwischen $G_{1,2}$ und $G_{2,3}$, sondern auf der Rückwärtsverlängerung der Längsachse der Schubstange über $G_{1,2}$ hinaus, und zwar in der Entfernung $\frac{m_3}{m_2} l_2$ liegt. Um diese Forderungen zu realisieren, müßte sich also sowohl die Kurbel weit über O_1 hinaus als auch die Schubstange weit über $G_{1,2}$ hinaus fortsetzen. Es müßte auch der größere Teil der Masse der Kurbel einerseits und der Schubstange andererseits auf diesen, der Funktion der beiden Glieder des Mechanismus nicht zugute kommenden, Fortsätzen verteilt sein. Sollen dabei die für die Energieübertragung in erster Linie in Frage kommenden Teile $O_1 G_{1,2}$ und $G_{1,2} G_{2,3}$ von Kurbel- und Schubstange nicht an Festigkeit einbüßen, so folgt aus einer derartigen Massenverteilung, daß sowohl das Gewicht $m_1 g$ der Kurbel inkl. Fortsatz als auch das Gewicht $m_2 g$ der Schubstange inkl. Fortsatz verhältnismäßig groß sein müssen.

Es mag dahingestellt bleiben, ob eine derartige Umgestaltung der Kurbel und der Schubstange in der Praxis ausführbar ist und nicht etwa beträchtliche Nachteile anderer Art für die Maschine im Gefolge hat. So viel geht aber aus den bisherigen Erörterungen hervor, daß rein theoretisch betrachtet ein vollkommener Ausgleich des totalen Massendrucks schon bei einem einzigen Schubkurbelbetriebe sehr wohl möglich ist. Allerdings läßt sich die vollständige Ausgleichung nicht dadurch erzielen, daß man nur der Kurbel gegenüber auf der Welle eine Masse anbringt und dadurch gewissermaßen die Kurbel über die Welle hinaus fortsetzt, sondern man muß auch gleichzeitig die Schubstange über den Kurbelzapfen hinaus bedeutend verlängern und durch beträchtliche Massen beschweren. Eine so starke einseitige Belastung der Schubstange würde aber wohl außergewöhnlich hohe Anforderungen an die Festig-

keit derselben stellen, da es sich ja hier im wesentlichen um hin und her gehende Bewegungen der einzelnen Massenteilchen, und nicht bloß um fortlaufende Rotation handelt.

Wäre es praktisch durchführbar, auf die beschriebene Weise den totalen Massendruck zum Verschwinden zu bringen, so würde der Gesamtschwerpunkt S_0 bei der Bewegung einen festen Ort auf der Verlängerung der Gleitbahn zwischen O_1 und $G_{2,3}$ einnehmen. Seine Entfernung von O_1 wäre dann gerade c_3.

Schließlich ist es theoretisch möglich, wenn auch für die Praxis kaum von großem Wert, den Gesamtschwerpunkt S_0 nach der Wellenachse O_1 selbst zu verlegen. Dazu wäre nur nötig, daß der Schwerpunkt S_3 des Gleitstücks im Mittelpunkte $G_{2,3}$ des Kreuzkopfzapfens liegt, eine Forderung, welche durch Verlängerung der Kolbenstange über den Kreuzkopfzapfen und Anbringung neuer Massen auf dieser Verlängerung verwirklicht werden könnte. Dann würde auch der Hauptpunkt H_3 des Gleitstücks nach $G_{2,3}$ fallen, und die Hauptstrecke c_3, d. h. also die Entfernung des Gesamtschwerpunktes S_0 von O_1, wäre in der Tat auf Null gebracht.

In gleich anschaulicher Weise wie für den vollkommenen Ausgleich kann man auch Bedingungen der nur teilweise stattfindenden Ausgleichung der Massendrücke aufstellen. Soll z. B. nur die Komponente des totalen Massendrucks in der Richtung der Y-Achse verschwinden, so ist die hierfür notwendige und hinreichende Bedingung, daß der Punkt J_1 auf dem Kurbelradius (vgl. Fig. 65) mit dem Drehpunkte O_1 zusammenfällt. Dies ist der Fall, wenn

$$(340) \qquad i_1 = c_1 - \frac{l_1}{l_2}\, c_2 = 0$$

wird. Damit befindet sich aber die Forderung von H. Lorenz (a. a. O. S. 10), der Kurbel gegenüber auf der Welle eine Masse vom Moment $G\frac{r}{l}\, s' + K s''$ anzubringen, in genauem Einklang. Die Erfüllung dieser Bedingung bewirkt nun in allgemeinen nicht auch gleichzeitig das Verschwinden der X-Komponente des totalen Massendrucks. Die für letztere auf Seite 353 angegebene Näherungsformel (337) erhält aber jetzt die einfachere Form

$$(341) \qquad X = m_0 c_1 \left\{ \left(\cos\varphi_1 + \frac{l_1}{l_2}\cos 2\varphi_1\right)\varphi_1'^2 + \left(\sin\varphi_1 + \frac{l_1}{2 l_2}\sin 2\varphi_1\right)\varphi_1'' \right\}.$$

Bei allen bisherigen Erörterungen über das Schubkurbelgetriebe waren die Massen der Welle und des Schwungrades außer Betracht gelassen worden. Die Untersuchung gestaltet sich nun in keiner Weise dadurch komplizierter, daß man diese mit der Kurbel starr verbundenen Massen hinzunimmt. Es möge dabei nur die Voraussetzung gemacht werden, daß der in die Wellenachse fallende gemein-

same Schwerpunkt von Welle und Schwungrad in der Ebene der Schwerpunkte der übrigen Teile des Mechanismus, d. h. also direkt im Punkte O_1 angenommen werden darf. Diese Voraussetzung ließe sich beispielsweise durch zwei symmetrisch zu O_1 verteilte Schwungräder und gekröpfte Achsen streng verwirklichen.

Das Hinzufügen der neuen Massen bewirkt zunächst eine Änderung in der Lage der Hauptpunkte aller drei Glieder des Mechanismus; denn dieselben hängen ja nicht nur von der Verteilung der Masse innerhalb des Gliedes ab, dem sie angehören, sondern sie werden auch durch die Verteilung der Gesamtmasse des ganzen Systems auf die drei Glieder beeinflußt; die letztere ist aber sofort geändert, wenn nur einem der drei Glieder neue Masse hinzugefügt wird. Es ist auch leicht einzusehen, daß jetzt alle Hauptpunkte innerhalb des gebrochenen Linienzuges der drei Längsachsen der Glieder dem Drehpunkte O_1 näher rücken; denn für alle drei reduzierten Systeme tritt in dem O_1 am nächsten liegenden Gelenkmittelpunkte des zugrunde liegenden Gliedes die Masse der Welle mit dem Schwungrad hinzu. Man braucht nun nach den früheren Auseinandersetzungen nicht erst wieder auf die Einzelschwerpunkte der drei Glieder zurückzugreifen, um die Lage der neuen Hauptpunkte zu bestimmen. Man kann vielmehr gleich von den alten Hauptpunkten H_1, H_2, H_3 ausgehen. Bezeichnet man

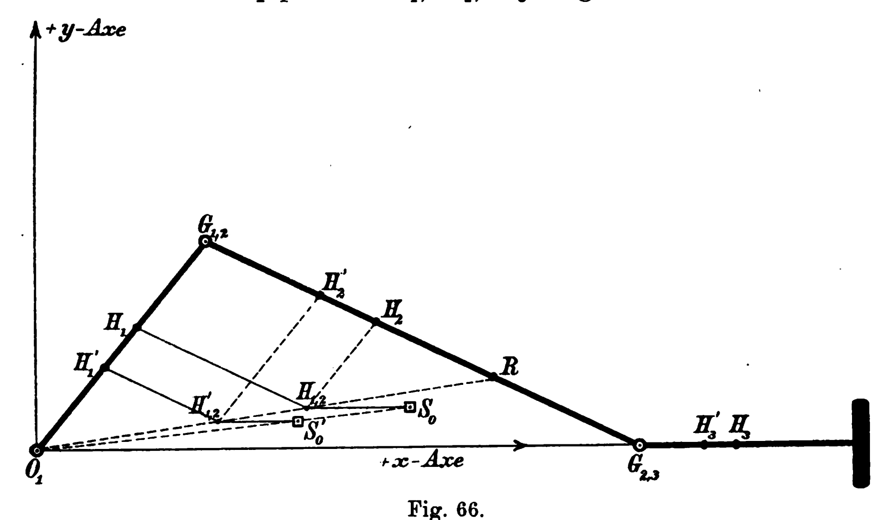


Fig. 66.

die neuen Hauptpunkte mit H_1', H_2', H_3' (vgl. Fig. 66) und die Masse der Welle mit dem Schwungrad durch m_s, so stellt sich H_1' dar als Schwerpunkt der in O_1 und H_1 konzentriert gedachten Massen m_s und m_0. Desgleichen bildet H_2' den Schwerpunkt der in $G_{1,2}$ und H_2 konzentriert angenommenen Massen m_s und m_0, und endlich H_3'

den Schwerpunkt der in $G_{2,3}$ und H_3 konzentriert gedachten Massen m_s und m_0. Die drei neuen Hauptpunkte sind daher auch wieder auf den Längsachsen der drei Glieder des Mechanismus zu suchen.

Bedeuten $\bar{c}_1'$, $\bar{c}_2'$ und $\bar{c}_3'$ die neuen Hauptstrecken $\overline{OH_1'}$, $\overline{G_{1,2}H_2'}$ und $\overline{G_{2,3}H_3'}$ und m_0' die Summe der Massen m_0 und m_s, d. h. also die Gesamtmasse des Systems der drei Körper nach Hinzufügen der Massen der Welle und des Schwungrades, so hat man demnach die Relationen

$$(342)\qquad m_0'c_1' = m_0c_1;\quad m_0'c_2' = m_0c_2 \quad\text{und}\quad m_0'c_3' = m_0c_3.$$

Beachtet man nun, daß man unter Zugrundelegung der neuen Hauptstrecken und der neuen Gesamtmasse natürlich zu Formeln für die Komponenten des totalen Massendrucks gelangt, welche sich von den Formeln (333), (336), (338), (337) und (341) nur dadurch unterscheiden, daß an Stelle der Größen m_0, c_1, c_2, c_3 die neuen Größen m_0', c_1', c_2', c_3' getreten sind, so erhält man in Rücksicht auf (342) das Resultat, daß der totale Massendruck durch das Hinzutreten der Massen der Welle und des Schwungrades in seiner Größe nicht geändert wird. Daher war es erlaubt, zum Zwecke der Ableitung des Massendrucks zunächst ganz von der Welle und dem Schwungrad abzusehen.

Während der totale Massendruck von diesen beiden Teilen des Gelenkmechanismus unabhängig ist, wird natürlich die Lage des Gesamtschwerpunktes des Systems sehr wesentlich durch dieselben beeinflußt. Der neue Gesamtschwerpunkt S_0' wird mit Hilfe der neuen Hauptpunkte auf dieselbe Art gefunden wie S_0 unter Zugrundelegung der alten Hauptpunkte (vgl. Fig. 66). Gleichzeitig wird man bei der Konstruktion desselben auf den neuen Hauptpunkt $H'_{1,2}$ des Systems der ersten beiden Glieder geführt. Da nach (342)

$$(343)\qquad \overline{O_1H_1'} : \overline{O_1H_1} = \overline{G_{1,2}H_2'} : \overline{G_{1,2}H_2} = \overline{G_{2,3}H_3'} : \overline{G_{2,3}H_3} = m_0 : m_0',$$

so erkennt man aus Figur 66, daß $H'_{1,2}$ auf $O_1H_{1,2}$ und S_0' auf O_1S_0 liegen muß, und zwar so, daß auch

$$(344)\qquad O_1H'_{1,2} : O_1H_{1,2} = O_1S_0' : O_1S_0 = m_0 : m_0'.$$

Zu diesem Resultat gelangt man noch auf einfachere Weise, wenn man beachtet, daß infolge der Bedeutung von $H_{1,2}$ und $H'_{1,2}$ der letztere Punkt der Schwerpunkt der in O_1 und $H_{1,2}$ konzentriert gedachten Massen m_s und m_0, und ferner auch S_0' den Schwerpunkt der in O_1 und S_0 konzentrierten Massen m_s und m_0 bilden muß. Man erkennt hieraus auch, daß die Punkte $H'_{1,2}$ und S_0' bei der Bewegung des Systems Bahnen beschreiben, welche den Bahnen der Punkte $H_{1,2}$ und S_0 ähnlich, und zwar im Verhältnis $m_0 : m_0'$ verkleinert, sind.

Endlich soll noch auf eine Tatsache hingewiesen werden, welche unter Umständen eine praktische Bedeutung gewinnen kann. Denkt man sich nämlich die Verbindungslinie $O_1 H'_{1,2} H_{1,2}$ über $H_{1,2}$ hinaus verlängert bis zum Schnittpunkte R mit der Längsachse $G_{1,2} G_{2,3}$ der Schubstange (vgl. Fig. 66), so läßt sich leicht einsehen, daß die Lage dieses Punktes von der jeweiligen Gelenkstellung des Mechanismus ganz unabhängig ist, und daß sein Abstand von O_1 in einem ganz bestimmten Verhältnis zu $O_1 H'_{1,2}$ bezüglich $O_1 H_{1,2}$ steht. Man hat nämlich einfach

$$(345) \qquad O_1 R = \frac{l_1}{c_1'} \cdot O_1 H'_{1,2} = \frac{l_1}{c_1} \cdot O_1 H_{1,2}.$$

Da nun die Bewegung von $H'_{1,2}$ genau mit der von S_0', und die Bewegung von $H_{1,2}$ genau mit der von S_0 übereinstimmt, so folgt hieraus, daß die Bewegung des Punktes R sowohl ähnlich der Bewegung des Gesamtschwerpunktes S_0' des ganzen Systems inkl. Welle und Schwungrad, als auch ähnlich der Bewegung des Gesamtschwerpunktes S_0 des Systems ohne Welle und Schwungrad ist. Man kann also an der Bewegung des auf der Längsachse der Schubstange festen Punktes R, für den im 17. Abschnitt (vgl. Seite 248) der Name „Richtpunkt“ eingeführt worden ist, direkt die Bewegung des Gesamtschwerpunktes des Systems, und zwar sogar in vergrößertem Maßstabe, erkennen. Die Bahnkurve von R erscheint nämlich im Verhältnis $l_1 : c_1'$ größer als die von S_0', und im Verhältnis $l_1 : c_1$ größer als die von S_0.

Die praktische Bedeutung, welche dieses Ergebnis gewinnen kann, scheint mir darin zu liegen, daß man dadurch in den Stand gesetzt wird, die Bewegung des Gesamtschwerpunktes bei irgend einem Schubkurbelgetriebe auf graphischem oder auch auf photographischem Wege zu registrieren. Man könnte z. B. an der Stelle R der Schubstange in sehr kurzen, aber genau abgemessenen Zeitintervallen kleine elektrische Funken erzeugen, oder ein kleines Geißlersches Röhrchen intermittierend aufleuchten lassen, und würde dann beim Photographieren im verdunkelten Raume mit offenstehender Camera die Bewegung von R auf der lichtempfindlichen Platte in einer großen Anzahl von Bewegungsphasen aufgezeichnet finden. Diese Methode, welche wir seinerzeit für die photographische Registrierung des menschlichen Ganges[1]) verwendet haben, gibt sehr genaue Resultate. Sie liefert nicht nur die Bahnkurve des Punktes, sondern sie ermöglicht sogar eine ziemlich exakte Bestimmung der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen desselben für den ganzen Ablauf der Bewegung. Vorbedingung hierfür ist nur ein äußerst genaues Regulieren der Unterbrechungen am

1) Abhandlungen der mathematisch-physischen Klasse der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Bd. XVII, Nr. II und Bd. XXI, Nr. IV.

Induktionsapparat. Dies läßt sich aber durch Anwendung eines Stimmgabelunterbrechers erreichen. Hat man auf diese Weise die zu jedem Moment gehörende Beschleunigung des Gesamtschwerpunktes abgeleitet, so hat man damit auch ein Maß für den totalen Massendruck im Verlaufe der Bewegung gewonnen.

Dieses eine Beispiel mag genügen, um zu zeigen, daß die reduzierten Systeme und die Hauptpunkte der Glieder eines Gelenksystems ihre vereinfachende Kraft auch bei der Untersuchung der Bewegungsvorgänge an Maschinen bewähren. In gleicher Weise wie das einfache Schubkurbelgetriebe lassen sich auch die Mehrkurbelgetriebe behandeln. Es zeigt sich auch bei diesen in gleich anschaulicher Weise, daß eine Ausgleichung der Größen der einzelnen Massendrücke theoretisch wohl möglich ist. Über die eingehendere Untersuchung der Mehrkurbelgetriebe vergleiche man meine Abhandlung „Über die reduzierten Systeme und die Hauptpunkte der Glieder eines Gelenkmechanismus und ihre Bedeutung für die technische Mechanik.“[1])

22. Die Bewegungen eines physischen Pendels mit drehbarer Linse.

Zum Schluß sollen noch als Anwendung der in diesem Buch dargestellten neuen Methoden der Untersuchung von Gelenksystemen die Bewegungsgleichungen des schon in der Einleitung und dann später zu Ende des 7. Abschnittes erwähnten physischen Pendels mit drehbarer Linse abgeleitet werden.

Die Pendelstange desselben sei ohne Reibung um eine feste horizontale, zu ihrer Längsausdehnung senkrechte Achse O_1 (vgl. Fig. 67) drehbar, welche als Pendelachse bezeichnet sein soll. In Figur 67 ist dieselbe zu der Ebene der Zeichnung senkrecht gedacht. Die durch den Schwerpunkt S_1 der Stange gehende zu O_1 parallele Gerade sei eine Hauptträgheitsachse für die Stange, dann stellt auch die Pendelachse selbst eine Hauptträgheitsachse für die Stange dar. In der durch die Pendelachse O_1 und den Schwerpunkt S_1 gehenden Ebene sei an einer zu O_1 parallelen Geraden $G_{1,2}$ eine bikonvexe Metallinse drehbar mit der Stange verbunden, deren geometrische durch den Schwerpunkt S_2 der Linse

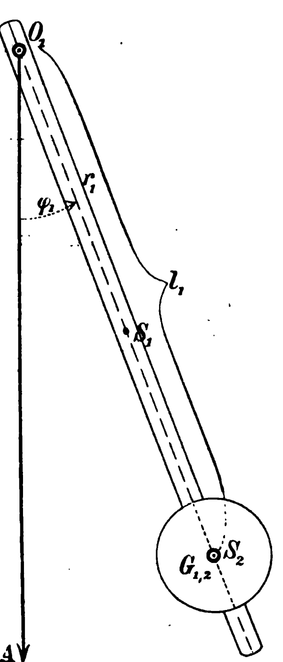


Fig. 67.

1) Zeitschrift für Mathematik und Physik. 47. Band, Seite 429 ff., 1902.

hindurchgehende Achse mit $G_{1,2}$ zusammenfallen und eine Hauptträgheitsache für die Linse darstellen soll; dabei ist außerdem noch vorausgesetzt, daß die Linie, welche den Schwerpunkt S_2 der Linse mit dem Schwerpunkte S_1 verbindet, und welche über S_1 hinaus verlängert nach den getroffenen Annahmen die Pendelachse O_1 treffen muß, auf der letzteren senkrecht steht, was sich etwa durch Zerteilen der Linse in zwei symmetrische Kugelsegmente erreichen läßt. Diese Linie stellt die Längsachse der Stange dar. Die Abstände der Schwerpunkte S_1 und S_2 von O_1 seien wie früher beim dreigliedrigen Gelenksystem mit r_1 und l_1, die Massen der Stange und der Linse mit m_1 und m_2, und der Trägheitsradius der Stange für die zu O_1 parallele Schwerpunktsachse mit $\varkappa_1$, und endlich der Trägheitsradius der Linse für ihre durch den Schwerpunkt S_2 gehende Achse mit $\varkappa_2$ bezeichnet.

Das erste reduzierte System, welches hier reduziertes Stangensystem genannt sein soll, wird erhalten, indem man in S_2 die Masse m_2 konzentriert und der Stange hinzugefügt denkt. Der Hauptpunkt H_1 der Stange, welcher zunächst den Schwerpunkt des reduzierten Stangensystems, bei diesem speziellen Gelenksystem aber auch zugleich den Gesamtschwerpunkt S_0 des ganzen Pendels darstellt, liegt nach den gemachten Voraussetzungen auf der Längsachse der Stange, und zwar von O_1 in einer Entfernung c_1, für welche gilt

(346) $$m_0 c_1 = m_1 r_1 + m_2 l_1 .$$

Der Trägheitsradius k_1 des reduzierten Stangensystems für die zu O_1 parallele Achse durch H_1 und das zugehörige Trägheitsmoment ergeben sich aus

(347) $$m_0 k_1^2 = m_1 [\varkappa_1^2 + (c_1 - r_1)^2] + m_2 (l_1 - c_1)^2.$$

Bezeichnet man mit λ_1 den Trägheitsradius des reduzierten Stangensystems in bezug auf die Pendelachse O_1, so ergibt sich weiterhin für das zugehörige Trägheitsmoment

(348) $$m_0 \lambda_1^2 = m_0 (k_1^2 + c_1^2),$$

welches natürlich auch direkt aus den gegebenen Größen abgeleitet werden kann, durch

(349) $$m_0 \lambda_1^2 = m_1 (\varkappa_1^2 + r_1^2) + m_2 l_1^2.$$

Daß die rechte Seite dieser letzten Formel mit der der vorletzten übereinstimmt, erkennt man aus (346) und (347).

Das zweite reduzierte System oder das reduzierte Linsensystem wird erhalten, indem man in S_2 die Masse m_1 konzentriert und der Linse hinzugefügt denkt. Man bestätigt leicht, daß der Hauptpunkt H_2 der Linse in diesem Falle mit S_2 zusammenfällt, und daß die Trägheitsradien k_2 und λ_2 ebenso wie die entsprechenden Trägheitsmomente des reduzierten Linsensystems für die Achse $G_{1,2}$ gleich groß sind. Die beiden Trägheitsmomente besitzen den Wert

(350) $$m_0 \lambda_2^2 = m_0 k_2^2 = m_2 \varkappa_2^2.$$

Die Schwere wirkt nun auf das reduzierte Stangensystem wie eine in H_1 angreifende vertikal nach unten ziehende Kraft von der Größe $m_0 g$. Ist φ_1 der Winkel, den die Längsachse der Stange mit der Vertikalen bildet, so ist das Drehungsmoment dieser Kraft in bezug auf die Pendelachse $-m_0 g \cdot c_1 \sin \varphi_1$. Man hat daher als erste Bewegungsgleichung, falls außer der Schwere keine anderen äußeren und insbesondere auch keine zwischen der Linse wirkenden inneren Kräfte vorhanden sind

(351) $$m_0 \lambda_1^2 \cdot \varphi_1'' = - m_0 g \cdot c_1 \sin \varphi_1$$

oder

(352) $$[m_1 (\varkappa_1^2 + r_1^2) + m_2 l_1^2] \cdot \varphi_1'' = - (m_1 r_1 + m_2 l_1) g \sin \varphi_1 .$$

Auf das reduzierte Linsensystem wirkt die Schwere wie eine in H_2 (d. h. also hier in S_2) angreifende Kraft von der Größe $m_0 g$; ihr Drehungsmoment für die Achse durch $G_{1,2}$ ist daher in diesem Falle Null, so daß man als zweite Bewegungsgleichung erhält

(353) $$m_0 \lambda_2^2 \cdot \varphi_2'' = 0,$$

woraus durch Integration folgt

(354) $$m_0 \lambda_2^2 \cdot \varphi_2' = \text{Const.}$$

Man hat daher das Resultat, daß die Linse bei der Bewegung des Pendels sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit im Raume um die Achse $G_{1,2}$ dreht, falls außer der Schwere keinerlei andere Kräfte, insbesondere keine inneren Kräfte zwischen Stange und Linse wirksam sind. Diese konstante Winkelgeschwindigkeit kann die Linse natürlich nur durch irgend welche Krafteinwirkung vor dem Beginn der Pendelschwingung erhalten haben. War dies nicht der Fall, so führt die Linse während der Schwingung eine reine Translationsbewegung aus.

Soll dagegen die Linse mit beliebiger, nicht gleichförmiger Drehung um $G_{1,2}$ die Schwingung der Stange begleiten, so ist das nur möglich, wenn außer der Schwere noch andere Kräfte auf die Linse einwirken; diese werden dann aber zugleich auch die Schwingung des ganzen Pendels beeinflussen. Greift noch eine beliebige Kraft an der Linse an, so wird nach den früheren Auseinandersetzungen in der ersten Bewegungsgleichung, die ja zu der Bewegung des reduzierten Stangensystems gehört, auf der rechten Seite noch das Drehungsmoment hinzutreten, welches diese Kraft, nachdem man sie parallel nach $G_{1,2}$ verlegt hat, auf die Pendelachse ausübt. Sind dagegen nur innere Kräfte zwischen Stange und Linse vorhanden, so werden dieselben wiederum auch auf das reduzierte Stangensystem mit Drehungsmomenten einwirken. Nach den früheren Auseinandersetzungen wirkt jedes Paar innerer Kräfte auf jedes der beiden reduzierten Systeme

mit einem Kräftepaar im Poinsotschen Sinne ein. Das von den inneren Kräften auf das reduzierte Linsensystem ausgeübte Drehungsmoment ist das resultierende Moment aller dieser Kräftepaare. Das resultierende Drehungsmoment aller auf das reduzierte Stangensystem einwirkenden inneren Kräfte ist nach den früheren allgemeinen Betrachtungen dem auf das reduzierte Linsensystem ausgeübten entgegengesetzt gleich.

Es mögen nun innere Kräfte vorhanden sein, die etwa durch irgendwelche zwischen Stange und Linse ausgespannte und sich nach Art von Muskelfasern kontrahierende elastische, aber masselose Stränge, oder durch eine Uhrfeder oder ein zwischen beiden Gliedern eingeschaltetes masseloses Uhrwerk hervorgerufen werden. Diese inneren Kräfte mögen auf das reduzierte Linsensystem mit einem Kräftepaar einwirken, dessen resultierendes Moment gleich D_2 ist; dann lautet die zweite Bewegungsgleichung

(355) $$m_0 \lambda_2^2 \cdot \varphi_2'' = D_2.$$

Das auf das reduzierte Stangensystem von Seiten dieser inneren Kräfte ausgeübte Drehungsmoment, d. h. das Moment des an diesem System angreifenden resultierenden Kräftepaares ist daher gleich $-D_2$, so daß jetzt die erste Bewegungsgleichung lautet

(356) $$m_0 \lambda_1^2 \cdot \varphi_1'' = -m_0 g \cdot c_1 \sin \varphi_1 - D_2$$

Kombiniert man beide Bewegungsgleichungen, so erhält man

(357) $$m_0 [\lambda_1^2 \cdot \varphi_1'' + \lambda_2^2 \cdot \varphi_2''] = -m_0 g \cdot c_1 \sin \varphi_1 ,$$

wofür auch in Rücksicht auf die Werte der Trägheitsmomente $m_0 \lambda_1^2$ und $m_0 \lambda_2^2$ der beiden reduzierten Systeme und der Hauptstrecke c_1 geschrieben werden kann

(358) $$\begin{aligned}[m_1 (\varkappa_1^2 + r_1^2) + m_2 l_1^2] \cdot \varphi_1'' + m_2 \varkappa_2^2 \cdot \varphi_2'' \\ = -(m_1 r_1 + m_2 l_1) g \sin \varphi_1 .\end{aligned}$$

Solange die absolute Winkelbeschleunigung φ_2'', mit welcher sich die Linse um die Achse $G_{1,2}$ im Raume dreht, von der Winkelbeschleunigung φ_1'', mit der sich die Stange um die Pendelachse 0_1 bewegt, verschieden ist, besitzt die Linse relativ zur Stange eine Winkelbeschleunigung ϑ'' von der Größe $\varphi_2'' - \varphi_1''$, welche als die Winkelbeschleunigung der Gelenkbewegung zwischen Linse und Stange aufgefaßt werden kann. Die Linse wird sich also gegen die Stange im Gelenk $G_{1,2}$ drehen, und zwar mit fortwährender Änderung ihrer zur Stange relativen Winkelgeschwindigkeit nach Maßgabe des jeweiligen Wertes der relativen Winkelbeschleunigung ϑ''.

Führt man die Winkelbeschleunigung ϑ'' der Gelenkbewegung in die Gleichung (358) ein, indem man φ_2'' durch $\varphi_1'' + \vartheta''$ ersetzt, so

nimmt dieselbe die Form an

$$(359)\quad \begin{aligned}[m_1(\varkappa_1^2 + r_1^2) + m_2(\varkappa_2^2 + l_1^2)] \cdot \varphi_1'' + m_2\varkappa_2^2 \cdot \vartheta'' \\ = -(m_1 r_1 + m_2 l_1) g \sin \varphi_1 .\end{aligned}$$

Der zuerst untersuchte Fall, in welchem außer der Schwere keine äußeren und inneren Kräfte am Gelenksystem wirksam sein sollten, war durch den Wert Null für φ_2'' charakterisiert. Daher ist in diesem Falle die Winkelbeschleunigung ϑ'' im Gelenk $G_{1,2}$ entgegengesetzt gleich der Winkelbeschleunigung φ_1'' der Stange um die Pendelachse O_1. Wenn man die Bewegung des Pendels so einleitet, daß man die Stange um einen gewissen Winkel aus ihrer Ruhelage herausdreht und dann losläßt, ohne dabei der Stange oder der Linse eine besondere Anfangsgeschwindigkeit zu erteilen, so ist demnach in jedem Moment auch die Winkelgeschwindigkeit im Gelenk entgegengesetzt gleich der Winkelgeschwindigkeit der Stange bei ihrer Drehung um O_1. Dementsprechend führt dann, wie oben bemerkt, die Linse im Raume eine reine Translationsbewegung aus.

Es kann nun auch der Fall eintreten, daß die auf den ruhenden Raum bezogene absolute Winkelbeschleunigung φ_2'' der Linse mit der Winkelbeschleunigung φ_1'' der Stange genau übereinstimmt; dann wird die Winkelbeschleunigung ϑ'' im Gelenk den Wert Null annehmen, d. h. es wird sich entweder die Linse so bewegen, als ob sie mit der Stange starr verbunden wäre, oder sie wird gegen die Stange eine gleichförmige Drehung im Gelenk $G_{1,2}$ ausführen. In diesen Fällen nimmt die obige Bewegungsgleichung (359) die spezielle Form an

$$(360)\quad [m_1(\varkappa_1^2 + r_1^2) + m_2(\varkappa_2^2 + l_1^2)] \cdot \varphi_1'' = -(m_1 r_1 + m_2 l_1) g \sin \varphi_1 .$$

Diese Gleichung stimmt aber in der Tat mit der Differentialgleichung der Bewegung des gewöhnlichen physischen Pendels überein, welches aus Stange und damit fest verbundener Linse besteht; denn der Faktor von φ_1'' ist, wie man leicht erkennt, das Trägheitsmoment dieses Pendels und der Ausdruck auf der rechten Seite infolge des Zusammenfallens von S_0 mit H_1 das Drehungsmoment der Schwere, beide bezogen auf die Pendelachse O_1.

Vergleicht man mit diesen Resultaten die von Carl Neumann in der oben (vgl. Seite 69) zitierten Abhandlung mit Hilfe der Lagrangeschen Differentialgleichungen abgeleiteten, so findet man vollkommene Übereinstimmung zwischen beiden. Man hat dabei nur in Rücksicht zu ziehen, daß das von Neumann untersuchte Pendel insofern noch etwas spezieller ist, als bei demselben die Masse der Pendelstange, welche dort durch ein aus vier starren Linien zusammengesetztes starres Rechteck dargestellt wird, verschwindend klein gedacht ist. Setzt man aber in den obigen Formeln m_1 gleich Null, und ersetzt

außerdem, um Übereinstimmung mit der von Neumann gewählten Bezeichnungsweise herbeizuführen, die Masse m_2 der Linse durch M, das Trägheitsmoment $m_2 \varkappa_2^2$ derselben in bezug auf die Achse $G_{1,2}$ durch M, und läßt endlich den Index 1 bei l_1, φ_1 uud φ_1'' fort, so gehen die Formeln (360), (352) und (359), welche den drei von Neumann unterschiedenen Fällen entsprechen, über in

$$(361) \qquad (Ml^2 + \mathsf{M}) \cdot \varphi'' = - Mlg \sin \varphi ,$$

$$(362) \qquad Ml^2 \cdot \varphi'' = - Mlg \sin \varphi ,$$

$$(363) \qquad (Ml^2 + \mathsf{M}) \cdot \varphi'' + \mathsf{M} \cdot \vartheta'' = - Mlg \sin \varphi .$$

Dies sind aber genau die von Neumann gefundenen Gleichungen, welche sich in der angegebenen Arbeit auf den Seiten 430, 431 und 434 befinden und daselbst mit den Nummern (12), (18) und (26) bezeichnet sind.

Damit ist wohl zur Genüge erwiesen, daß die Zurückführung der Bewegungen eines Gelenksystems auf die Bewegungen der reduzierten Systeme sogar schon bei sehr einfachen Gelenksystemen wertvolle Dienste leistet, indem sie es ermöglicht, die Bewegungsgleichungen des Systems direkt hinzuschreiben, ohne daß man genötigt wäre, den Umweg über die lebendige Kraft und die allgemeinen Lagrangeschen Differentialgleichungen der Bewegung zu machen.

Literaturangaben.

Angabe einiger Lehrbücher, welche sich unter anderem mit physiologischer Kinetik beschäftigen.

A. Borelli, De motu animalium, Lugduni Batavorum 1679.
W. Weber und E. Weber, Mechanik der menschlichen Gehwerkzeuge, Göttingen 1836 und W. Webers ges. Werke, Berlin 1894, Bd. 6.
R. Willis, Principles of mechanism, London 1841.
A. Fick, Die medizinische Physik, 1. Aufl. Braunschweig 1856, 3. Aufl. 1885.
W. Henke, Handbuch der Anatomie und Mechanik der Gelenke, Leipzig und Heidelberg 1863.
G. B. Duchenne, Physiologie des Mouvements, Paris 1867. Deutsch von C. Wernicke, Cassel und Berlin 1885.
W. Wundt, Handbuch der medizinischen Physik, Erlangen 1867.
S. Haughton, Principles of animal mechanics, 2. ed. London 1873.
E. J. Marey, La machine animale, Paris 1873.
H. Meyer, Die Statik und Mechanik des menschlichen Knochengerüstes, Leipzig 1873.
J. Kollmann, Mechanik des menschlichen Körpers, Naturkräfte Bd. 13, München 1874.
J. Bell Pettigrew, Die Ortsbewegung der Tiere nebst Bemerkungen über Luftschiffahrt. Internat. wissensch. Bibliothek, Leipzig 1875.
G. Jäger, Die menschliche Arbeitskraft, Naturkräfte Bd. 26 u. 27. München 1878.
A. Fick, Spezielle Bewegungslehre, Hermanns Handbuch der Physiologie, Bd. 1, Leipzig 1879.
A. Fick, Mechanische Arbeit und Wärmeentwicklung bei der Muskeltätigkeit. Internat. wissensch. Bibliothek, Leipzig 1882.
P. Leßhaft, Grundlagen der theoretischen Anatomie, Leipzig 1892.
E. J. Marey, Le mouvement, Paris 1894.
L. Hermann, Lehrbuch der Physiologie. 11. Aufl. Berlin 1896.
G. Weiß, Traité de Physique biologique, Bd. 1, Paris 1901.
R. Tigerstedt, Lehrbuch der Physiologie des Menschen. 2 Bände. II. Aufl. Leipzig 1902.
R. du Bois-Reymond, Spezielle Muskelphysiologie oder Bewegungslehre, Berlin 1903.
R. du Bois-Reymond, Gelenkbewegung — Spezielle Muskelphysiologie — Stehen und Gehen. Ergebnisse der Physiologie, 2. Abt. 2 (1903).
M. von Frey, Vorlesungen über Physiologie, Berlin 1904.
R. Fick, Handbuch der Anatomie und Mechanik der Gelenke unter Berücksichtigung der bewegenden Muskeln, Jena 1904—1906.

Im übrigen sei auf das ausführliche Literaturverzeichnis in dem Artikel des Verfassers über „physiologische Mechanik“ in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen, Band IV, 2, II Heft 1 (Leipzig 1904) verwiesen.

Verzeichnis derjenigen Abhandlungen des Verfassers, von deren Ergebnissen das Buch eine zusammenfassende Darstellung gibt.

(Leipz. Abh. bedeutet: Abhandlungen der mathematisch-physischen Klasse der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig.)

Die Rotationsmomente der Beugemuskeln am Ellbogengelenk des Menschen. Leipz. Abh. 1889, (gemeinsam mit W. Braune).

Über den Schwerpunkt des menschlichen Körpers, mit Rücksicht auf die Ausrüstung des deutschen Infanteristen. Leipz. Abh. 1889, (gemeinsam mit W. Braune).

Mechanismus zur Bestimmung der Lage des Schwerpunktes des menschlichen Körpers und seiner Teile. Deutsche Mathematiker-Vereinigung, Katalog math. Modelle 1892.

Zwei Mechanismen zur Darstellung der Wirkung eines Muskels. Deutsche Mathematiker-Vereinigung, Katalog math. Modelle 1892.

Mechanismus zur Bestimmung der Trägheitsmomente eines Körperteils für alle Schwerpunktsachsen. Deutsche Mathematiker-Vereinigung, Katalog math. Modelle 1892.

Bestimmung der Trägheitsmomente des menschlichen Körpers und seiner Glieder. Leipz. Abh. 1892, (gemeinsam mit W. Braune).

Die Arbeit der Muskeln und die lebendige Kraft des menschlichen Körpers. Leipz. Abh. 1893.

Ein zweiter Mechanismus zur Bestimmung der Lage des Schwerpunktes eines Systems von in beliebiger Weise durch Gelenke miteinander verbundenen Körpern. Deutsche Mathematiker-Vereinigung, Nachtrags-Katalog math. Modelle 1893.

Über die Drehungsmomente ein- und mehrgelenkiger Muskeln. Arch. f. Anat. u. Physiol, Anat. Abt. 1894.

Der Gang des Menschen I. Teil: Versuche am unbelasteten und belasteten Menschen. Leipz. Abh. 1895. (Die Versuche sind noch gemeinsam mit W. Braune angestellt worden.)

Die Hebelwirkung des Fußes, wenn man sich auf die Zehen erhebt. Arch. f. Anat. u. Physiol., Anat Abt. 1895.

Beiträge zu einer Muskeldynamik. I. Abh.: Über die Wirkungsweise eingelenkiger Muskeln. Leipz. Abh. 1895.

Beiträge zur Muskelstatik. I. Abh.: Über das Gleichgewicht zwischen Schwere und Muskeln am zweigliedrigen System. Leipz. Abh. 1896.

Über Grundlagen und Ziele der Muskelmechanik. Arch. f. Anat. u. Physiol., Anat. Abt. 1896.

Beiträge zu einer Muskeldynamik. II. Abh.: Über die Wirkung der Schwere und beliebiger Muskeln auf das zweigliedrige System. Leipz. Abh. 1897.

Der Gang des Menschen. II. Teil: Die Bewegung des Gesamtschwerpunktes und die äußeren Kräfte. Leipz. Abh. 1899.

Der Gang des Menschen. III. Teil: Betrachtungen über die weiteren Ziele der Untersuchung und Überblick über die Bewegungen der unteren Extremitäten. Leipz. Abh. 1900.

Der Gang des Menschen. IV. Teil: Über die Bewegung des Fußes und die auf denselben einwirkenden Kräfte. Leipz. Abh. 1901.

Über die Bedingungen und den Beginn der Ablösung der Fersen vom Boden. Wundts philosophische Studien 19 (1902).

Das statische und kinetische Maß für die Wirkung eines Muskels, erläutert an ein- und zweigelenkigen Muskeln des Oberschenkels. Leipz. Abh. 1902.

Über die reduzierten Systeme und die Hauptpunkte der Glieder eines Gelenkmechanismus und ihre Bedeutung für die technische Mechanik. Zeitschr. f. Math. u. Physik 47 (1902).

Der Gang des Menschen. V. Teil: Die Kinematik des Beinschwingens. Leipz. Abh. 1903.

Physiologische Mechanik. Verh. d. Gesellsch. deutsch. Naturf. u. Ärzte in Cassel 1903.

Der Gang des Menschen. VI. Teil: Über den Einfluß der Schwere und der Muskeln auf die Schwingungsbewegung des Beins. Leipz. Abh. 1904.

Physiologische Mechanik (Bewegungslehre). Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Band IV, 2, II. Heft 1.

Über die Bewegungsgleichungen räumlicher Gelenksysteme. Leipz. Abh. 1905.

Register.

(Die Ziffern bedeuten die Seitenzahlen.)

A.

B.

D.

E.

F.

G.

H.

I.

K.

L.

M.

